Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen I

Einleitung: Eine <u>gebrochen rationale Funktion</u> (Polynom) f: D_f -> **R** (mit maximaler Definitionsbereich D_f) ist vom Typ: $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$ (für natürliche Zahlen m, n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n, b_0, …, b_m; a_n, $b_m \neq 0$). Gebrochen rationale Funktion sind Brüche von ganz rationalen Funktionen. Für die <u>Kurvendiskussion</u> einer gebrochen rationalen Funktion f(x) folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\frac{a_n(x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot ...\cdot R_1(x)}{b_m(x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot ...\cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0=0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}\;\begin{cases}\to 0 & \text{falls } n<m\\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n=m\\ \to \pm\infty & \text{falls } n>m\end{cases}$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘(x) einsetzen): a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f‘(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f‘(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f‘(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
V. Wendepunkte (Gleichung f‘‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘‘(x) einsetzen): a) f‘‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘‘‘(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f‘‘‘(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f‘(x_0) = 0, f‘‘(x_0) = 0, f‘‘‘(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x<x_1), f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x>x_1), f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)>0)
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x<x_1), f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x<x_1), f''(x_0)>0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)>0); …
VIII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): f(-x) = f(x) oder: Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): f(-x) = -f(x) oder: Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x} - 2$$

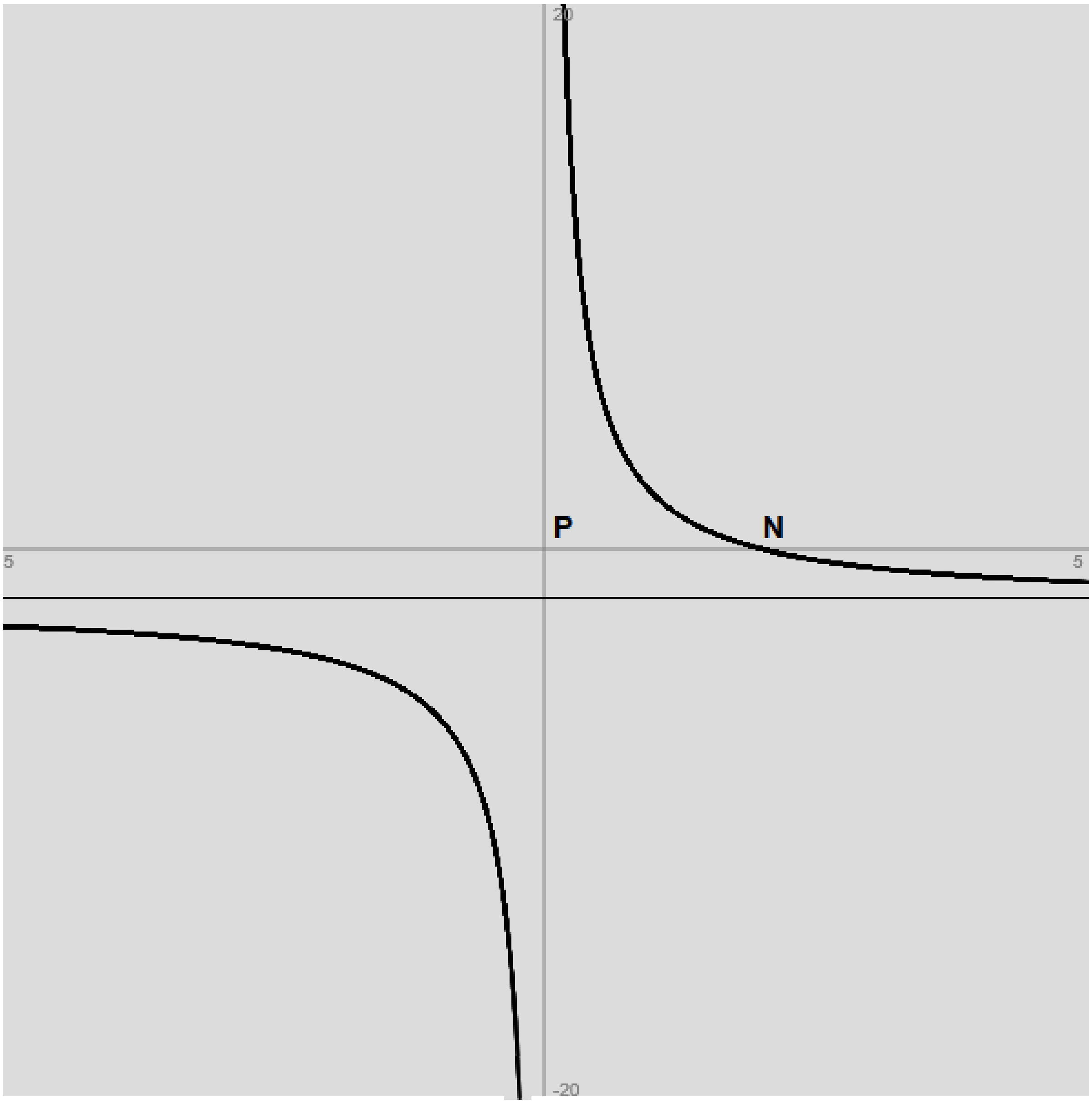
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	Infinity	40000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	0	-1	1	Nullstelle N(2|0)

Graph:



$D_f = R\backslash\{0\}$
x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
x->-∞ => f(x) -> -2; x->+∞ => f(x) -> -2 mit: y = -2 als waagerechter Asymptote
Punktsymmetrie zum Punkt Z(0|-2) als Schnittpunkt der Asymptoten

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 9$$

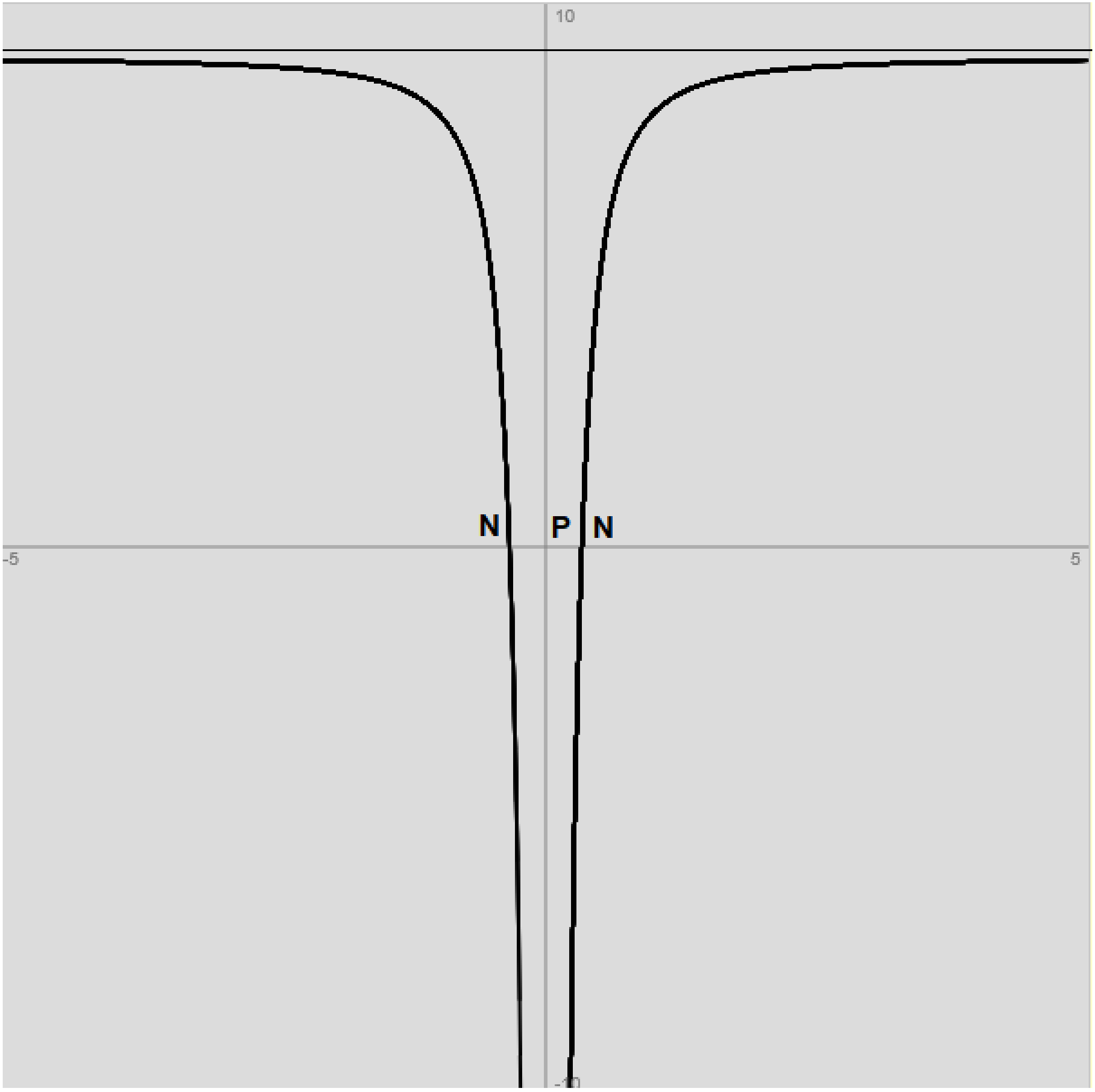
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-0.34	0.3495	-50.97	-449.64	Nullstelle N(-0.34|0.35)
0	-Infinity	0	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.33	-0.1827	55.76	-506.71	Nullstelle N(0.33|-0.18)

Graph:



$D_f = \mathbf{R} \backslash \{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 9; x->+∞ => f(x) -> 9 mit: y = 9 als waagerechter Asymptote

Achsensymmetrie zur y-Achse

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x-10}{2x+3}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte

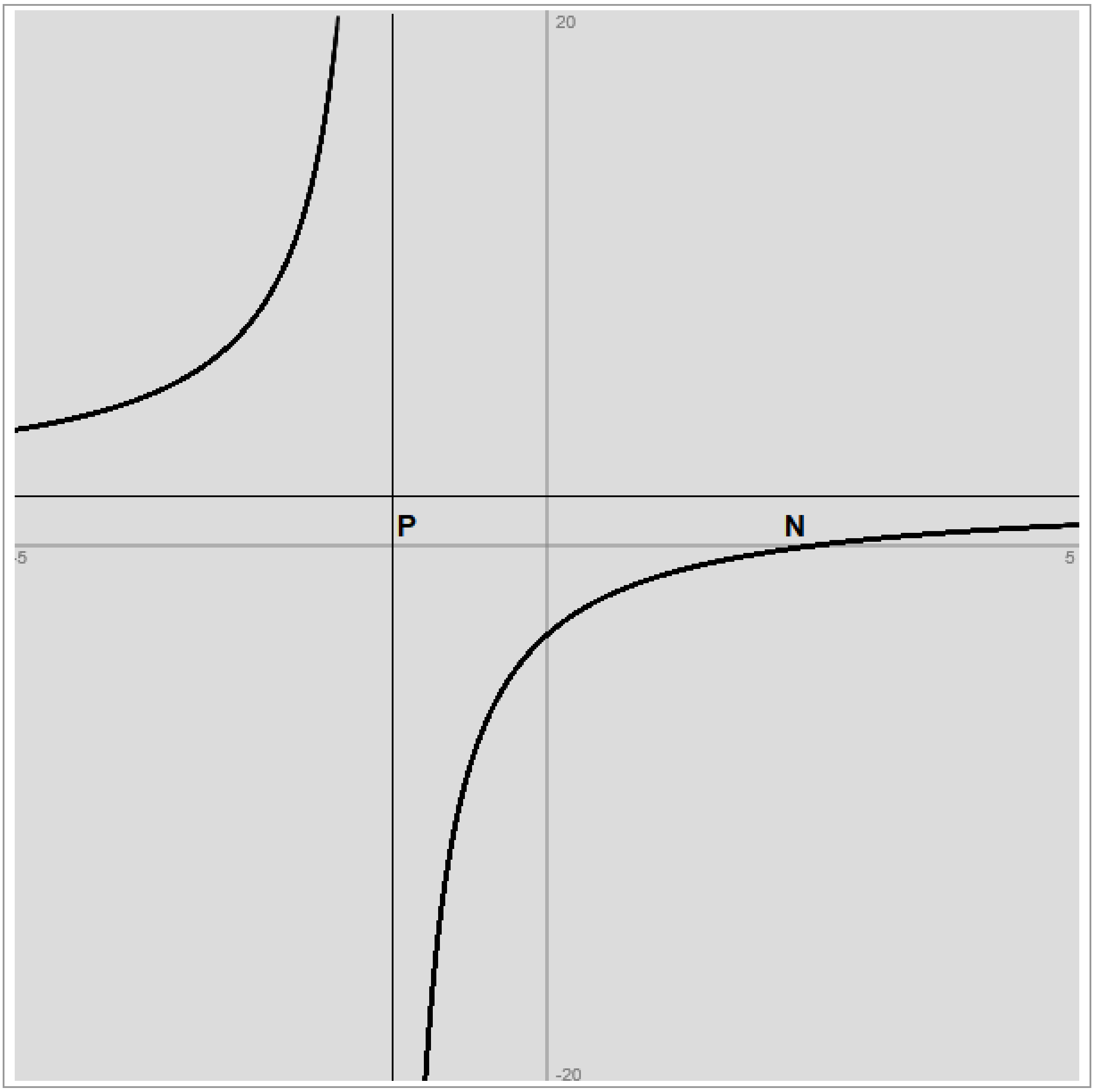
Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1.5	-Infinity	-80000	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1.5
0	-3.3333	3.56	-4.74	Schnittpunkt S_y(0|-3.33)
2.5	0	0.5	-0.25	Nullstelle N(2.5|0)

Graph:



D_f = **R**\{-1,5}

x = -1,5 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 2; x->+∞ => f(x) -> 2 mit: y = 2 als waagerechter Asymptote

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \left[\frac{x}{x-3}\right]^2$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

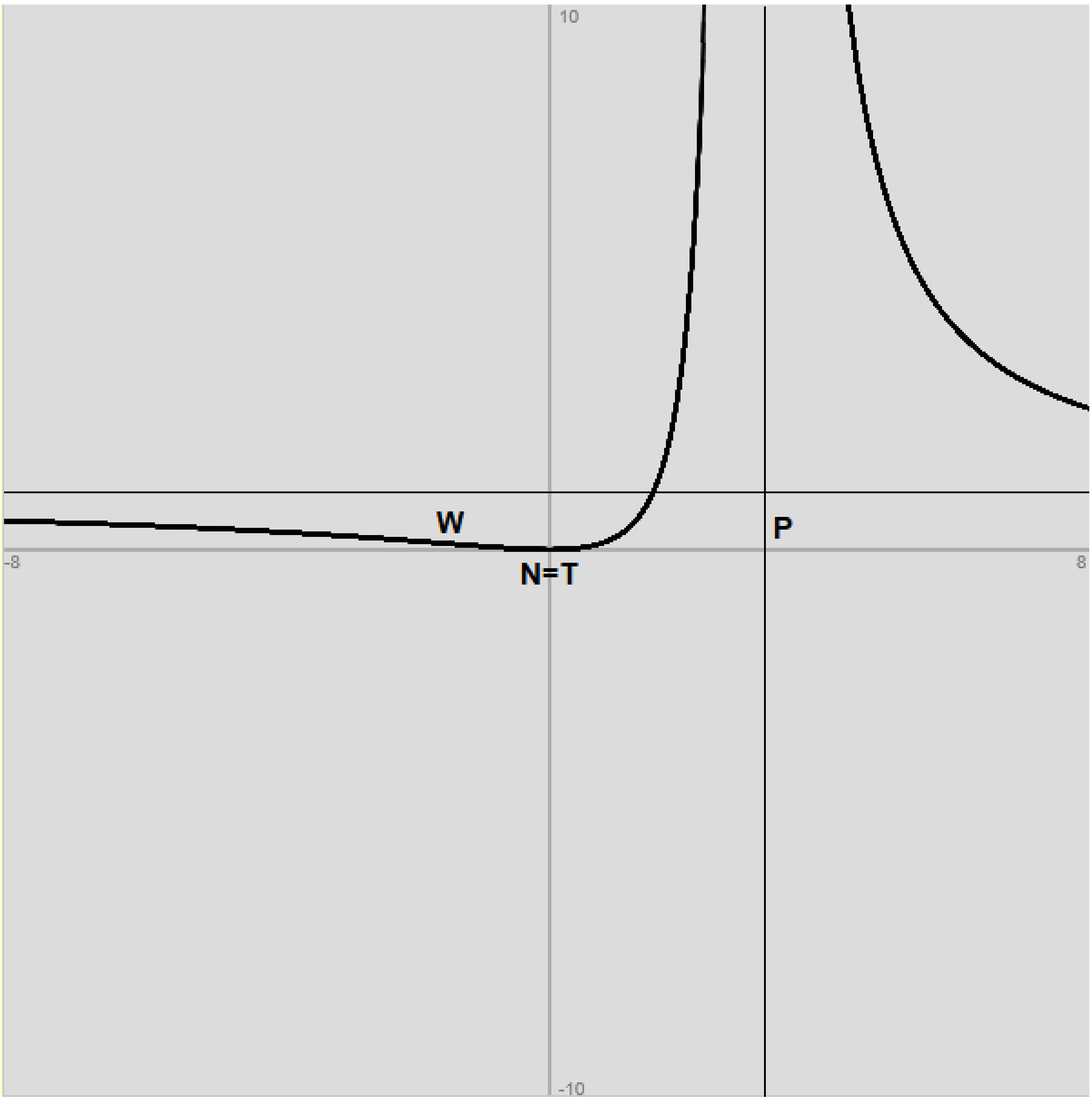
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1.51	0.1121	-0.1	0	Wendepunkt W(-1.51|0.11)
0	0	0	0.22	Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
3	Infinity	60000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 3

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{3\}$

x = 3 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 1; x->+∞ => f(x) -> 1 mit: y = 1 als waagerechter Asymptote

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x}$$

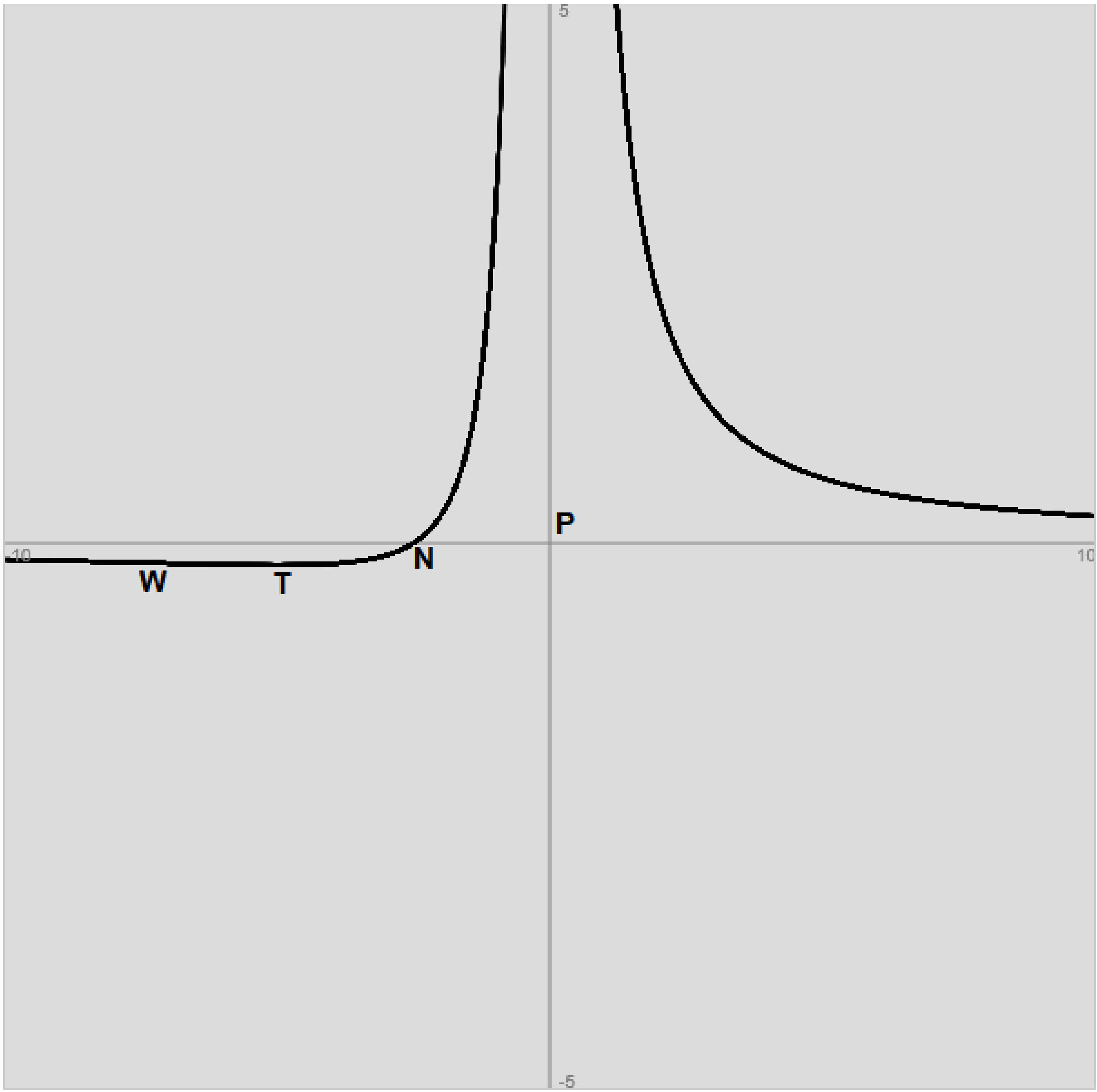
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung**:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-7.51	-0.1777	-0.01	0	Wendepunkt W(-7.5|-0.18)
-5.01	-0.2	0	0.02	Tiefpunkt T(-5|-0.2)
-2.5	0	0.32	0.51	Nullstelle N(-2.5|0)
0	Infinity	20000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0

Graph:



D_f = **R**\{0}

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

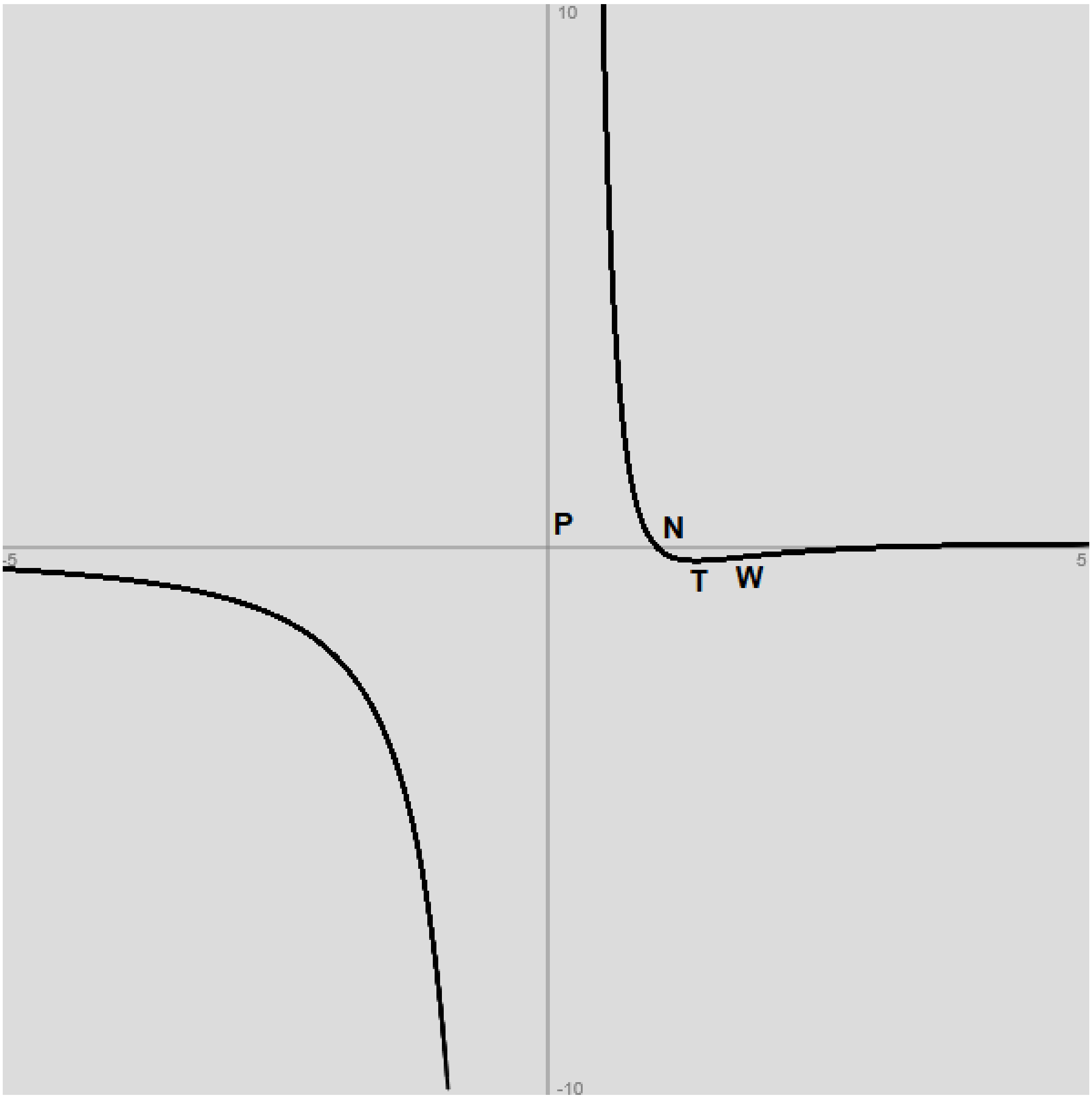
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	Infinity	300010000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
1	0	-2	14.01	Nullstelle N(1|0)
1.35	-0.2347	-0.01	1.62	Tiefpunkt T(1.35|-0.23)
1.75	-0.1749	0.21	0.01	Wendepunkt W(1.75|-0.17)
3	0	0.07	-0.07	Nullstelle N(3|0)

Graph:



D_f = **R**\{0}

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x)=\frac{20}{x^2+4}$$

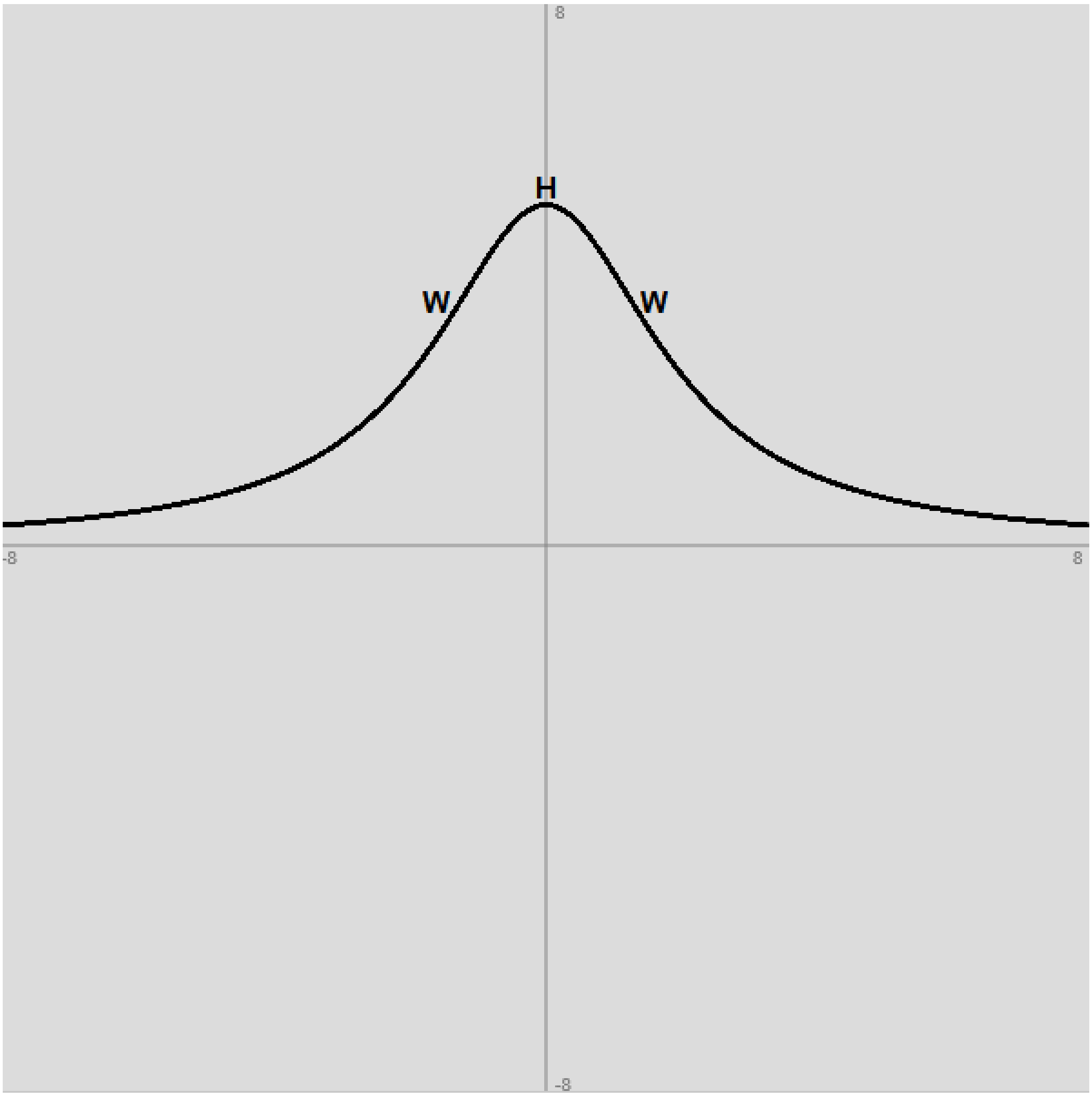
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1.16	3.7414	1.62	0.01	Wendepunkt W(-1.16|3.74)
0	5	0	-2.5	Schnittpunkt S_y(0|5) = Hochpunkt H(0|5)
1.15	3.7576	-1.62	-0.01	Wendepunkt W(1.15|3.76)

Graph:



D_f = **R**
x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote
Achsensymmetrie zur y-Achse

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{4x}{x^2-9}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

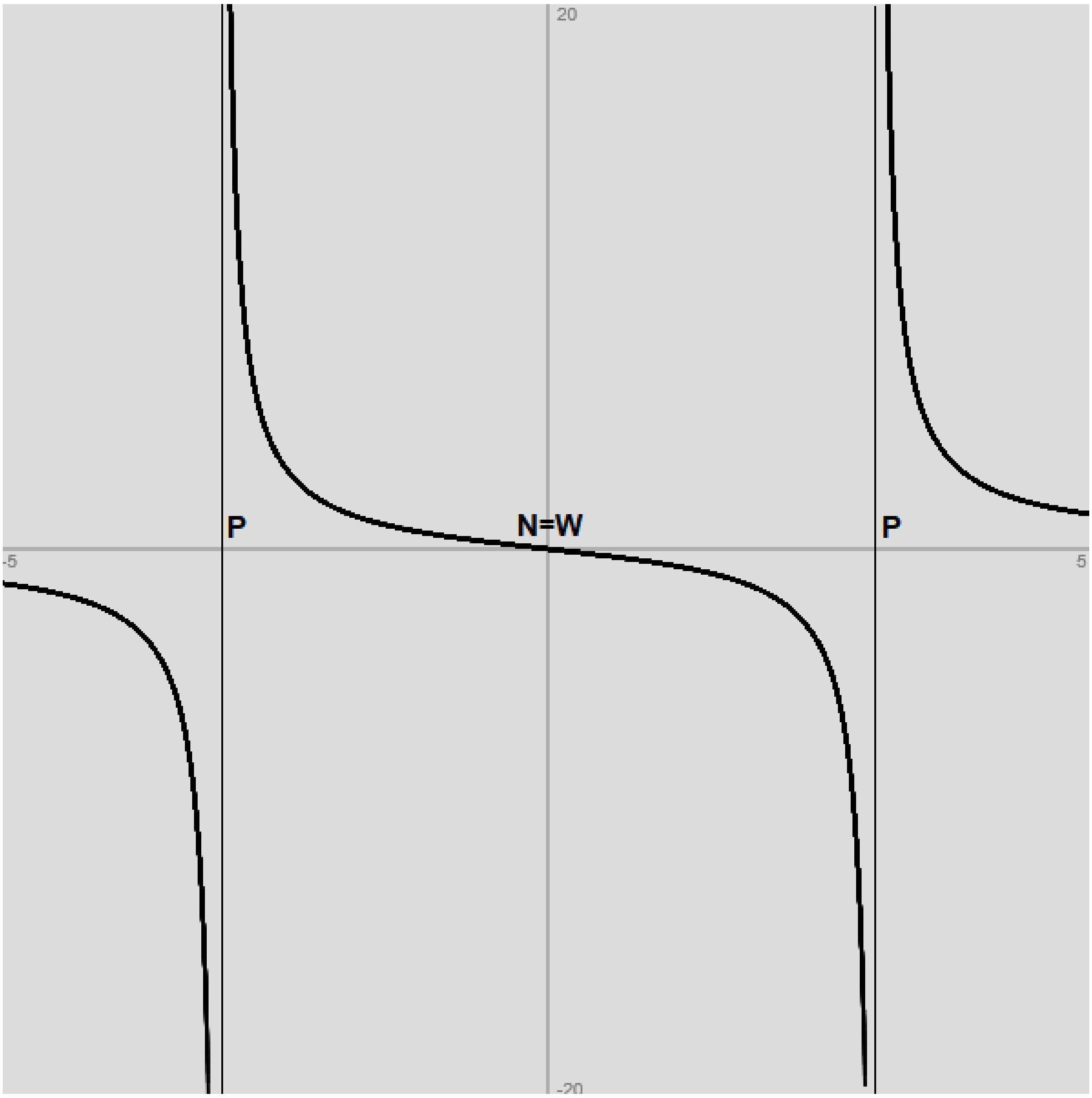
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.002	-1000.3332	-Infinity	-Infinity	Hochpunkt H(-3|-1000.33)
-3	-Infinity	499999.94	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
0	0	-0.44	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
3	Infinity	499999.94	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 3

Graph:



D_f = **R**\{-3; 3}

x = -3 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 3 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

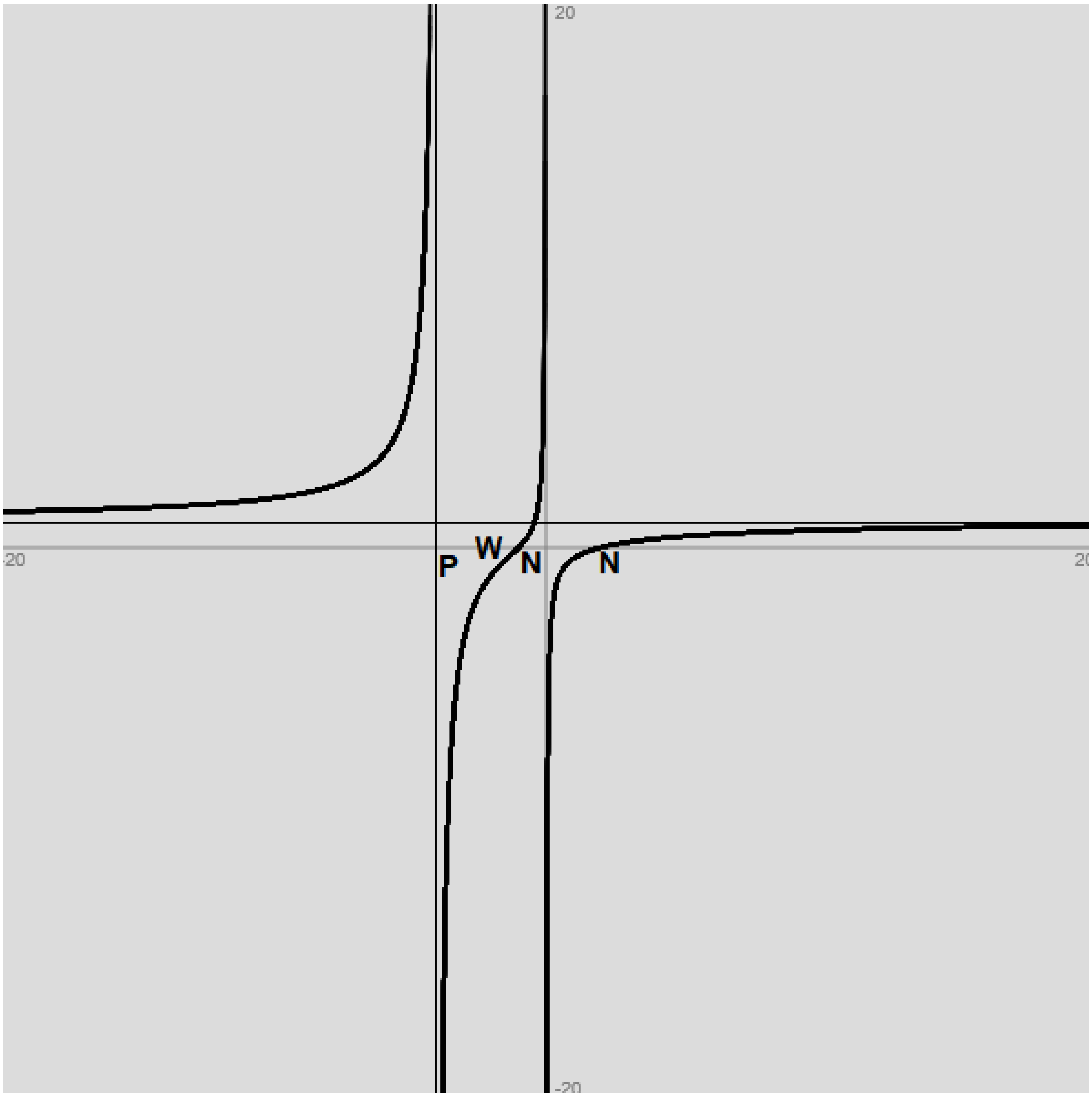
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
4	-Infinity	-179999.97	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -4
-1.3	-0.2821	0.91	0	Wendepunkt W(-1.3|-0.28)
-1	0	1	0.67	Nullstelle N(-1|0)
0	-Infinity	-19999.72	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	0	0.25	-0.17	Nullstelle N(2|0)

Graph:



D_f = **R**\{-4; 0}

x = -4 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 1; x->+∞ => f(x) -> 1 mit: y = 1 als waagerechter Asymptote

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{10}{x+2} - \frac{5}{(x-4)^2}$$

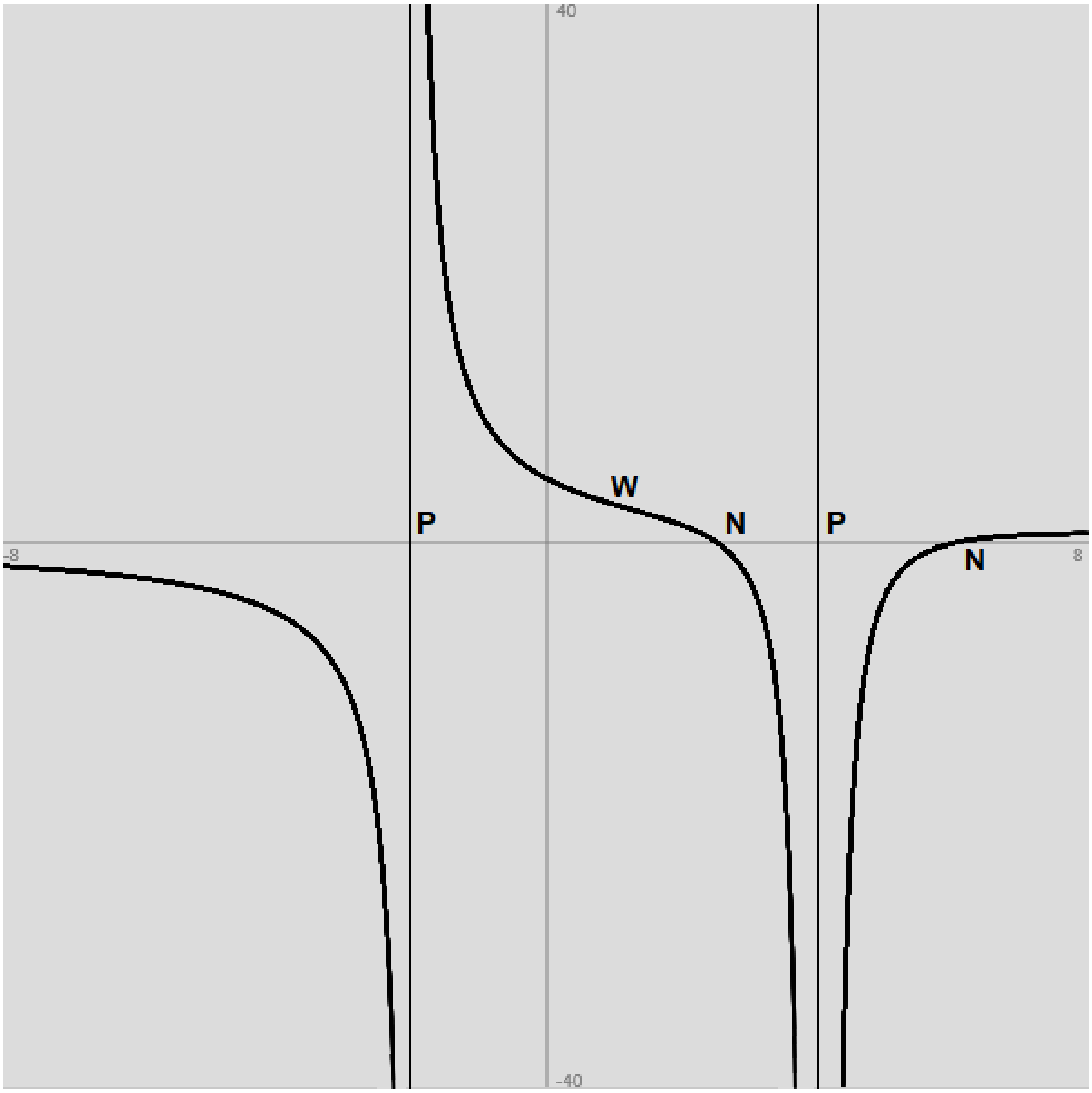
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	Infinity	399999.95	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
0	4.6875	-2.66	2.38	Schnittpunkt S_y(0|4.69)
1.29	2.3587	-1.43	0.01	Wendepunkt W(1.29|2.36)
2.5	0	-3.46	-5.71	Nullstelle N(2.5|0)
4	-Infinity	-0.28	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 4
6	0	1.09	-1.84	Nullstelle N(6|0)

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2; 4\}$
x = -2 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 4 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel
x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechte Asymptote

Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{x}{(x-2)^2}$$

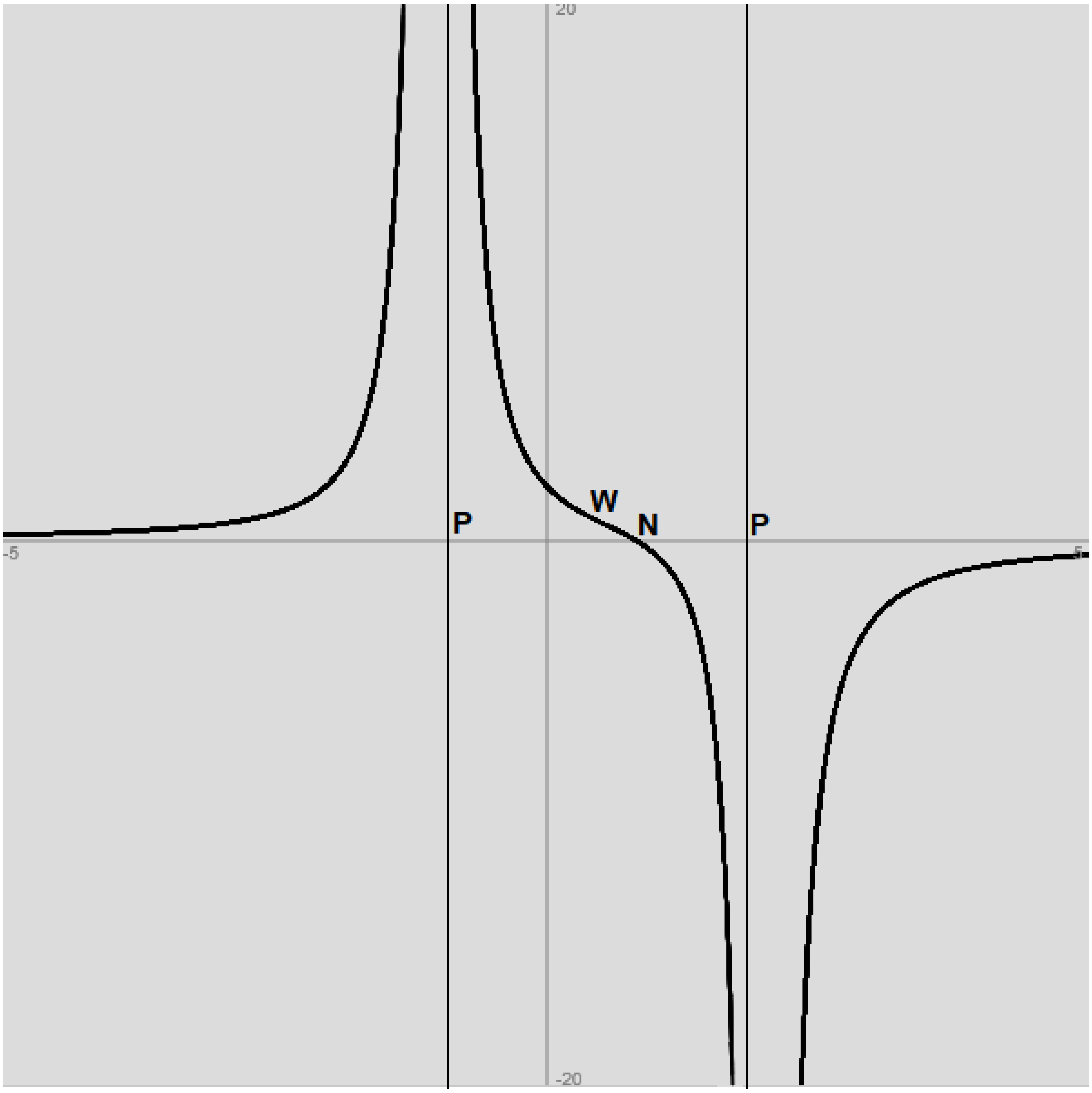
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3	-Infinity	-350000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
0	0	0	-2.22	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1	Infinity	30000.23	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1
2.47	1.6443	-0.7	0	Wendepunkt W(2.47|1.64)
4	0	-1.9	-2	Nullstelle N(4|0)
6	Infinity	320000.08	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 6

Graph:



D_f = **R**\{-1; 2}

x = -1 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel, x = 2 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{5x^2(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-6)}$$

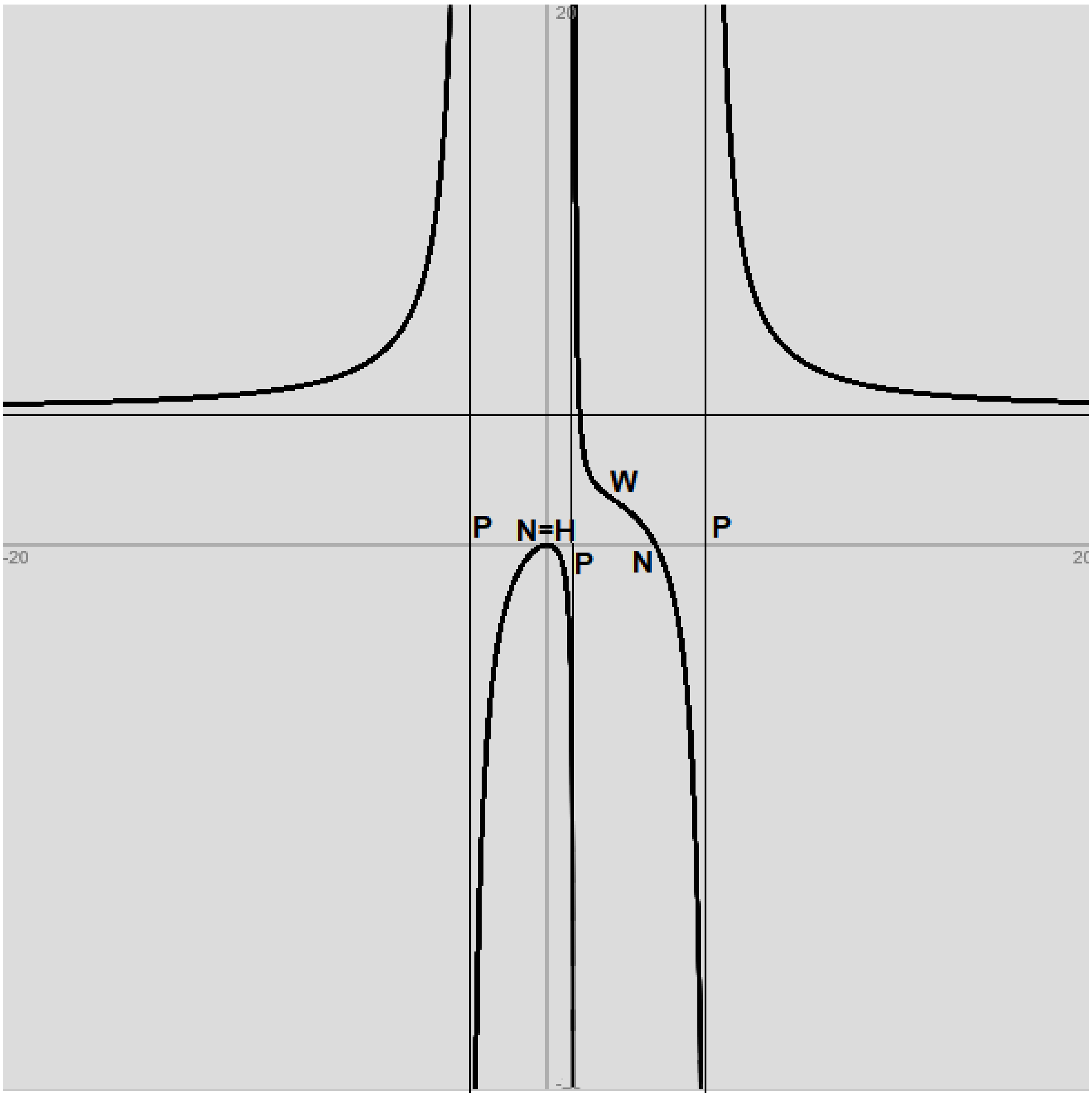
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1	Infinity	-0.04	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
0	2	-4.25	11.5	Schnittpunkt S_y(0|2)
0.55	0.5709	-1.91	0.02	Wendepunkt W(0.55|0.57)
0.825	0.0029	-2.4	-3.98	Nullstelle N(0.83|0)
2	-Infinity	-160000.15	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2

Graph:



D_f = **R**\{-3; 1; 6}
x = -3 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 1 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 6 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
x->-∞ => f(x) -> 5; x->+∞ => f(x) -> 5 mit: y = 5 als waagerechter Asymptote

Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$$

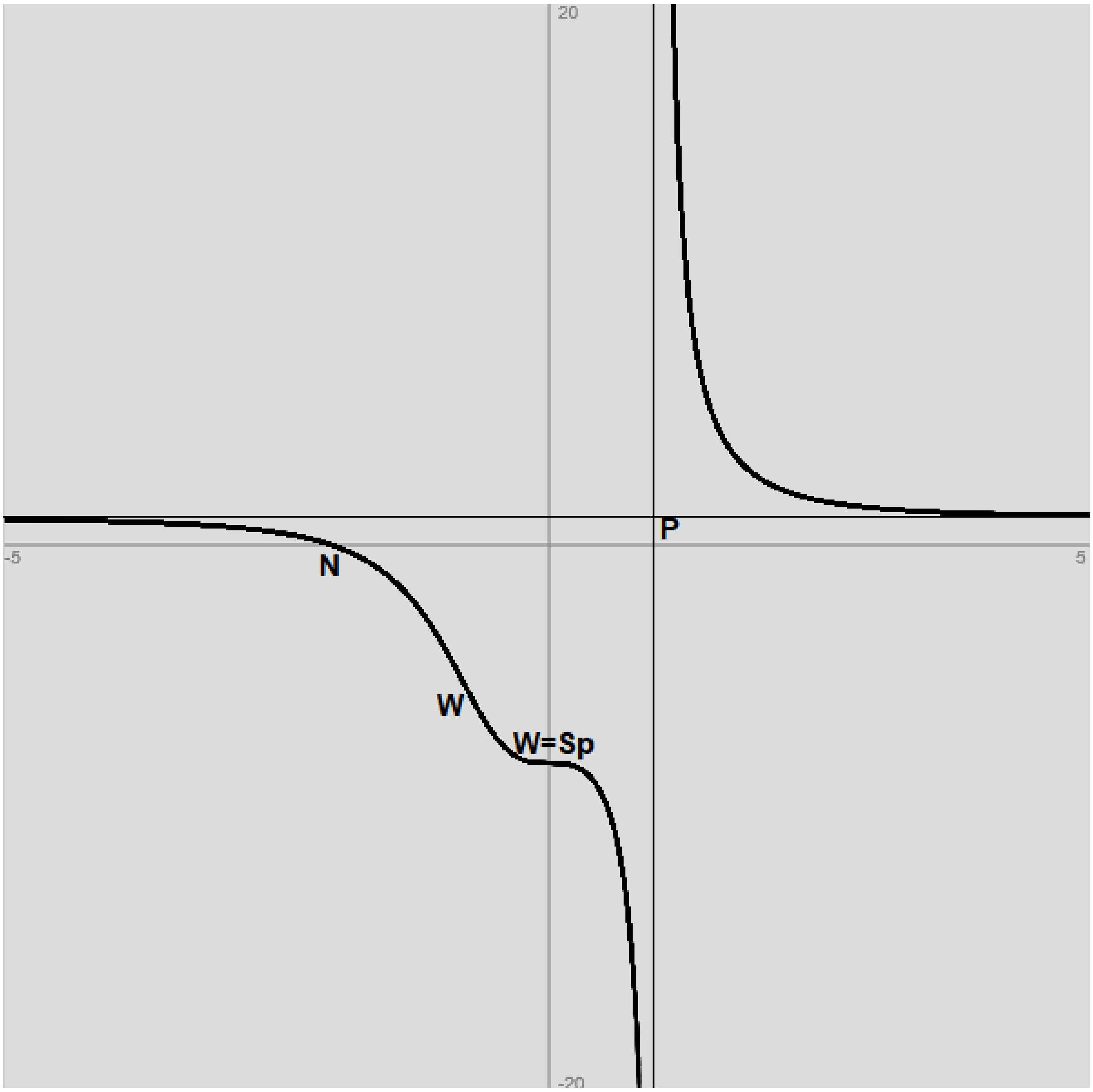
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie). **Lösung**:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-1.33	-2.22	Nullstelle N(-2|0)
-0.795	-4.9902	-7.56	-0.06	Wendepunkt W(-0.79|-4.99)
0	-8	0	0	Schnittpunkt S_y(0|-8) = Wendepunkt W(0|-8) = Sattelpunkt W_S(0|-8)
1	Infinity	480002	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1

Graph:



D_f = **R**\{1}

x = 1 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 1; x->+∞ => f(x) -> 1 mit: y = 1 als waagerechter Asymptote

Aufgabe 14: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 4x}$$

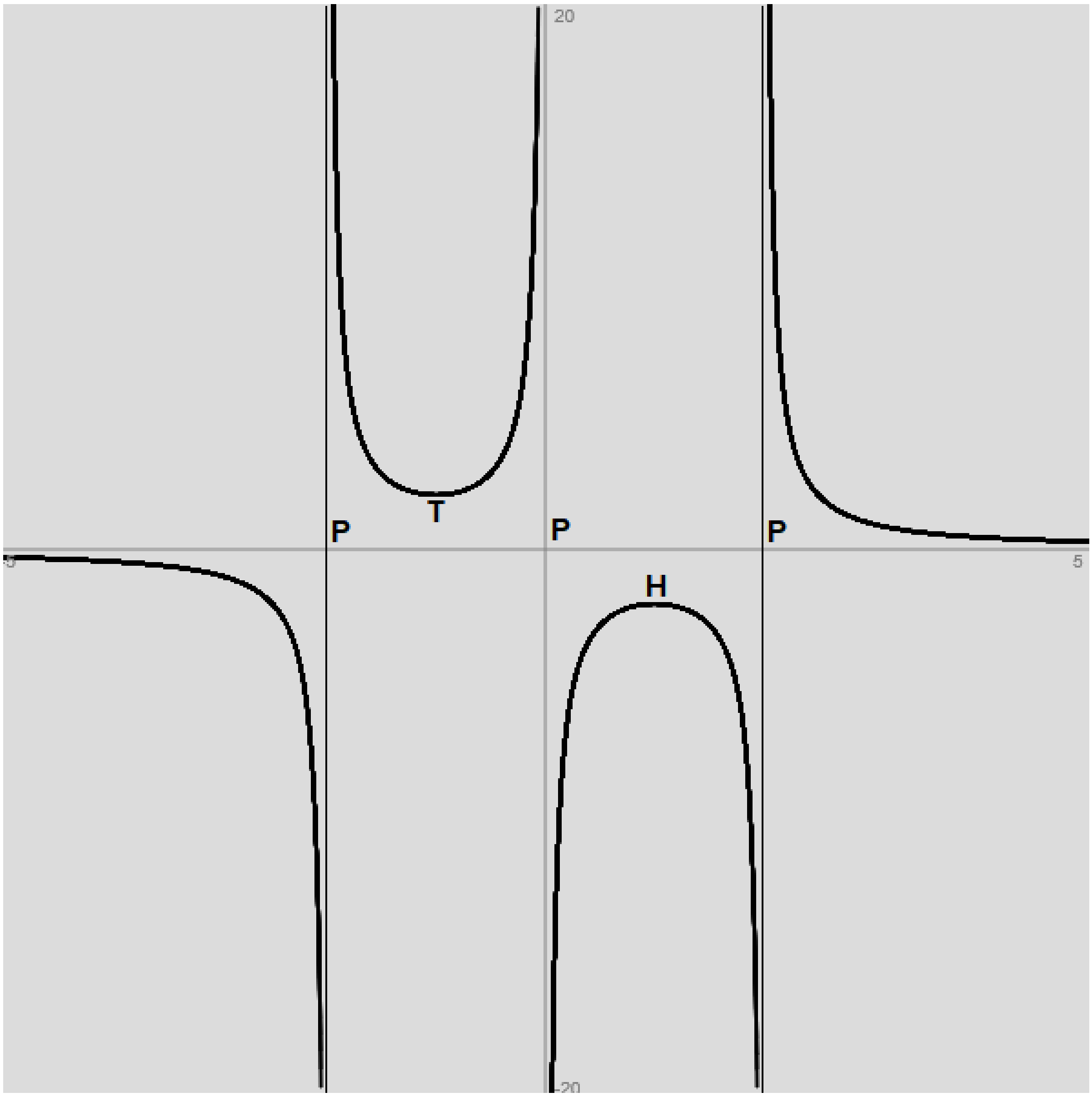
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
-1.002	2	-0.01	4.67	Tiefpunkt T(-1|2)
0	Infinity	-312500.56	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
1	-2	0	-4.67	Hochpunkt H(1|-2)
2	Infinity	281250.24	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2

Graph:



D_f = **R**\{-2; 0; 2}

x = -2 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel, x = 2 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote
Punktsymmetrie zum Ursprung O[0|0)

Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

$$f(x)=\frac{x^4}{x^5+32}$$

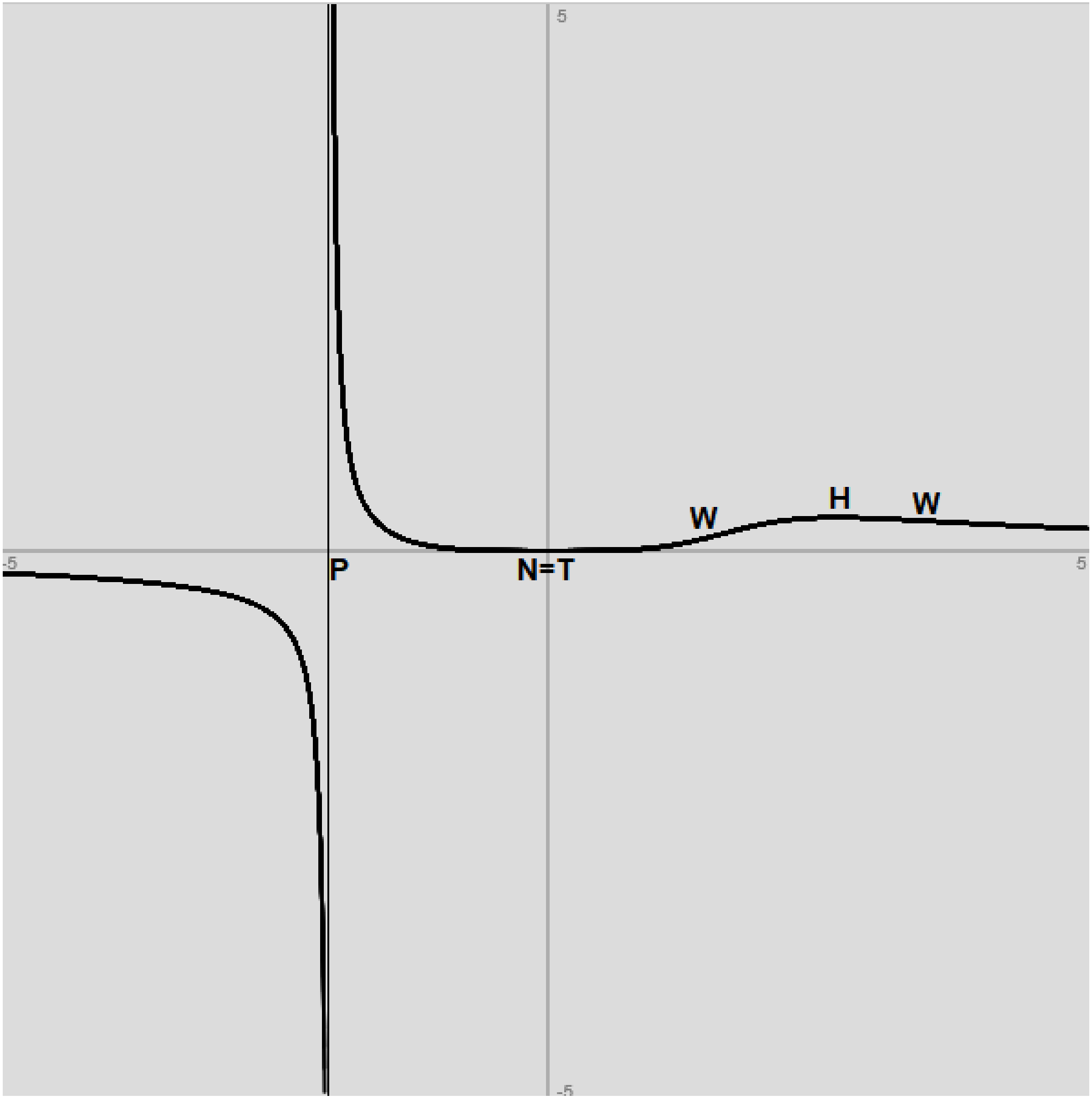
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> c mit y=c als waagerechter Asymptote; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	Infinity	50000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
1.61	0.1569	0.27	0	Wendepunkt W(1.61|0.16)
2.638	0.3031	0	-0.17	Hochpunkt H(2.64|0.3)
3.55	0.2666	-0.05	0	Wendepunkt W(3.55|0.27)

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$

x = -2 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->-∞ => f(x) -> 0; x->+∞ => f(x) -> 0 mit: y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote

www.michael-buhlmann.de / 08.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen / Aufgaben 436-450