

Mathematik-Aufgabenpool

> Kurvendiskussion

gebrochen rationaler Funktionen I

Einleitung: Eine gebrochen rationale Funktion (Polynom) $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ (mit maximaler Definitionsbereich D_f) ist vom Typ:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (\text{für natürliche Zahlen } m, n \text{ und reelle Koeffizienten } a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m; a_n, b_m \neq 0).$$

Gebrochen rationale Funktionen sind Brüche von ganz rationalen Funktionen. Für die Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion	
Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x - x_{N1})^{k_1} (x - x_{N2})^{k_2} \cdot \dots \cdot R_1(x)}{b_m (x - x_{P1})^{k_l} (x - x_{P2})^{k_l} \cdot \dots \cdot R_2(x)}$	
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:	
a) Nenner = 0 $\rightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \rightarrow x_{P1}, x_{P2}, \dots \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_{P1}, x_{P2}, \dots\}$ (Definitionsbereich)	
b) Zähler = 0 $\rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x_{N1}, x_{N2}, \dots$	
c) Auswertung:	
<ul style="list-style-type: none"> - Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm $f(x)$ um den Faktor $(x - x_P)^l = (x - x_N)^k$ ($l=k$) zu $f^*(x)$ gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. - Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, \dots senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x - x_P)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) oder mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x > x_P, x < x_P$) und $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x > x_P, x < x_P$)). - Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, \dots Nullstellen mit Linearfaktor $(x - x_P)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt). 	
II. Waagerechte Asymptote: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:	
$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow 0 & \text{falls } n < m \\ \rightarrow \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \rightarrow \pm\infty & \text{falls } n > m \end{array} \right.$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm $f(x)$ zu $f^*(x)$ kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)	
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen):	
a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1)); f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2)); \dots$	
V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):	
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$	
b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1)); f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2)); \dots$	
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:	
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$	

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

- Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), $f'(x_0) < 0$);
- Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ...
- Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$)

VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

- Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x < x_1$), $f''(x_0) > 0$);
- Krümmungsintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1, x > x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2, x < x_2$), $f'(x_0) > 0$); ...
- Krümmungsintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n, x > x_n$), $f'(x_0) > 0$); ...

VIII. Symmetrie:

a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): $f(-x) = f(x)$ oder:

Zähler gerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ gerade

Zähler ungerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ gerade

b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): $f(-x) = -f(x)$ oder:

Zähler gerade, Nenner ungerade $\rightarrow f(x)$ ungerade

Zähler ungerade, Nenner gerade $\rightarrow f(x)$ ungerade

c) $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw.

$f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x} - 2$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

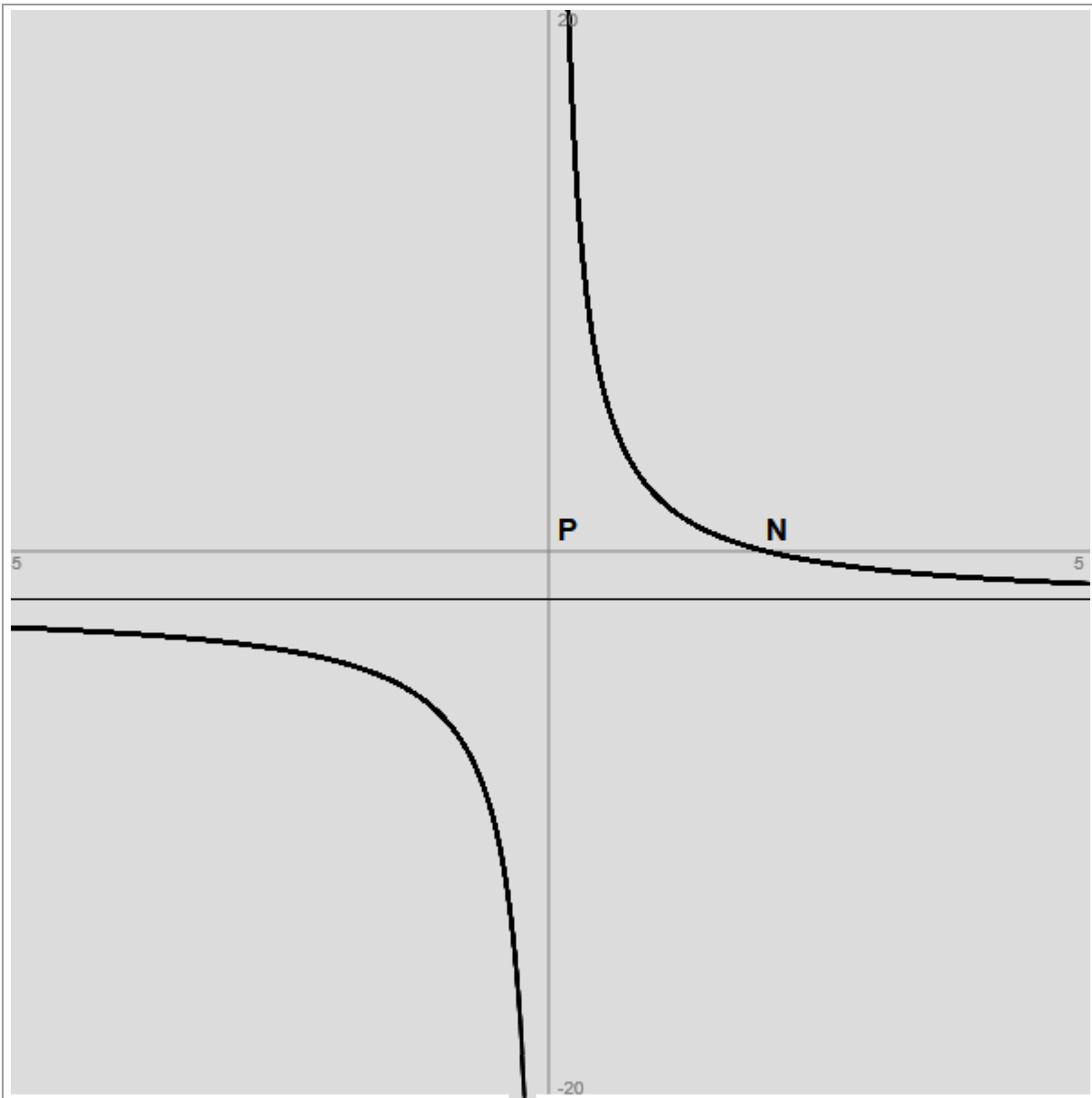
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	40000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$

2	0	-1	1	Nullstelle N(2 0)
---	---	----	---	-------------------

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -2$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -2$ mit: $y = -2$ als waagerechte Asymptote

Punktsymmetrie zum Punkt $Z(0|-2)$ als Schnittpunkt der Asymptoten

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

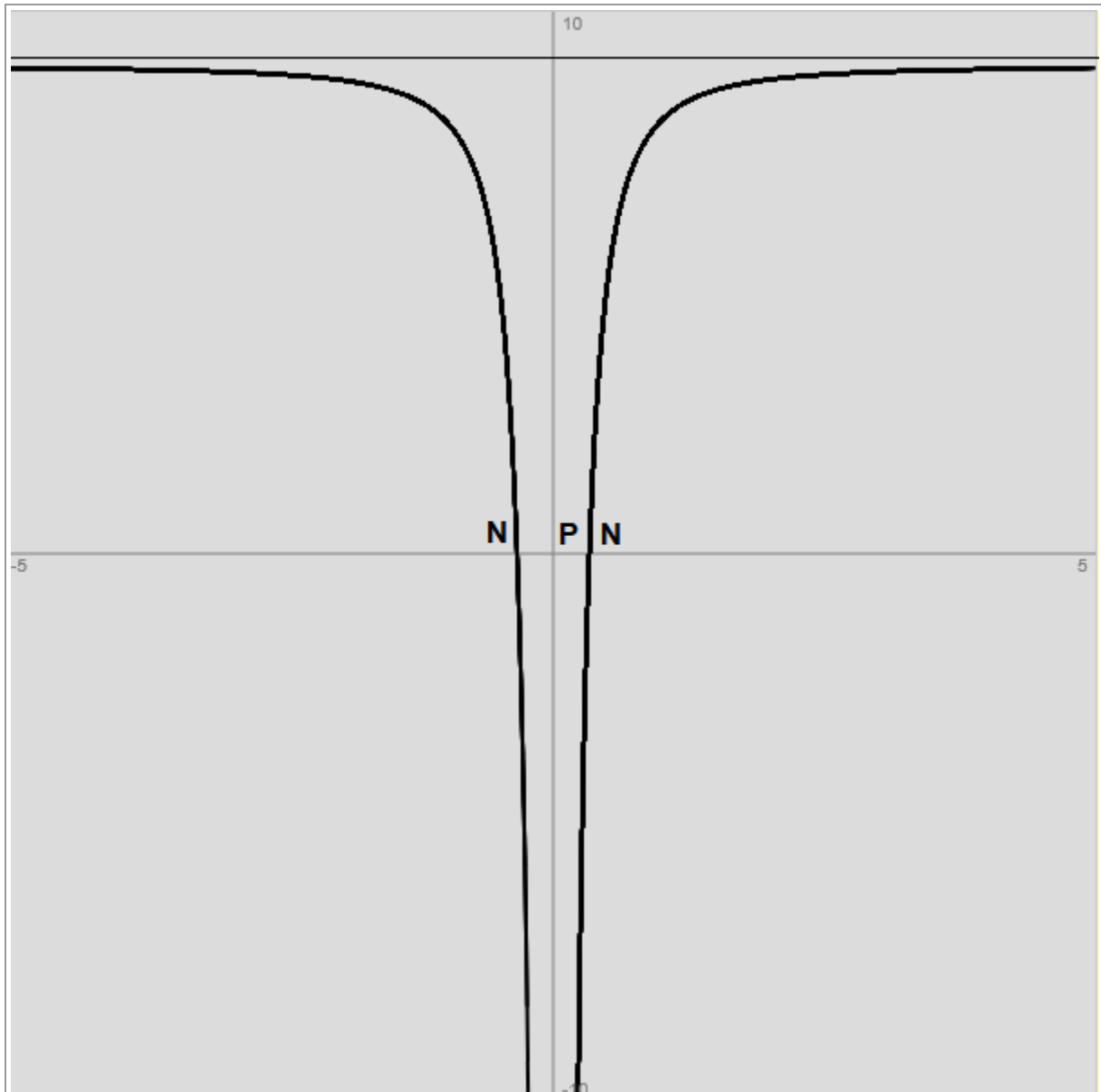
$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 9$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.34	0.3495	-50.97	-449.64	Nullstelle N(-0.34 0.35)
0	-Infinity	0	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.33	-0.1827	55.76	-506.71	Nullstelle N(0.33 -0.18)

Graph:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = 0$ als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 9$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 9$ mit: $y = 9$ als waagerechter Asymptote

Achsensymmetrie zur y-Achse

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x - 10}{2x + 3}$$

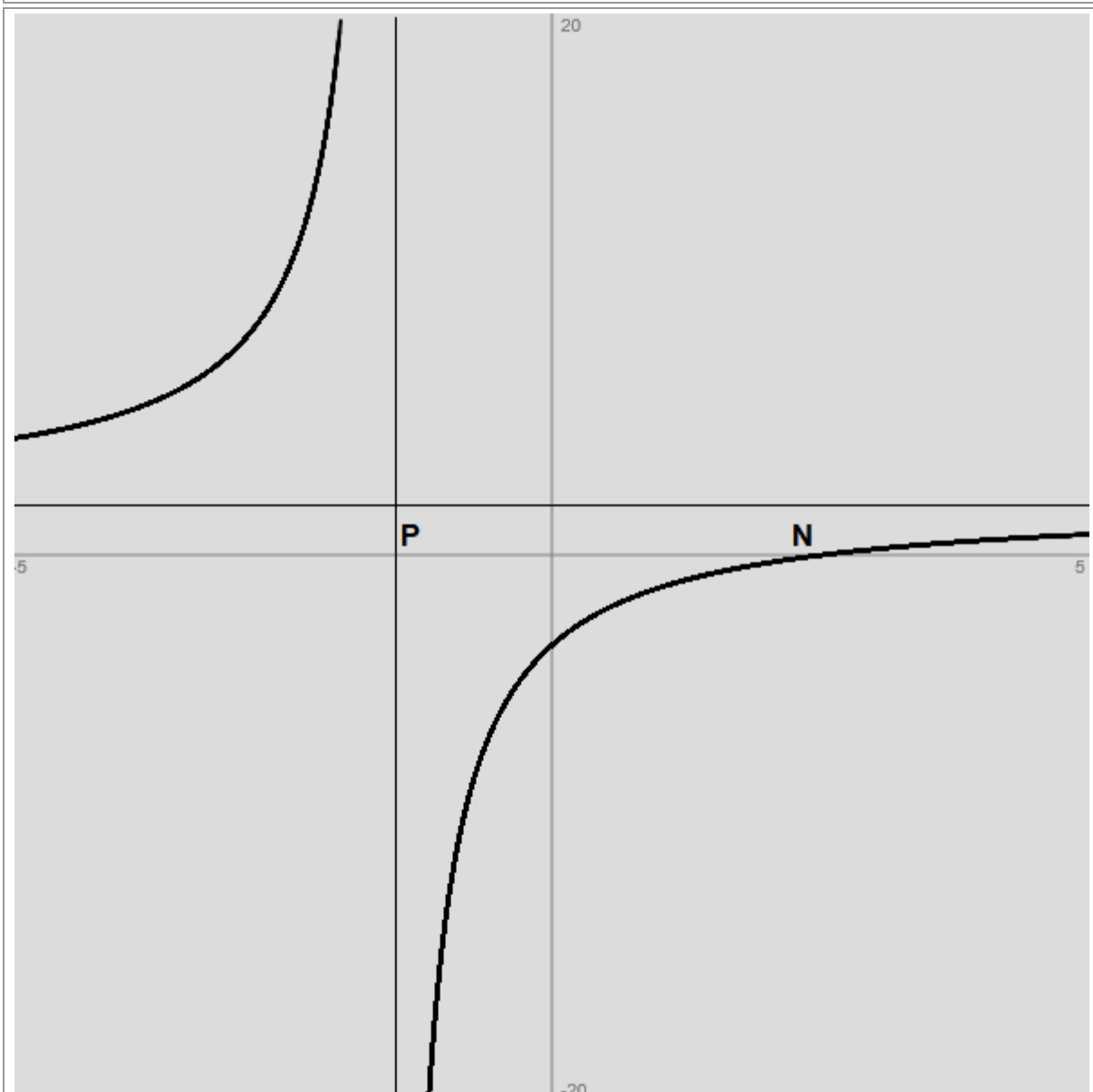
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.5	-Infinity	-80000	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -1.5$
0	-3.3333	3.56	-4.74	Schnittpunkt $S_y(0 -3.33)$
2.5	0	0.5	-0.25	Nullstelle $N(2.5 0)$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,5\}$
$x = -1,5$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$ mit: $y = 2$ als waagerechter Asymptote

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \left[\frac{x}{x-3} \right]^2$$

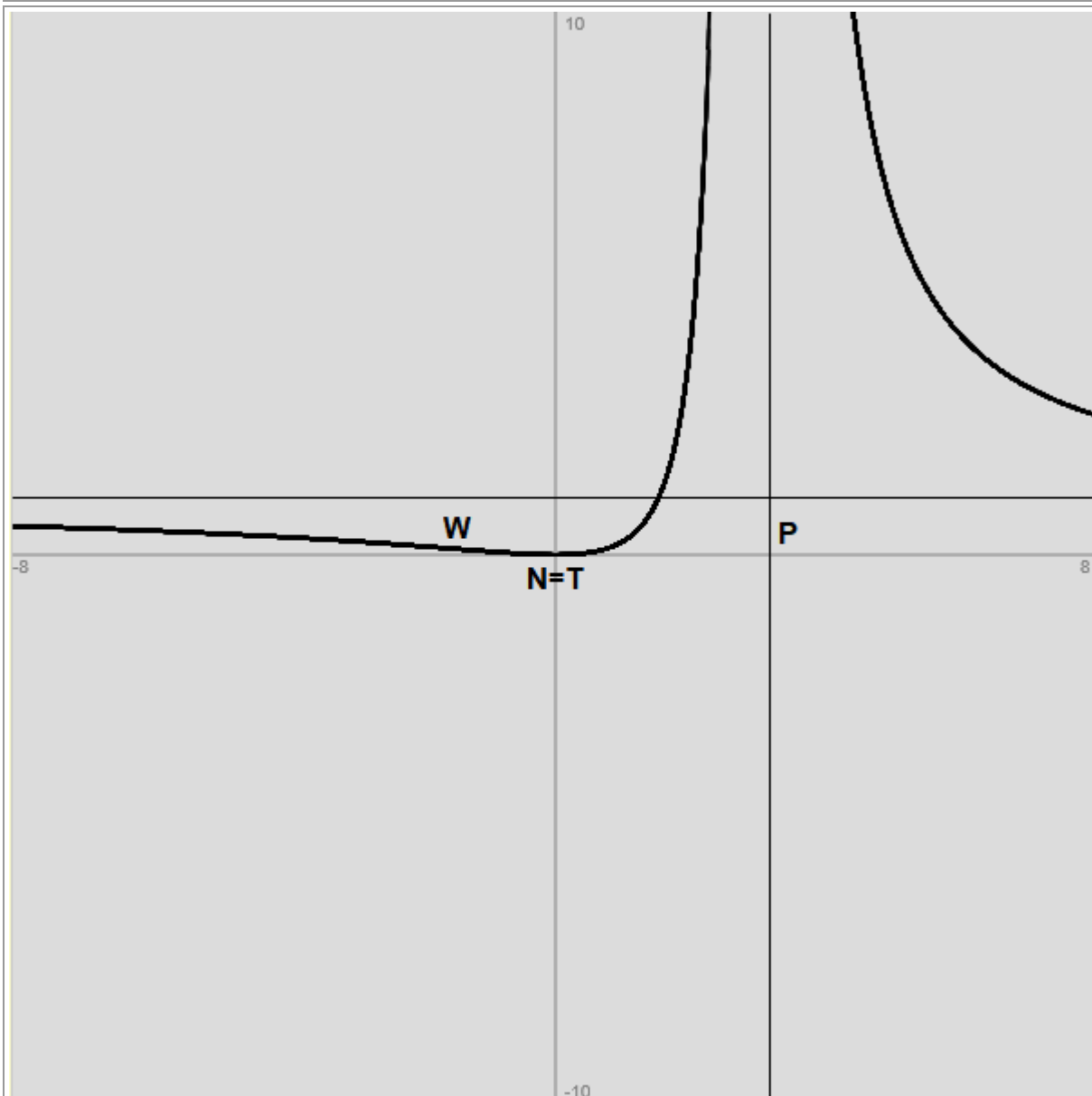
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.51	0.1121	-0.1	0	Wendepunkt W(-1.51 0.11)
0	0	0	0.22	Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Tiefpunkt T(0 0)
3	Infinity	60000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 3$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x = 3$ als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ mit: $y = 1$ als waagerechter Asymptote

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

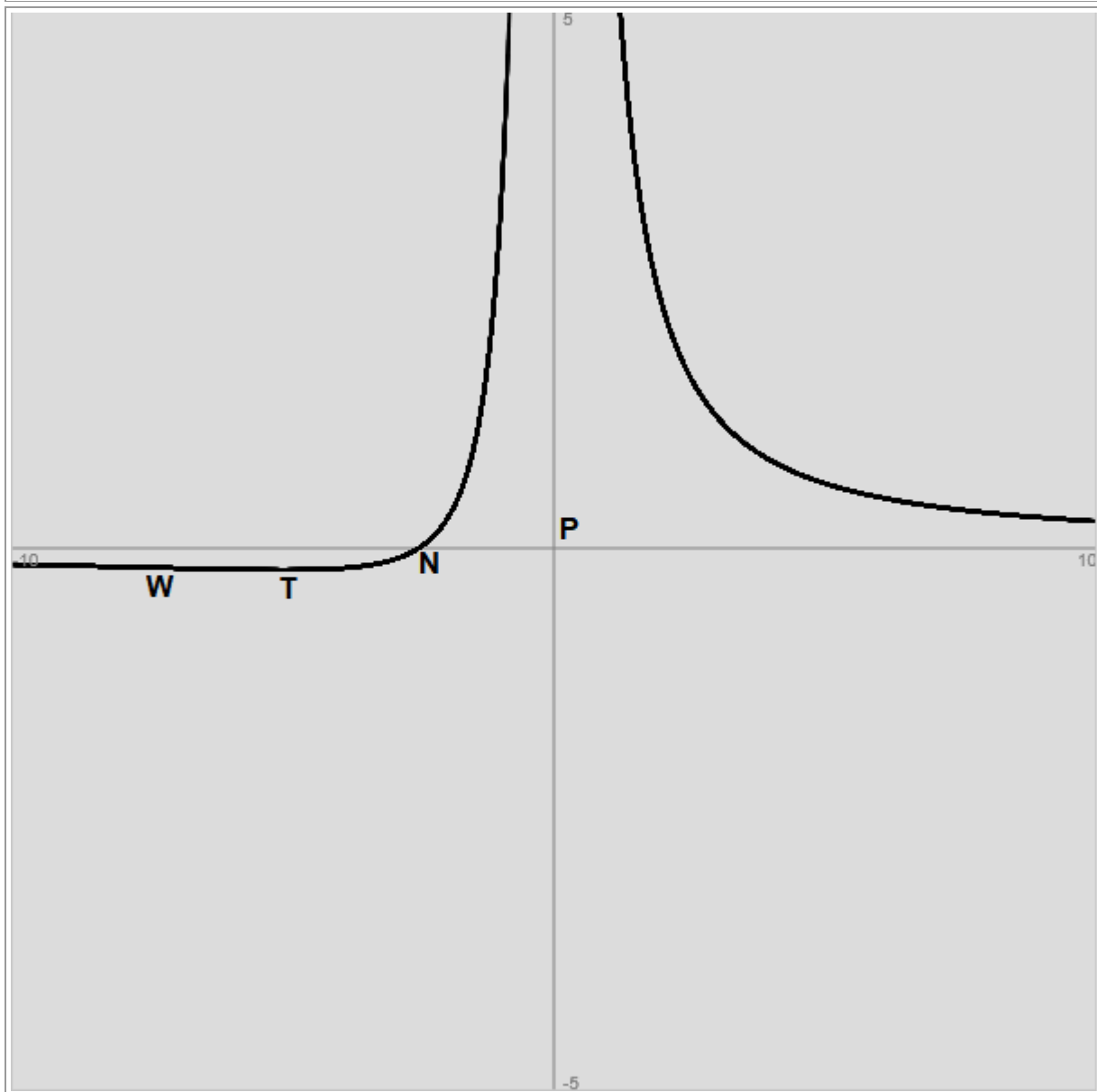
$$f(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-7.51	-0.1777	-0.01	0	Wendepunkt W(-7.5 -0.18)
-5.01	-0.2	0	0.02	Tiefpunkt T(-5 -0.2)
-2.5	0	0.32	0.51	Nullstelle N(-2.5 0)
0	Infinity	20000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

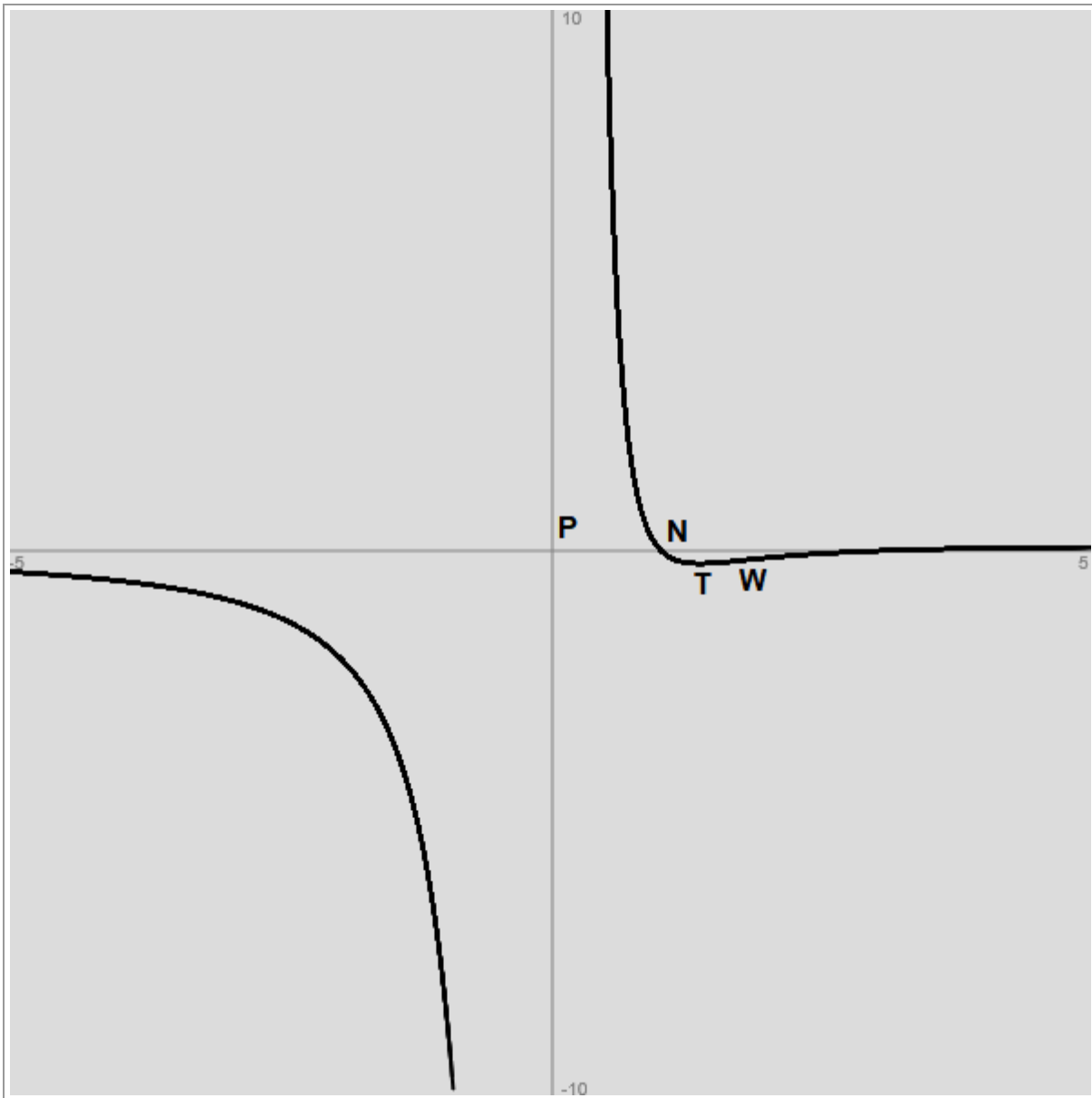
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	300010000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$
1	0	-2	14.01	Nullstelle N(1 0)
1.35	-0.2347	-0.01	1.62	Tiefpunkt T(1.35 -0.23)
1.75	-0.1749	0.21	0.01	Wendepunkt W(1.75 -0.17)
3	0	0.07	-0.07	Nullstelle N(3 0)
Graph:				



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{20}{x^2+4}$$

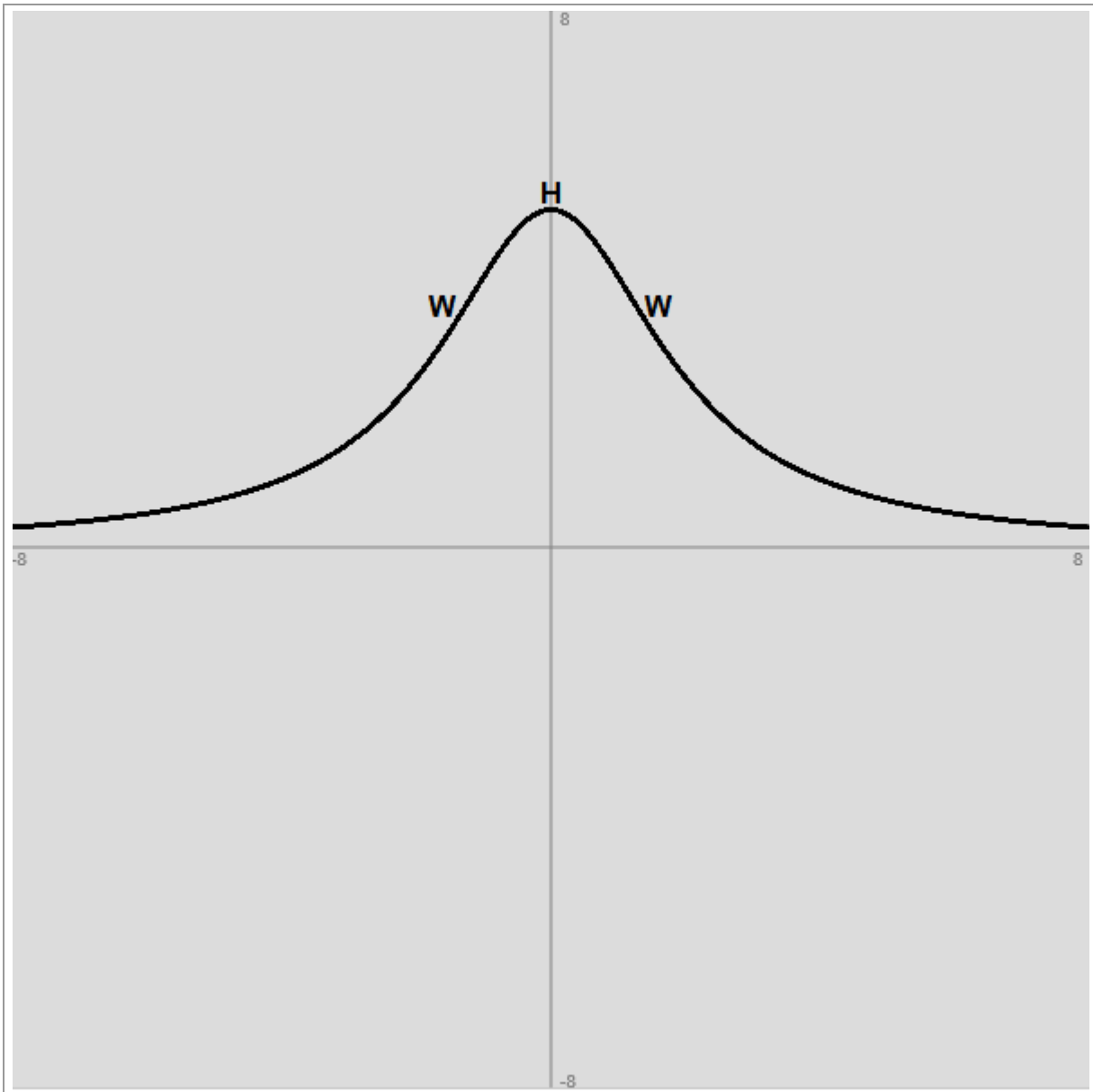
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.16	3.7414	1.62	0.01	Wendepunkt W(-1.16 3.74)
0	5	0	-2.5	Schnittpunkt $S_y(0 5)$ = Hochpunkt H(0 5)
1.15	3.7576	-1.62	-0.01	Wendepunkt W(1.15 3.76)

Graph:



$D_f = \mathbf{R}$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Achsensymmetrie zur y-Achse

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 - 9}$$

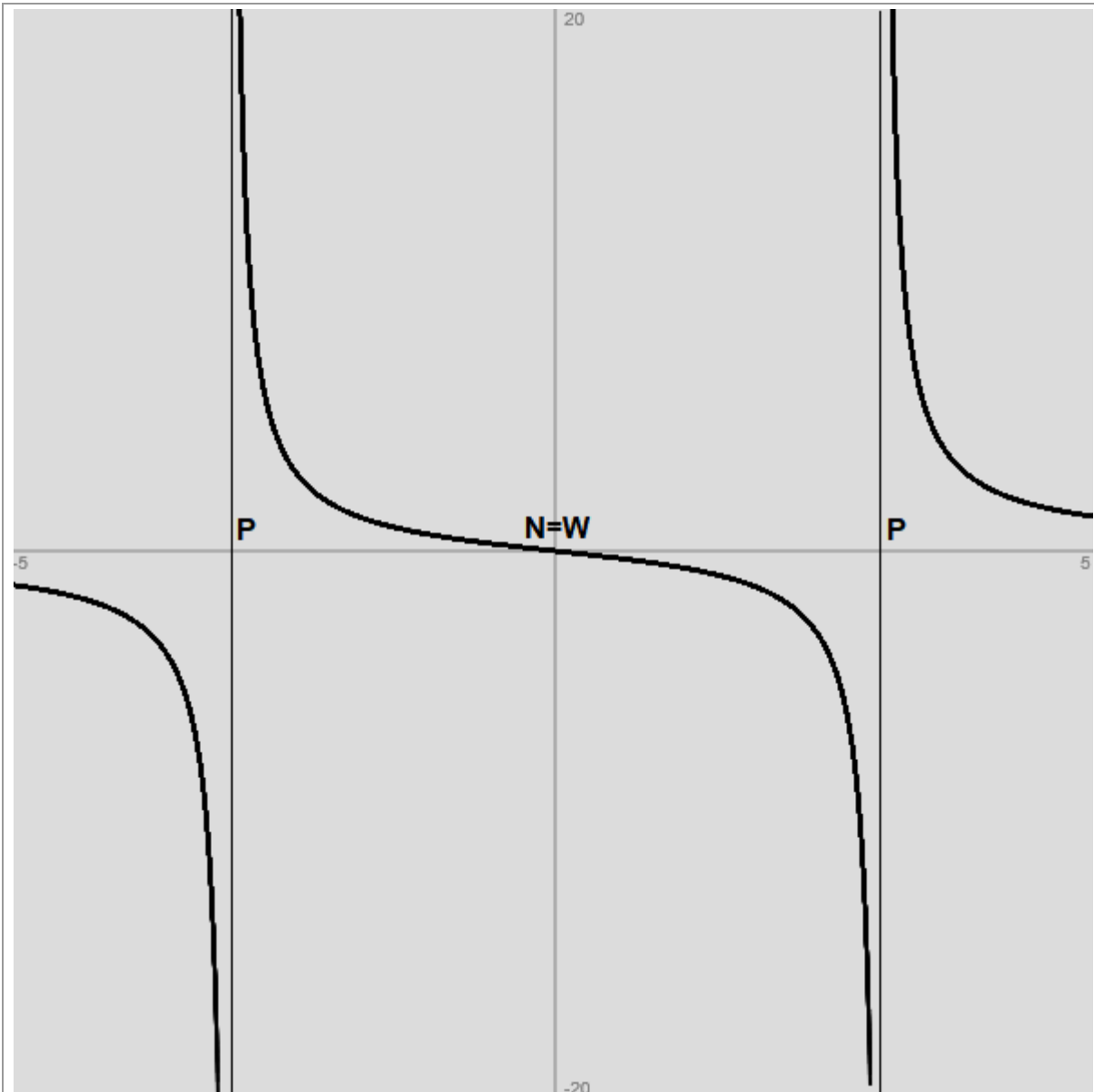
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.002	-1000.3332	-Infinity	-Infinity	Hochpunkt H(-3 -1000.33)
-3	-Infinity	499999.94	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
0	0	-0.44	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Wendepunkt W(0 0)
3	Infinity	499999.94	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 3

Graph:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

x = -3 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 3 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x → -∞ ⇒ f(x) → 0; x → +∞ ⇒ f(x) → 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechte Asymptote

Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$$

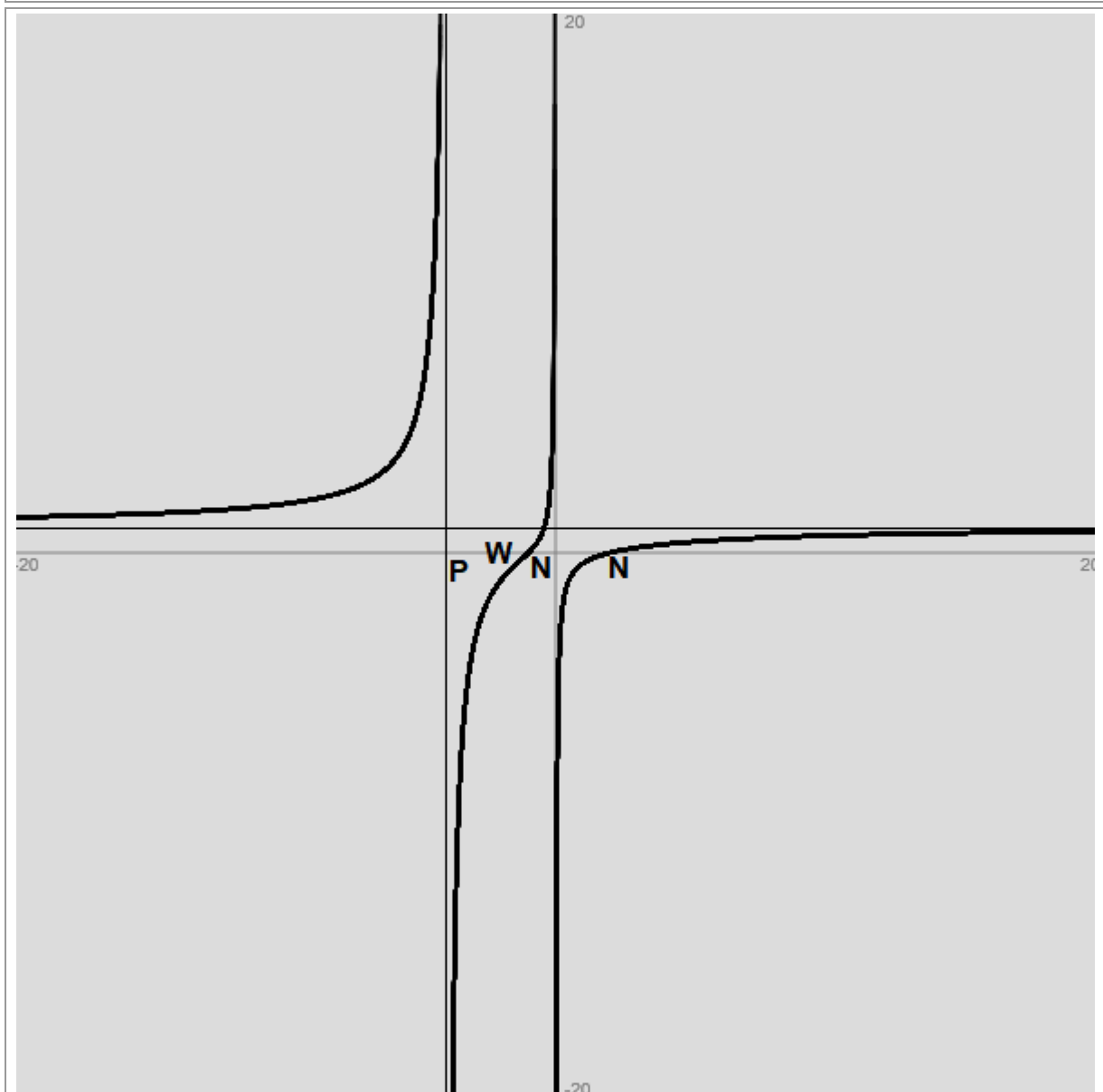
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
4	-Infinity	-179999.97	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -4$
-1.3	-0.2821	0.91	0	Wendepunkt $W(-1.3 -0.28)$
-1	0	1	0.67	Nullstelle $N(-1 0)$
0	-Infinity	-19999.72	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$
2	0	0.25	-0.17	Nullstelle $N(2 0)$

Graph:



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$$

$x = -4$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ mit: $y = 1$ als waagerechter Asymptote

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{10}{x+2} - \frac{5}{(x-4)^2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

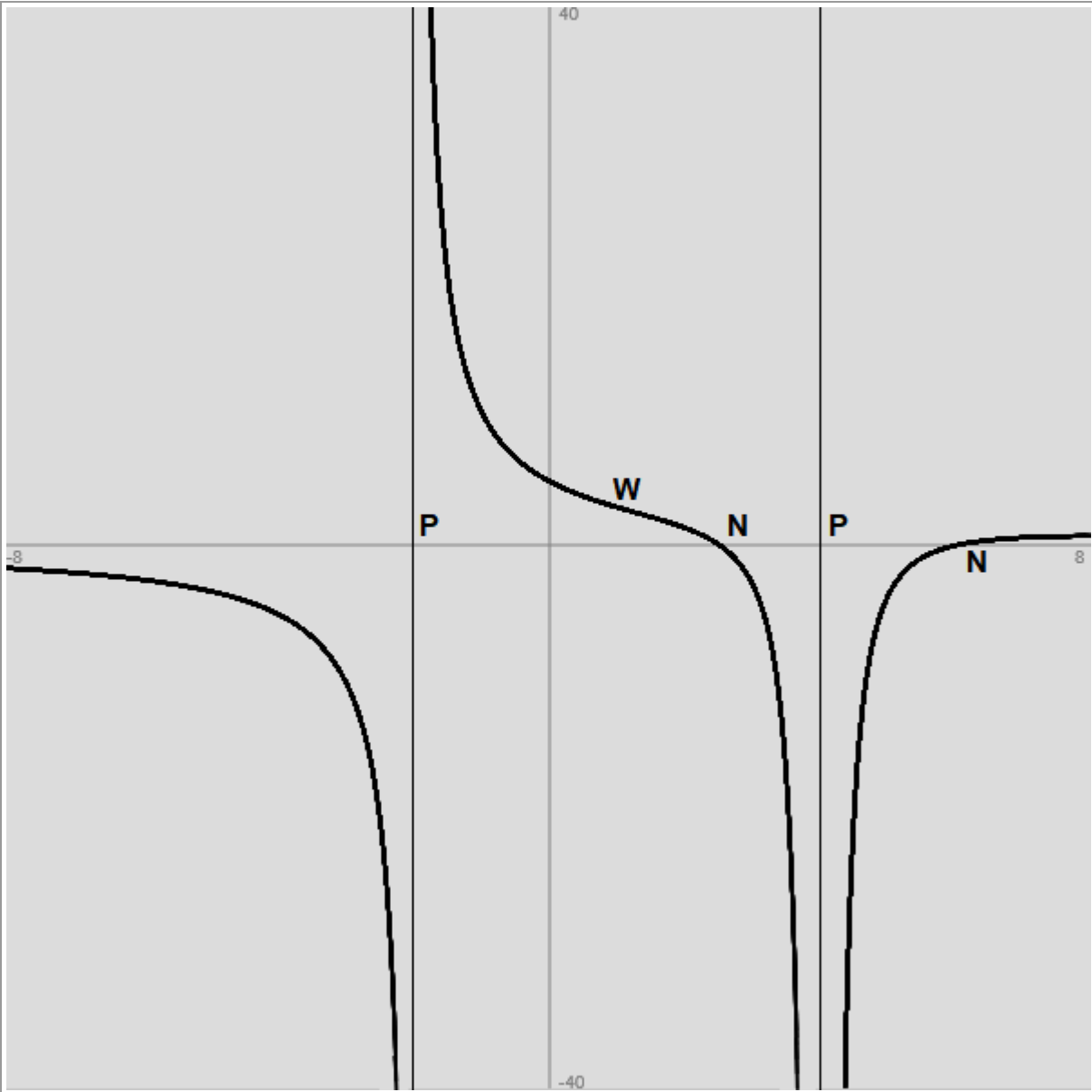
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	399999.95	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -2$
0	4.6875	-2.66	2.38	Schnittpunkt $S_y(0 4.69)$
1.29	2.3587	-1.43	0.01	Wendepunkt $W(1.29 2.36)$
2.5	0	-3.46	-5.71	Nullstelle $N(2.5 0)$
4	-Infinity	-0.28	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 4$

6	0	1.09	-1.84	Nullstelle N(6 0)
---	---	------	-------	-------------------

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

$x = -2$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 4$ als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechte Asymptote

Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{x}{(x-2)^2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

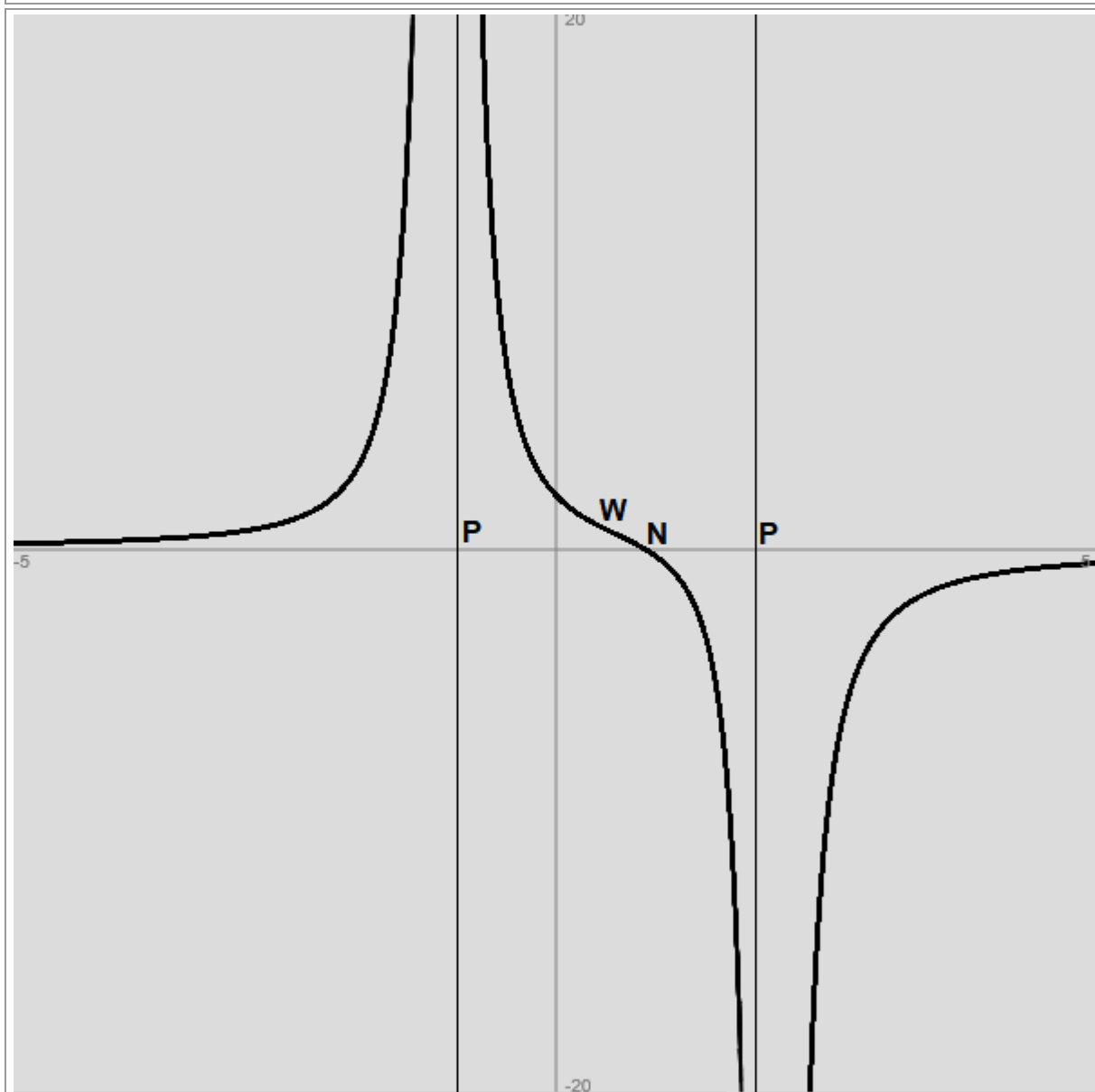
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte

Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	-Infinity	-350000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -3$
0	0	0	-2.22	Nullstelle $N(0 0)$ = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Hochpunkt $H(0 0)$
1	Infinity	30000.23	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 1$
2.47	1.6443	-0.7	0	Wendepunkt $W(2.47 1.64)$
4	0	-1.9	-2	Nullstelle $N(4 0)$
6	Infinity	320000.08	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 6$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 6\}$

$x = -3$ als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel, $x = 6$ als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x -Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{5x^2(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-6)}$$

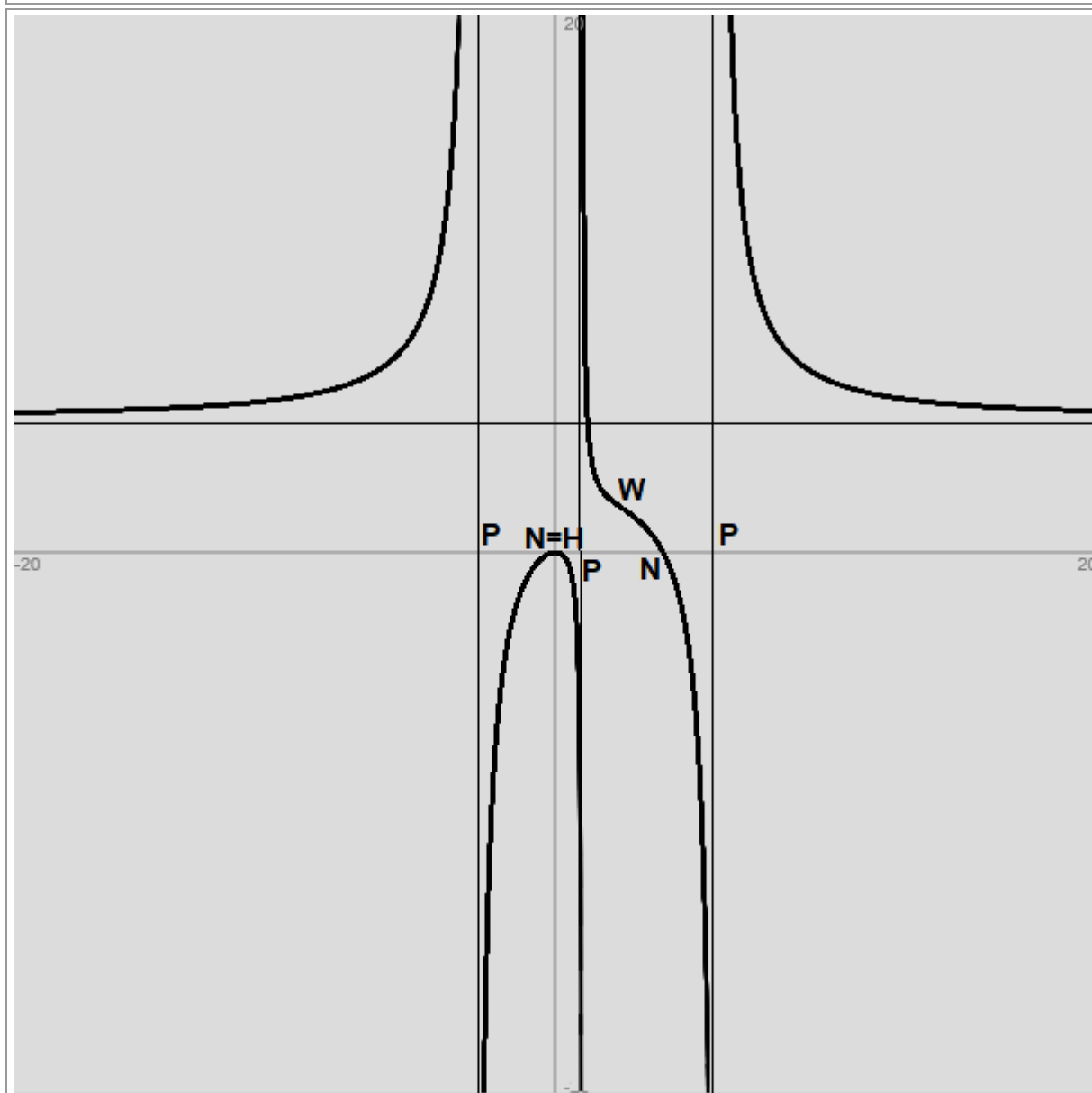
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	Infinity	-0.04	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -1$
0	2	-4.25	11.5	Schnittpunkt $S_y(0 2)$
0.55	0.5709	-1.91	0.02	Wendepunkt $W(0.55 0.57)$
0.825	0.0029	-2.4	-3.98	Nullstelle $N(0.83 0)$
2	-Infinity	-160000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 2$

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 6\}$

$x = -3$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 1$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 6$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5$ mit: $y = 5$ als waagerechter Asymptote

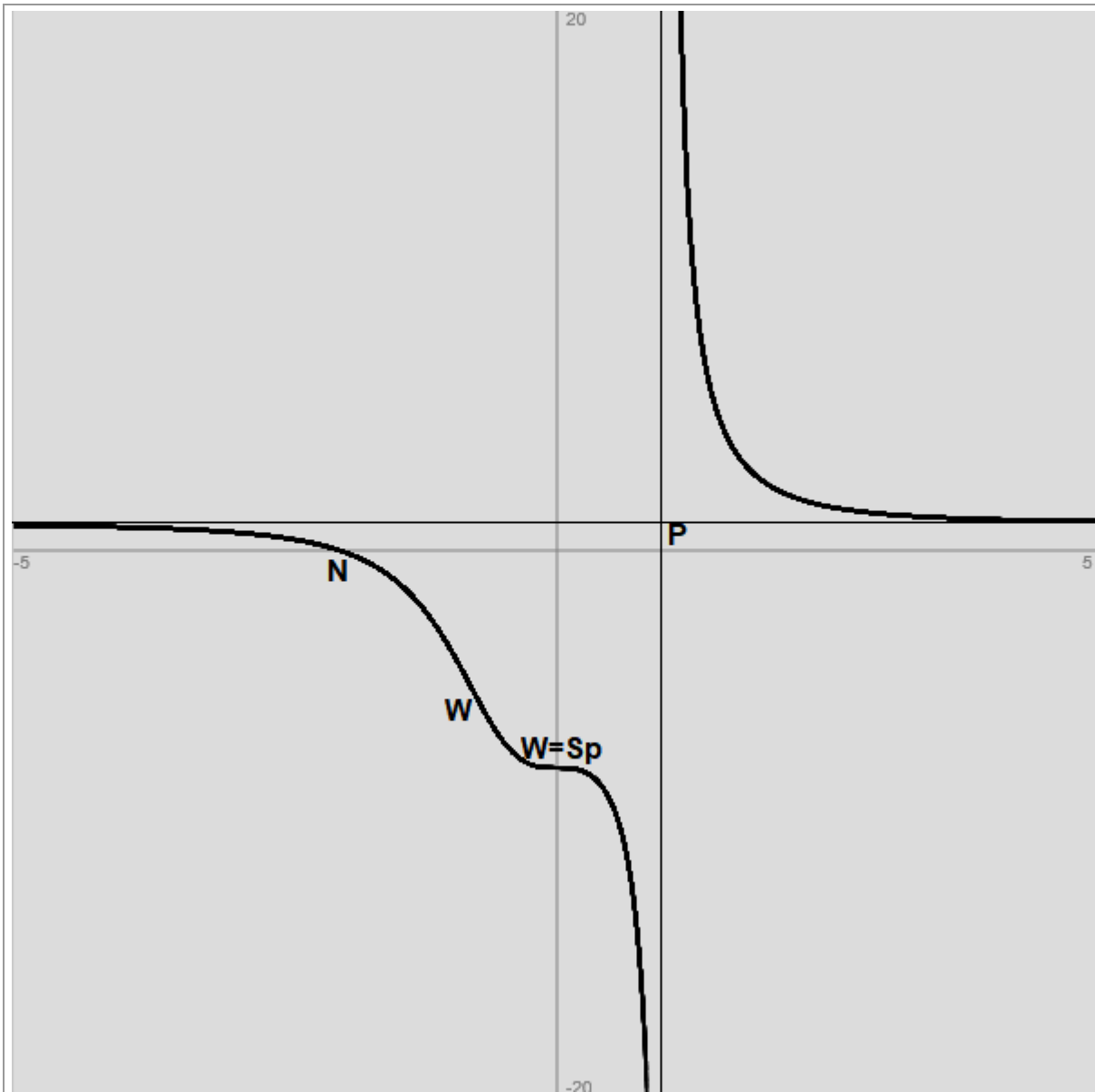
Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung:**

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-1.33	-2.22	Nullstelle N(-2 0)
-0.795	-4.9902	-7.56	-0.06	Wendepunkt W(-0.79 -4.99)
0	-8	0	0	Schnittpunkt $S_y(0 -8)$ = Wendepunkt $W(0 -8)$ = Sattelpunkt $W_s(0 -8)$
1	Infinity	480002	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 1$
Graph:				



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x = 1$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$ mit: $y = 1$ als waagerechte Asymptote

Aufgabe 14: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 4x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

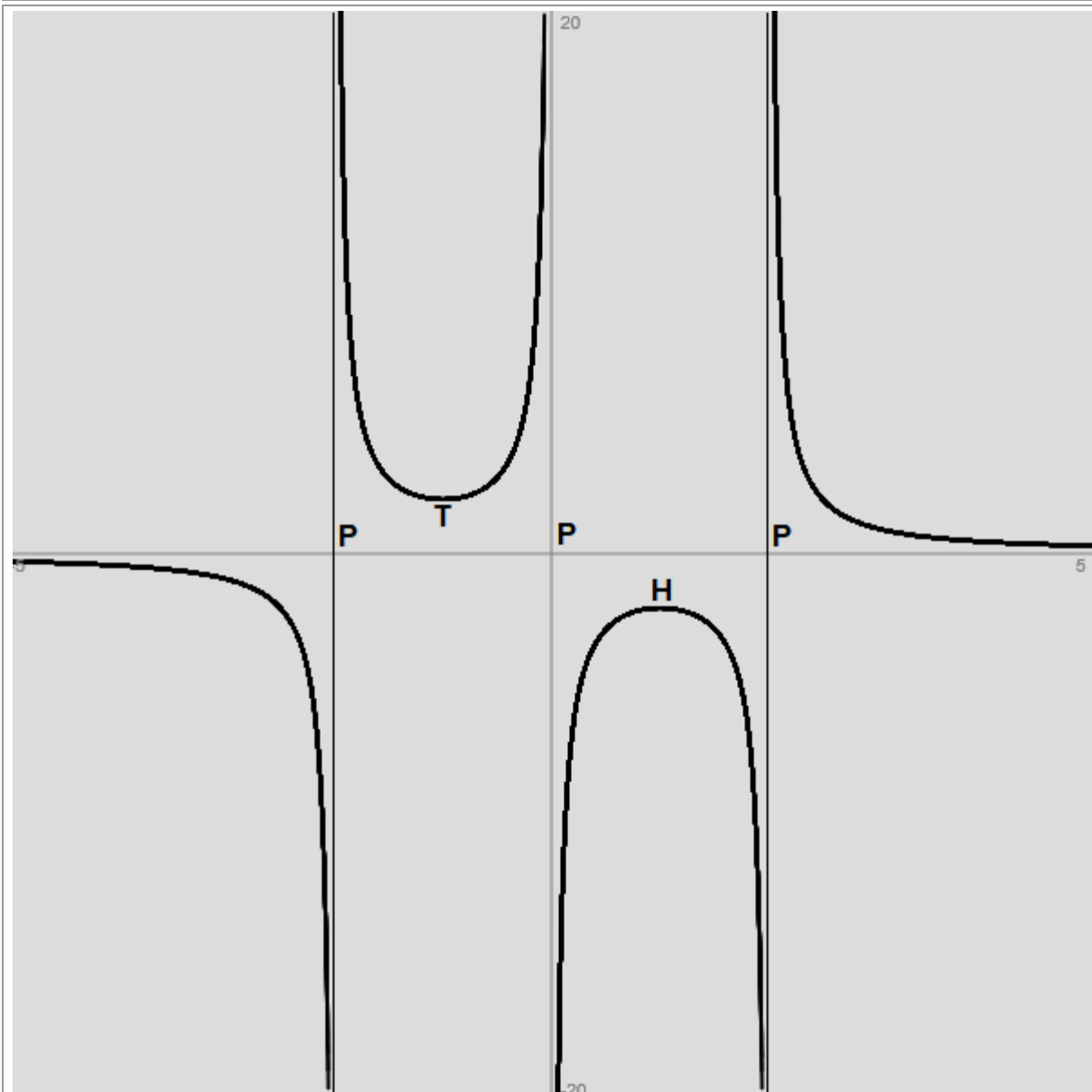
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -2$
-1.002	2	-0.01	4.67	Tiefpunkt T(-1 2)
0	Infinity	-312500.56	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = 0$

1	-2	0	-4.67	Hochpunkt H(1 -2)
2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

$x = -2$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, $x = 2$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Punktsymmetrie zum Ursprung $O(0|0)$

Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

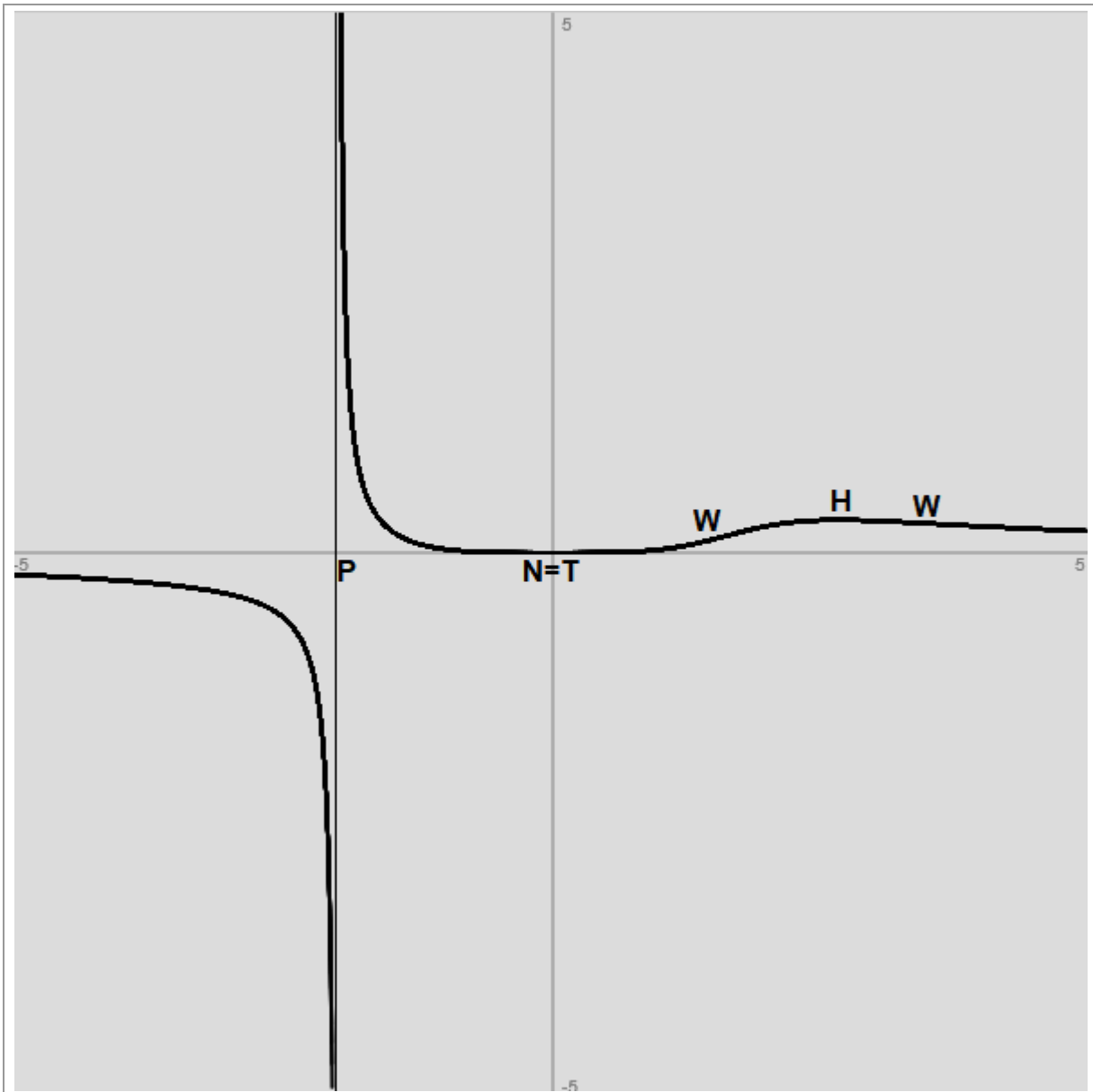
$$f(x) = \frac{x^4}{x^5 + 32}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ($f(x) = 0 \rightarrow$ Nullstellen; $f'(x) = 0 \rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkte; $f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkte; Nenner von $f(x) = 0 \rightarrow$ senkrechte Asymptoten/Pole \rightarrow Definitionsbereich D_f ; $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow c$ mit $y=c$ als waagerechter Asymptote; $f(-x) = \pm f(x) \rightarrow$ Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	Infinity	50000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol $x = -2$
0	0	0	0	Nullstelle $N(0 0) =$ Schnittpunkt $S_y(0 0) =$ Tiefpunkt $T(0 0)$
1.61	0.1569	0.27	0	Wendepunkt $W(1.61 0.16)$
2.638	0.3031	0	-0.17	Hochpunkt $H(2.64 0.3)$
3.55	0.2666	-0.05	0	Wendepunkt $W(3.55 0.27)$
Graph:				



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x = -2$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ mit: $y = 0$ (x-Achse) als waagerechter Asymptote

www.michael-buhlmann.de / 08.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen I / Aufgaben 436-450