Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen II

Einleitung: Eine gebrochen rationale Funktion (Polynom) f: D_f -> **R** (mit maximaler Definitionsbereich D_f) ist vom Typ: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}$ (für natürliche Zahlen m, n und reelle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$; $a_n, b_m \neq 0$). Gebrochen rationale Funktion sind Brüche von ganz rationalen Funktionen. Für die Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion f(x) folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion		
Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}=\frac{a_n (x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot ... \cdot R_2(x)}$		
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).		
II. Grenzkurve (Näherungspolynom), waagerechte, schiefe Asymptote y: Für x -> ±∞ gilt:		
$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}$	-> 0	falls n < m (waagerechte Asymptote)
	-> $\frac{a_n}{b_m}$	falls n = m (waagerechte Asymptote)
	-> $\frac{a_n}{b_m}x + c_0$	falls n = m+1 (schräge Asymptote)
	-> $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + ... + c_0$	falls n > m+1 (Grenzkurve)
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)		
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …		

V. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen):
a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \ldots$
b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2|f(x_2))$; …

Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:
$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0|f(x_0))$

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

– Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x<x_1$), $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x>x_1$), $f'(x_0)<0$);
– Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …
– Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$)

VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

– Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x<x_1$), $f''(x_0)>0$);
– Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_1$, $x>x_1$), x_2 als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_2$, $x<x_2$), $f'(x_0)>0$); …
– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_n$, $x>x_n$), $f'(x_0)>0$); …

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): $f(-x) = f(x)$ oder:

Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade
Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade

b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): $f(-x) = -f(x)$ oder:

Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade
Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade

c) f(x) achsensymmetrisch -> $f'(x)$ punktsymmetrisch -> $f''(x)$ achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> $f'(x)$ achsensymmetrisch -> $f''(x)$ punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

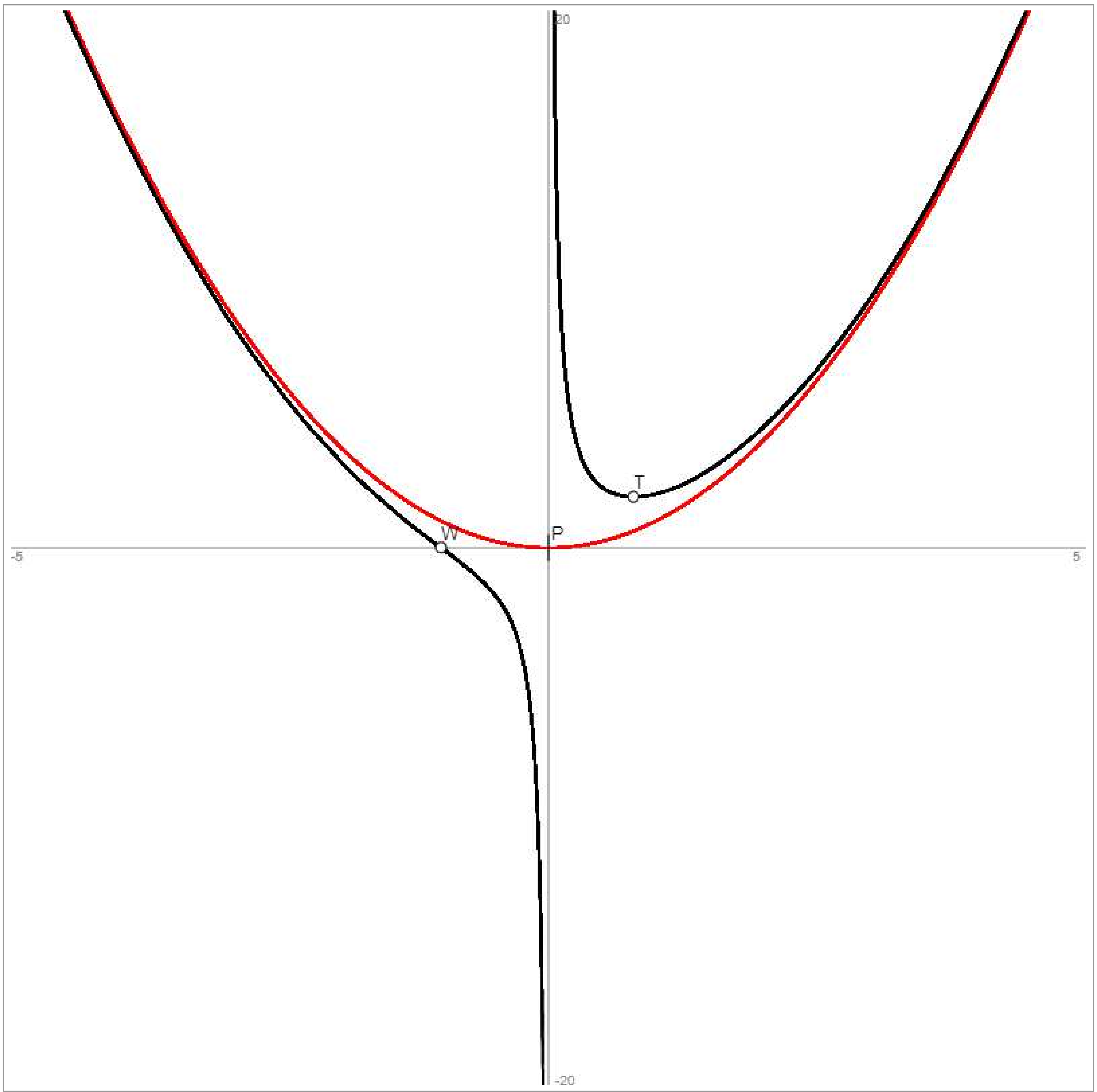
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	24.8	-10.04	1.98	
-4.5	20.0278	-9.05	1.98	
-4	15.75	-8.06	1.97	
-3.5	11.9643	-7.08	1.95	
-3	8.6667	-6.11	1.93	
-2.5	5.85	-5.16	1.87	
-2	3.5	-4.25	1.75	
-1.5	1.5833	-3.44	1.41	
-1	0	-3	0	Nullstelle N(-1|0) = Wendepunkt W(-1|0)
-1	0	-3	0	
-0.5	-1.75	-5	-14	
0	Infinity	250000	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	2.25	-3	18	
0.792	1.8899	0	6.03	Tiefpunkt T(0.79|1.89)
1	2	1	4	
1.5	2.9167	2.56	2.59	
2	4.5	3.75	2.25	
2.5	6.65	4.84	2.13	
3	9.3333	5.89	2.07	
3.5	12.5357	6.92	2.05	
4	16.25	7.94	2.03	
4.5	20.4722	8.95	2.02	
5	25.2	9.96	2.02	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

$x = 0$ als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to x^2$ mit: $y = x^2$ als Grenzkurve (Näherungspolynom)

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

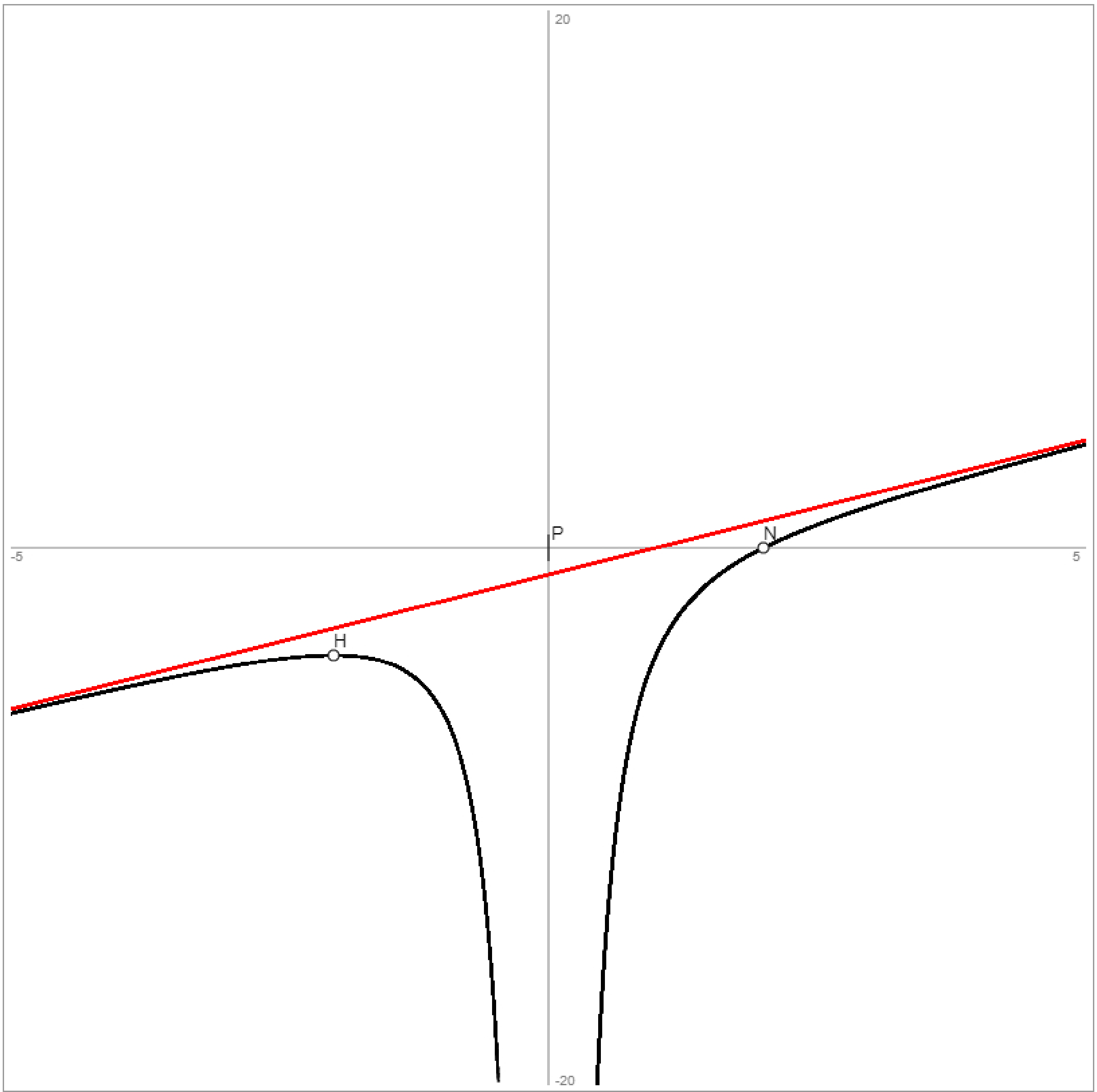
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2} = x - 1 - \frac{4}{x^2}$.

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-6.16	0.94	-0.04	
-4.5	-5.6975	0.91	-0.06	
-4	-5.25	0.87	-0.09	
-3.5	-4.8265	0.81	-0.16	
-3	-4.4444	0.7	-0.3	
-2.5	-4.14	0.49	-0.61	
-2	-4	0	-1.49	Hochpunkt H(-2|-4)
-2	-4	0	-1.5	
-1.5	-4.2778	-1.37	-4.74	
-1	-6	-7	-24	
-0.5	-17.5	-63	-384.01	
0	-Infinity	Infinity	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-16.5	65	-384.01	
1	-4	9	-24	
1.5	-1.2778	3.37	-4.74	
2	0	2	-1.5	Nullstelle N(2|0)
2.5	0.86	1.51	-0.61	
3	1.5556	1.3	-0.3	
3.5	2.1735	1.19	-0.16	
4	2.75	1.13	-0.09	
4.5	3.3025	1.09	-0.06	
5	3.84	1.06	-0.04	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x-1 mit: y = x-1 als Grenzkurve (Näherungspolynom, schräge Asymptote)

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

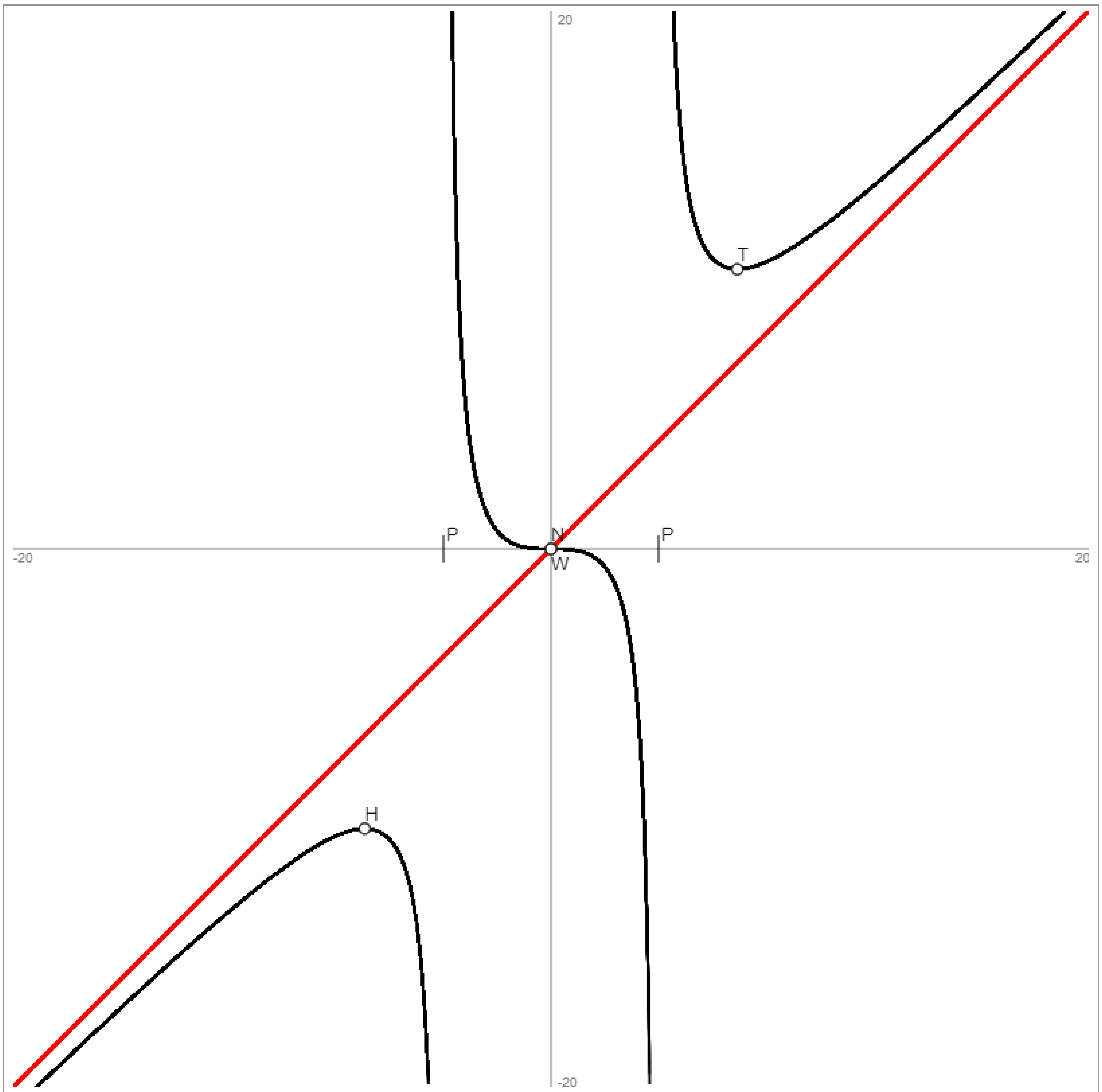
Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-20	-20.8333	0.95	-0.01	
-19	-19.8812	0.95	-0.01	
-18	-18.9351	0.94	-0.01	
-17	-17.9963	0.93	-0.01	
-16	-17.0667	0.92	-0.01	
-15	-16.1483	0.91	-0.01	
-14	-15.2444	0.9	-0.02	
-13	-14.3595	0.87	-0.03	
-12	-13.5	0.84	-0.04	
-11	-12.6762	0.8	-0.05	
-10	-11.9048	0.74	-0.08	
-9	-11.2154	0.63	-0.14	
-8	-10.6667	0.44	-0.26	
-7	-10.3939	0.04	-0.6	
-6.93	-10.3923	0	-0.65	Hochpunkt H(-6.93|-10.39)
-6	-10.8	-1.08	-2.02	
-5	-13.8889	-7.1	-16.02	
-4	-Infinity	320000.87	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -4
-3	3.8571	-7.16	15.95	
-2	0.6667	-1.22	1.93	
-1	0.0667	-0.21	0.46	
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelppunkt W_S(0|0)
1	-0.0667	-0.21	-0.46	
2	-0.6667	-1.22	-1.93	
3	-3.8571	-7.16	-15.95	
4	Infinity	320000.87	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 4
5	13.8889	-7.1	16.02	
6	10.8	-1.08	2.02	
6.93	10.3923	0	0.65	Tiefpunkt T(6.93|10.39)
7	10.3939	0.04	0.6	
8	10.6667	0.44	0.26	
9	11.2154	0.63	0.14	

10	11.9048	0.74	0.08	
11	12.6762	0.8	0.05	
12	13.5	0.84	0.04	
13	14.3595	0.87	0.03	
14	15.2444	0.9	0.02	
15	16.1483	0.91	0.01	
16	17.0667	0.92	0.01	
17	17.9963	0.93	0.01	
18	18.9351	0.94	0.01	
19	19.8812	0.95	0.01	
20	20.8333	0.95	0.01	

Graph:



D_f = **R**\{-4; 4}

x = -4, x = 4 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x mit: y = x als Grenzkurve (Näherungspolynom, schräge Asymptote)

Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0) des Koordinatensystems

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x-1}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

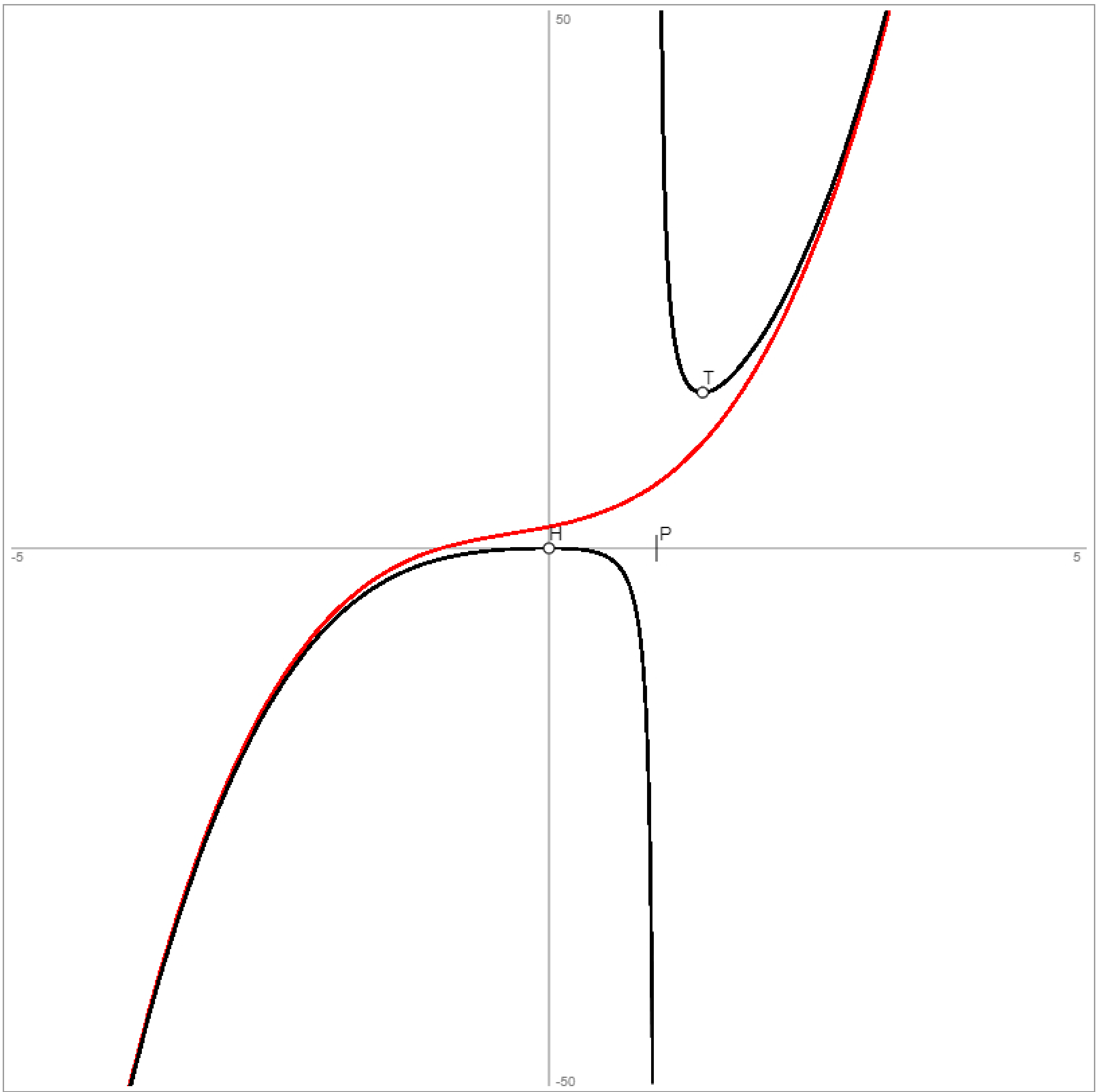
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x-1} = x^3 + x^2 + 2x + 2$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-108.3333	66.94	-28.02	
-4.5	-78.2386	53.68	-25.02	
-4	-54.4	41.92	-22.03	
-3.5	-36.0694	31.65	-19.04	
-3	-22.5	22.88	-16.06	
-2.5	-12.9464	15.59	-13.09	
-2	-6.6667	9.78	-10.15	
-1.5	-2.925	5.43	-7.26	
-1	-1	2.5	-4.5	
-0.5	-0.2083	0.86	-2.19	
0	0	0	-2	Schnittpunkt $S_y(0\|0)$ = Hochpunkt H(0|0)
0.5	-0.625	-4.25	-27	
1	Infinity	2000007	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1
1.427	14.48	-0.01	61.94	Tiefpunkt T(1.43|14.48)
1.5	14.625	3.75	43	
2	20	16	18	
2.5	30.2083	24.86	18.19	
3	45	34.5	20.5	
3.5	64.925	45.43	23.26	
4	90.6667	57.78	26.15	
4.5	122.9464	71.59	29.09	
5	162.5	86.88	32.06	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$
x = 1 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel
$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to x^3+x^2+2x+2$ mit: $y = x^3+x^2+2x+2$ als Grenzkurve (Näherungspolynom)

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 + 1}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

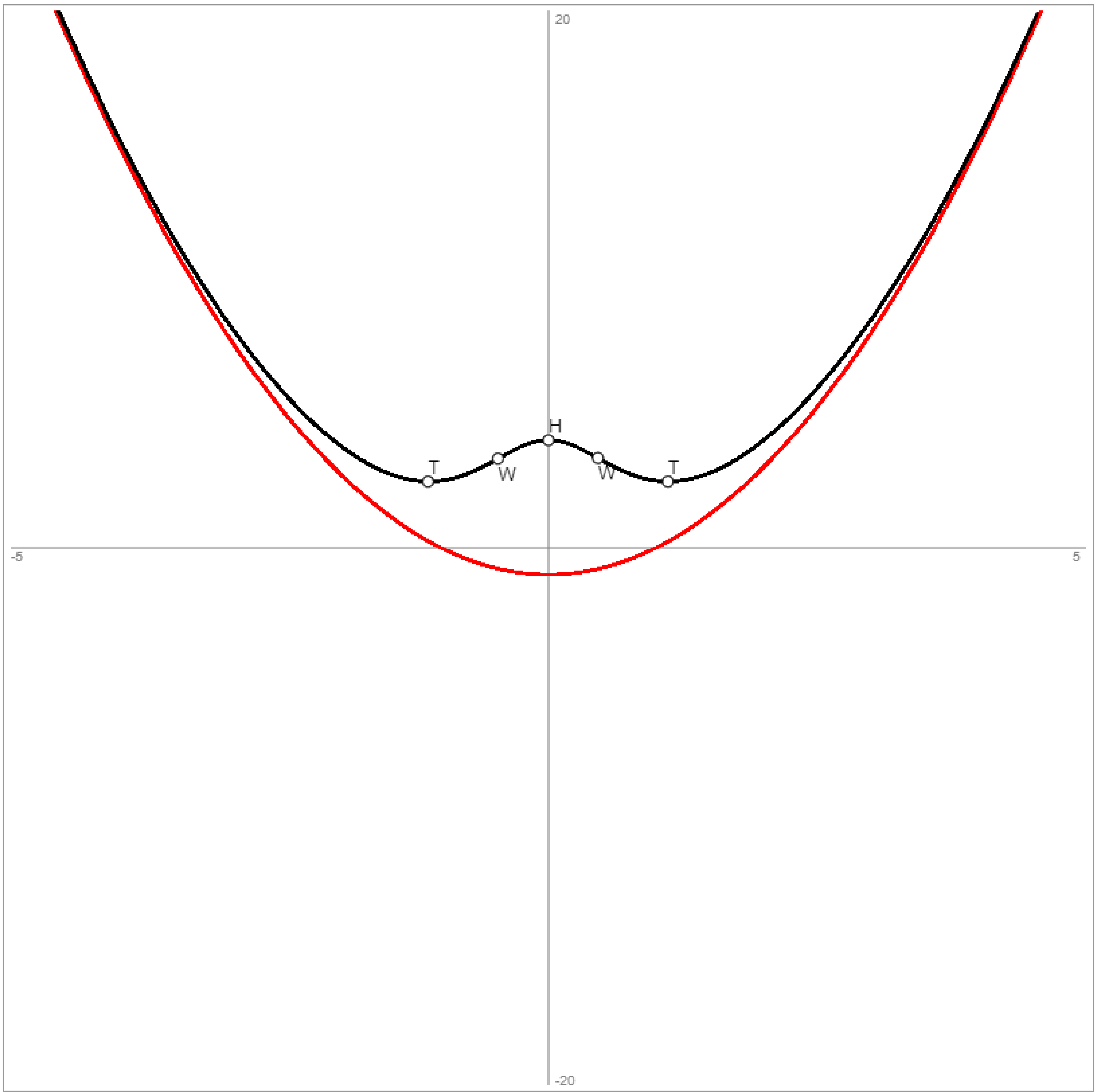
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{5}{x^2 - 1}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	24.1923	-9.93	2.04	
-4.5	19.4853	-8.9	2.06	
-4	15.2941	-7.86	2.1	
-3.5	11.6274	-6.8	2.15	
-3	8.5	-5.7	2.26	
-2.5	5.9397	-4.52	2.47	
-2	4	-3.2	2.88	
-1.5	2.7885	-1.58	3.68	
-1.12	2.4723	-0.04	4.41	Tiefpunkt T(-1.12|2.47)
-1	2.5	0.5	4.5	
-0.5	3.25	2.2	0.72	
-0.47	3.3162	2.21	0.15	Wendepunkt W(-0.47|3.32)
0	4	0	-8	Schnittpunkt S_y(0|4) = Hochpunkt H(0|4)
0.46	3.3384	-2.21	-0.05	Wendepunkt W(0.46|3.34)
0.5	3.25	-2.2	0.72	
1	2.5	-0.5	4.5	
1.11	2.4721	-0.01	4.42	Tiefpunkt T(1.11|2.47)
1.5	2.7885	1.58	3.68	
2	4	3.2	2.88	
2.5	5.9397	4.52	2.47	
3	8.5	5.7	2.26	
3.5	11.6274	6.8	2.15	
4	15.2941	7.86	2.1	
4.5	19.4853	8.9	2.06	
5	24.1923	9.93	2.04	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}$

x->±∞ => f(x) -> x^2-1 mit: y = x^2-1 als Grenzkurve (Näherungspolynom)

Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2(x+4)}{(x-2)(x+1)}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

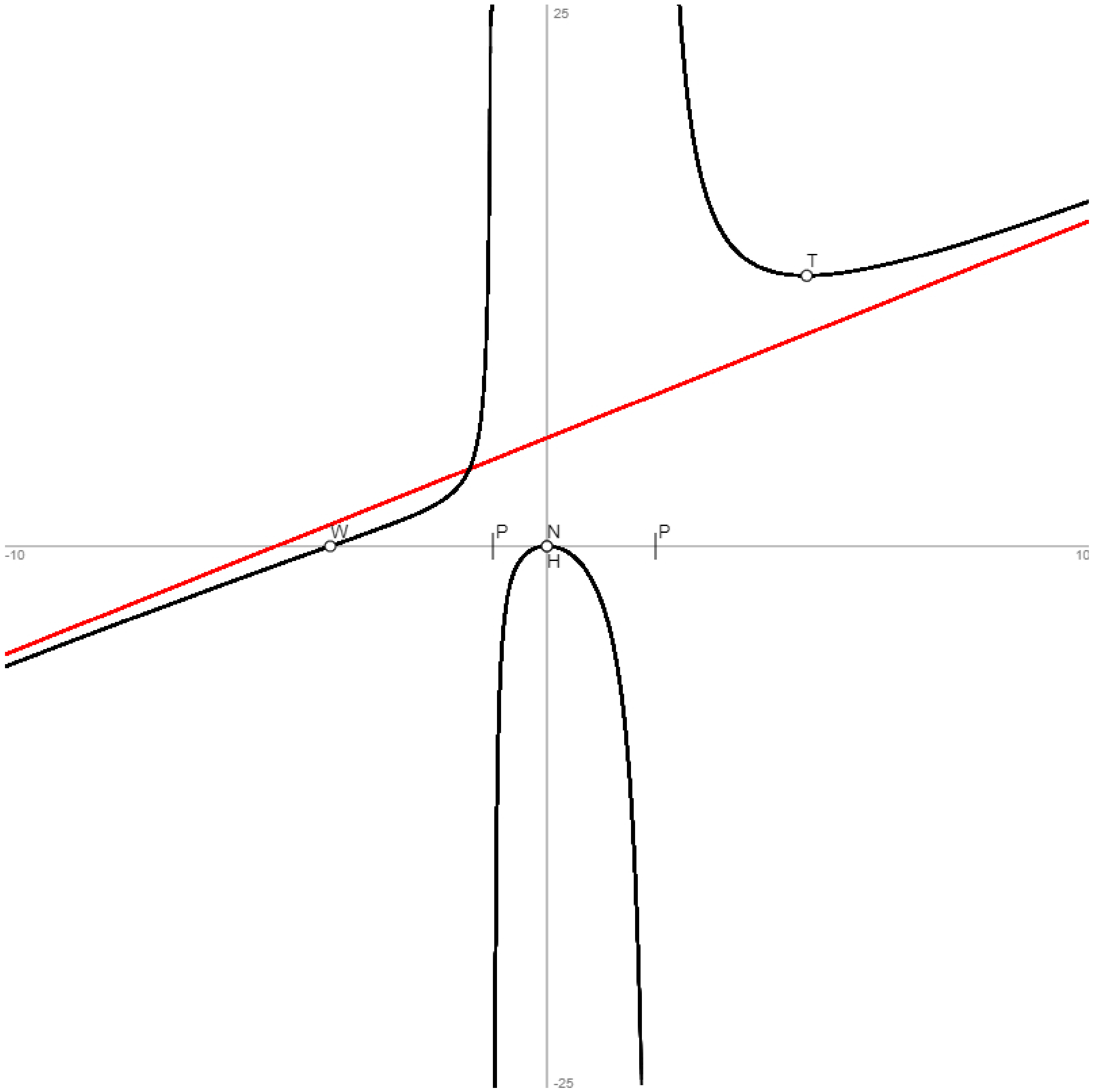
Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^2(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x^3+4x^2}{x^2-x-2} = x+5+\frac{7x+10}{x^2-x-2}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	-5.5556	0.96	-0.01	
-9.5	-5.078	0.95	-0.01	
-9	-4.6023	0.95	-0.01	
-8.5	-4.1286	0.95	-0.01	
-8	-3.6571	0.94	-0.01	
-7.5	-3.1883	0.94	-0.01	
-7	-2.7222	0.93	-0.01	
-6.5	-2.2594	0.92	-0.01	
-6	-1.8	0.91	-0.02	
-5.5	-1.3444	0.91	-0.02	
-5	-0.8929	0.9	-0.02	
-4.5	-0.4451	0.89	-0.01	
-4.002	-0.0018	0.89	0	Wendepunkt W(-4|0)
-4	0	0.89	0	
-3.5	0.4455	0.9	0.03	
-3	0.9	0.93	0.12	
-2.5	1.3889	1.05	0.42	
-2	2	1.5	1.75	
-1.5	3.2143	4.35	15.63	
-1	-Infinity	-249999.89	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
-0.5	-0.7	3.72	-17.02	
0	0	0	-4	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
0.5	-0.5	-2.11	-5.33	
1	-2.5	-6.75	-16.25	
1.5	-9.9	-30.84	-128.13	
2	Infinity	2000001.11	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2
2.5	23.2143	-30.92	127.96	
3	15.75	-6.94	15.97	
3.5	13.6111	-2.51	4.72	
4	12.8	-0.96	1.98	
4.5	12.5182	-0.25	1.01	
4.786	12.4847	0	0.73	Tiefpunkt T(4.79|12.48)

5	12.5	0.14	0.58	
5.5	12.6319	0.37	0.37	
6	12.8571	0.52	0.24	
6.5	13.1444	0.62	0.17	
7	13.475	0.7	0.12	
7.5	13.8369	0.75	0.09	
8	14.2222	0.79	0.07	
8.5	14.6255	0.82	0.06	
9	15.0429	0.85	0.04	
9.5	15.4714	0.87	0.04	
10	15.9091	0.88	0.03	

Graph:



D_f = **R**\{-1; 2}

x = -1, x = 2 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x+5 mit: y = x+5 als Grenzkurve (schräge Asymptote)

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 3x + 0{,}5 + \frac{1}{2x} - \frac{4}{x^3}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

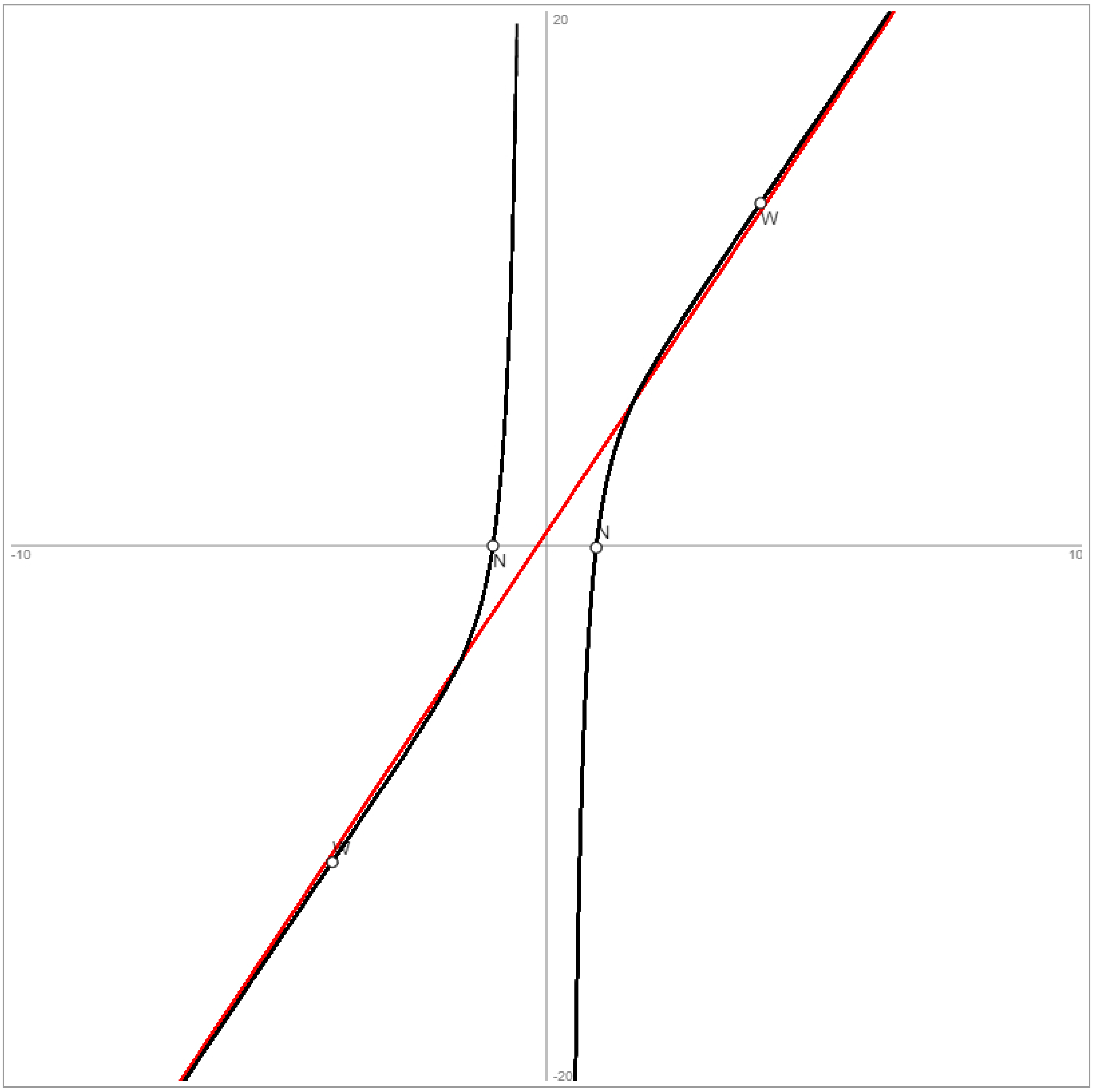
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	-29.646	2.99	0	
-9.5	-28.1532	2.98	0	
-9	-26.6612	2.98	0	
-8.5	-25.17	2.98	0	
-8	-23.6797	2.98	0	
-7.5	-22.1905	2.98	-0.01	
-7	-20.7026	2.97	-0.01	
-6.5	-19.2162	2.97	-0.01	
-6	-17.7315	2.97	-0.01	
-5.5	-16.2487	2.96	-0.01	
-5	-14.768	2.96	-0.01	
-4.5	-13.2894	2.96	-0.01	
-4	-11.8273	2.95	0	Wendepunkt W(-4|-11.83)
-4	-11.8125	2.95	0	
-3.5	-10.3353	2.96	0.02	
-3	-8.8519	2.98	0.09	
-2.5	-7.344	3.07	0.3	
-2	-5.75	3.38	1.13	
-1.5	-3.8148	4.7	5.43	
-1	0	13.5	45	Nullstelle N(-1|0)
-0.5	28	189.06	1512.38	
0	Infinity	- Infinity	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-27	189.06	-1512.38	
0.93	-0.07	17.31	-65.27	Nullstelle N(0.93|0)
1	1	13.5	-45	
1.5	4.8148	4.7	-5.43	
2	6.75	3.38	-1.13	
2.5	8.344	3.07	-0.3	
3	9.8519	2.98	-0.09	
3.5	11.3353	2.96	-0.02	
4	12.8125	2.95	0	Wendepunkt W(4|12.81)
4.5	14.2894	2.96	0.01	
5	15.768	2.96	0.01	
5.5	17.2487	2.96	0.01	

6	18.7315	2.97	0.01	
6.5	20.2162	2.97	0.01	
7	21.7026	2.97	0.01	
7.5	23.1905	2.98	0.01	
8	24.6797	2.98	0	
8.5	26.17	2.98	0	
9	27.6612	2.98	0	
9.5	29.1532	2.98	0	
10	30.646	2.99	0	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 3x+0,5 mit: y = 3x+0,5 als Grenzkurve (schräge Asymptote)

Punktsymmetrie zum Punkt Z(0|0,5)

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^5}{10(x^2-4)}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

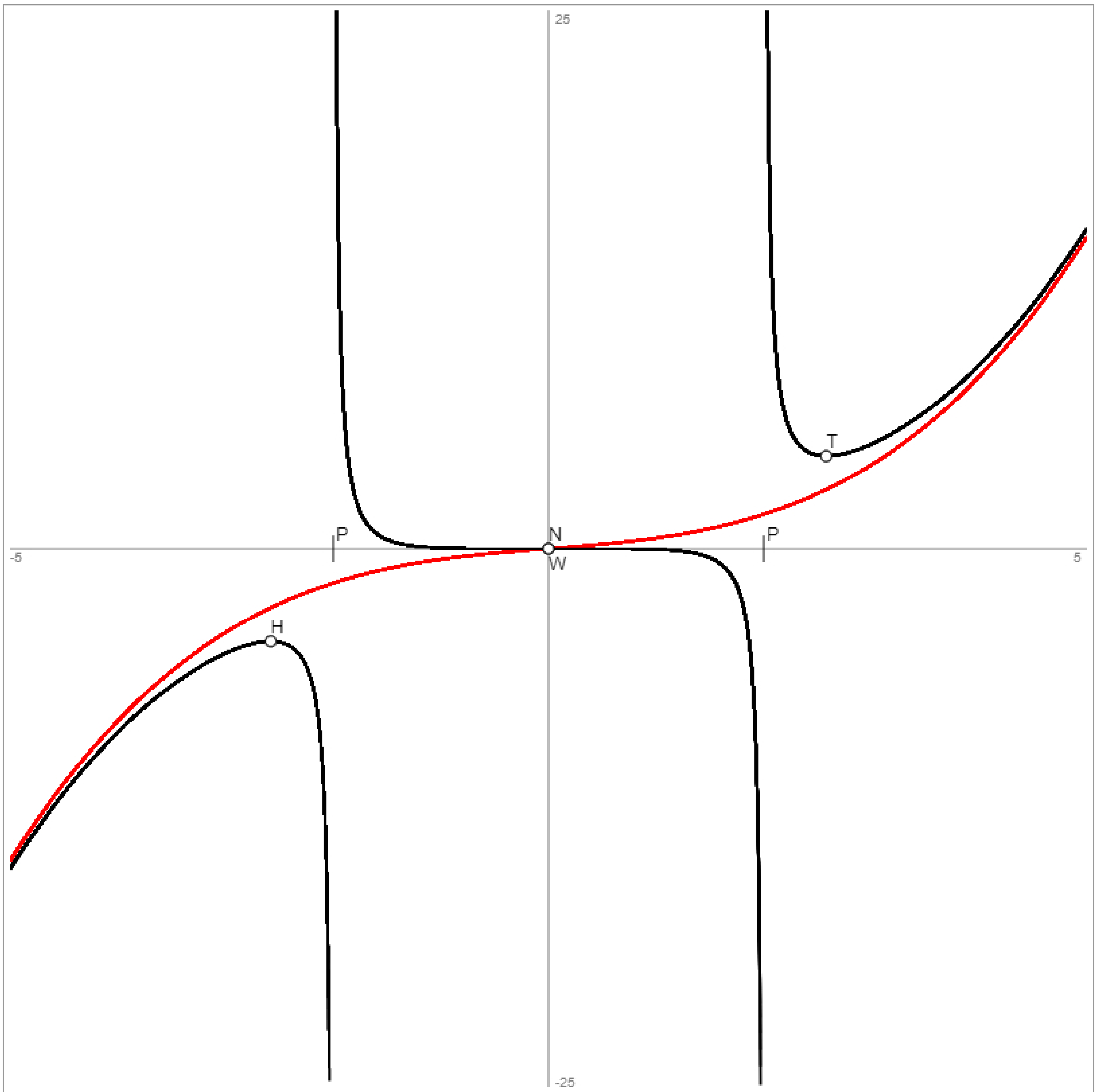
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^5}{10(x^2-4)} = \frac{1}{10}x^3 + \frac{2}{5}x + \frac{16x}{10(x^2-4)}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-14.881	7.79	-3.06	
-4.5	-11.3556	6.33	-2.81	
-4	-8.5333	4.98	-2.61	
-3.5	-6.3663	3.69	-2.58	
-3	-4.86	2.27	-3.41	
-2.582	-4.3033	0	-9.68	Hochpunkt H(-2.58|-4.3)
-2.5	-4.3403	-0.96	-14.32	
-2	-Infinity	800001.55	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
-1.5	0.4339	-2.19	11.86	
-1	0.0333	-0.19	0.94	
-0.5	0.0008	-0.01	0.07	
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
0.5	-0.0008	-0.01	-0.07	
1	-0.0333	-0.19	-0.94	
1.5	-0.4339	-2.19	-11.86	
2	Infinity	800001.55	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2
2.5	4.3403	-0.96	14.32	
2.581	4.3033	-0.01	9.72	Tiefpunkt T(2.58|4.3)
3	4.86	2.27	3.41	
3.5	6.3663	3.69	2.58	
4	8.5333	4.98	2.61	
4.5	11.3556	6.33	2.81	
5	14.881	7.79	3.06	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2; 2\}$
x = -2, x = 2 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel
x->±∞ => f(x) -> $x^3/10+2x/5$ mit: y = $x^3/10+2x/5$ als (punktsymmetrische) Grenzkurve (Näherungspolynom)
Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0) des Koordinatensystems

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{2x+5}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

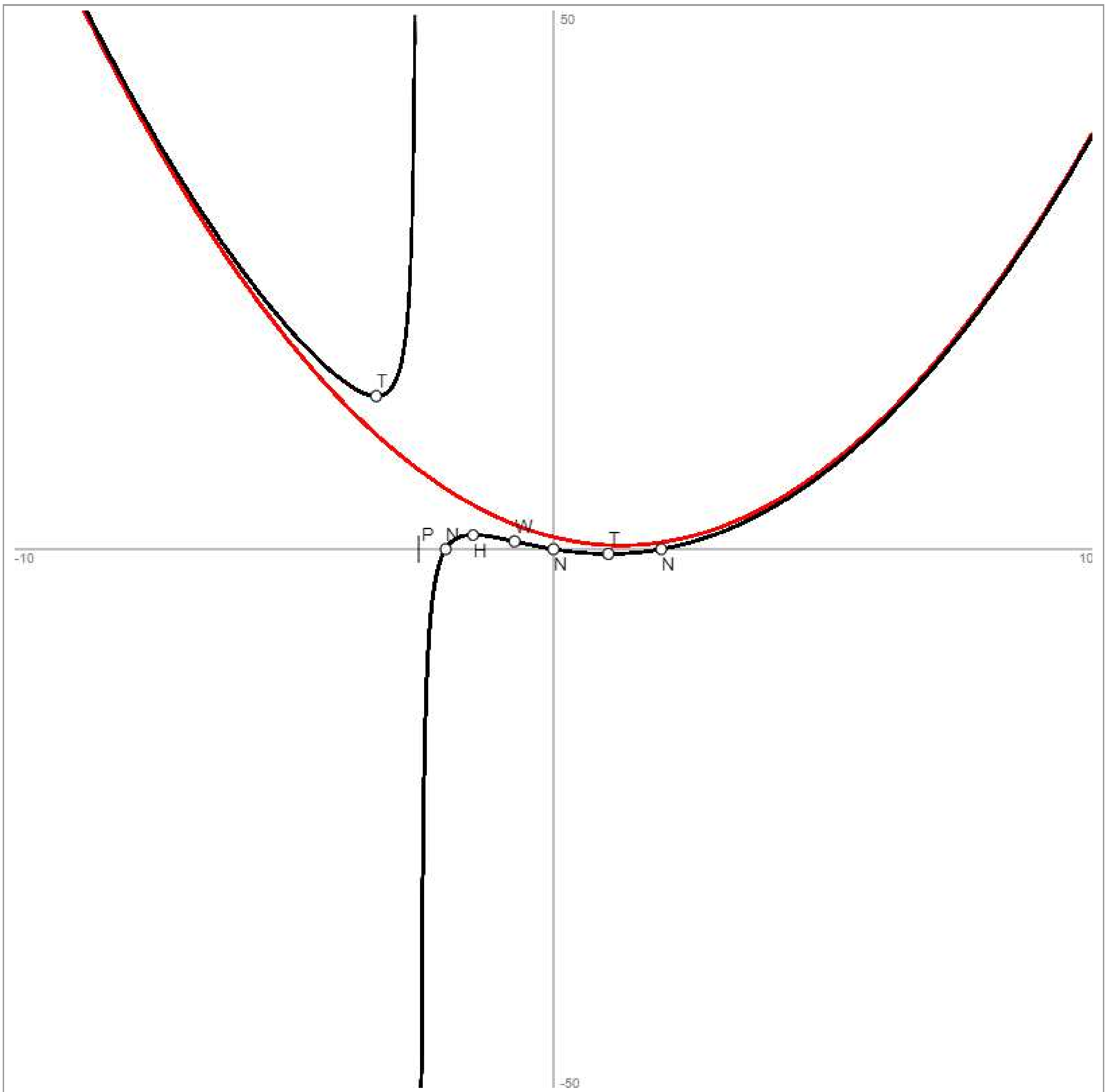
Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{2x+5} = 0{,}5x^2 - 1{,}25x + 1{,}125 - \frac{5{,}625}{2x+5}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	64	-11.2	1.01	
-9.5	58.5268	-10.69	1.02	
-9	53.3077	-10.18	1.02	
-8.5	48.3438	-9.67	1.03	
-8	43.6364	-9.16	1.03	
-7.5	39.1875	-8.64	1.05	
-7	35	-8.11	1.06	
-6.5	31.0781	-7.57	1.09	
-6	27.4286	-7.02	1.13	
-5.5	24.0625	-6.44	1.21	
-5	21	-5.8	1.36	
-4.5	18.2813	-5.05	1.7	
-4	16	-4	2.67	
-3.5	14.4375	-1.94	6.63	
-3.288	14.2096	-0.01	12.5	Tiefpunkt T(-3.29|14.21)
-3	15	7	46	
-2.5	-Infinity	-2812503.75	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2.5
-2	0	8	-44	Nullstelle N(-2|0)
-1.5	1.3125	0.06	-4.63	
-1.487	1.3129	0	-4.41	Hochpunkt H(-1.49|1.31)
-1	1	-1	-0.67	
-0.722	0.7063	-1.08	0	Wendepunkt W(-0.72|0.71)
-0.5	0.4688	-1.05	0.3	
0	0	-0.8	0.64	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	-0.3125	-0.44	0.79	
1	-0.4286	-0.02	0.87	
1.023	-0.4288	0	0.87	Tiefpunkt T(1.02|-0.43)
1.5	-0.3281	0.43	0.91	
2	0	0.89	0.94	Nullstelle N(2|0)
2.5	0.5625	1.36	0.95	
3	1.3636	1.84	0.97	
3.5	2.4063	2.33	0.97	

4	3.6923	2.82	0.98	
4.5	5.2232	3.31	0.98	
5	7	3.8	0.99	
5.5	9.0234	4.29	0.99	
6	11.2941	4.79	0.99	
6.5	13.8125	5.28	0.99	
7	16.5789	5.78	0.99	
7.5	19.5938	6.28	0.99	
8	22.8571	6.78	1	
8.5	26.3693	7.27	1	
9	30.1304	7.77	1	
9.5	34.1406	8.27	1	
10	38.4	8.77	1	

Graph:



D_f = **R**\{-2,5}

x = -2,5 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> $0,5x^2-1,25x+1,125$ mit: $y = 0,5x^2-1,25x+1,125$ als Grenzkurve (Näherungspolynom)

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{x^2+2}{x-2}\right)^2$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

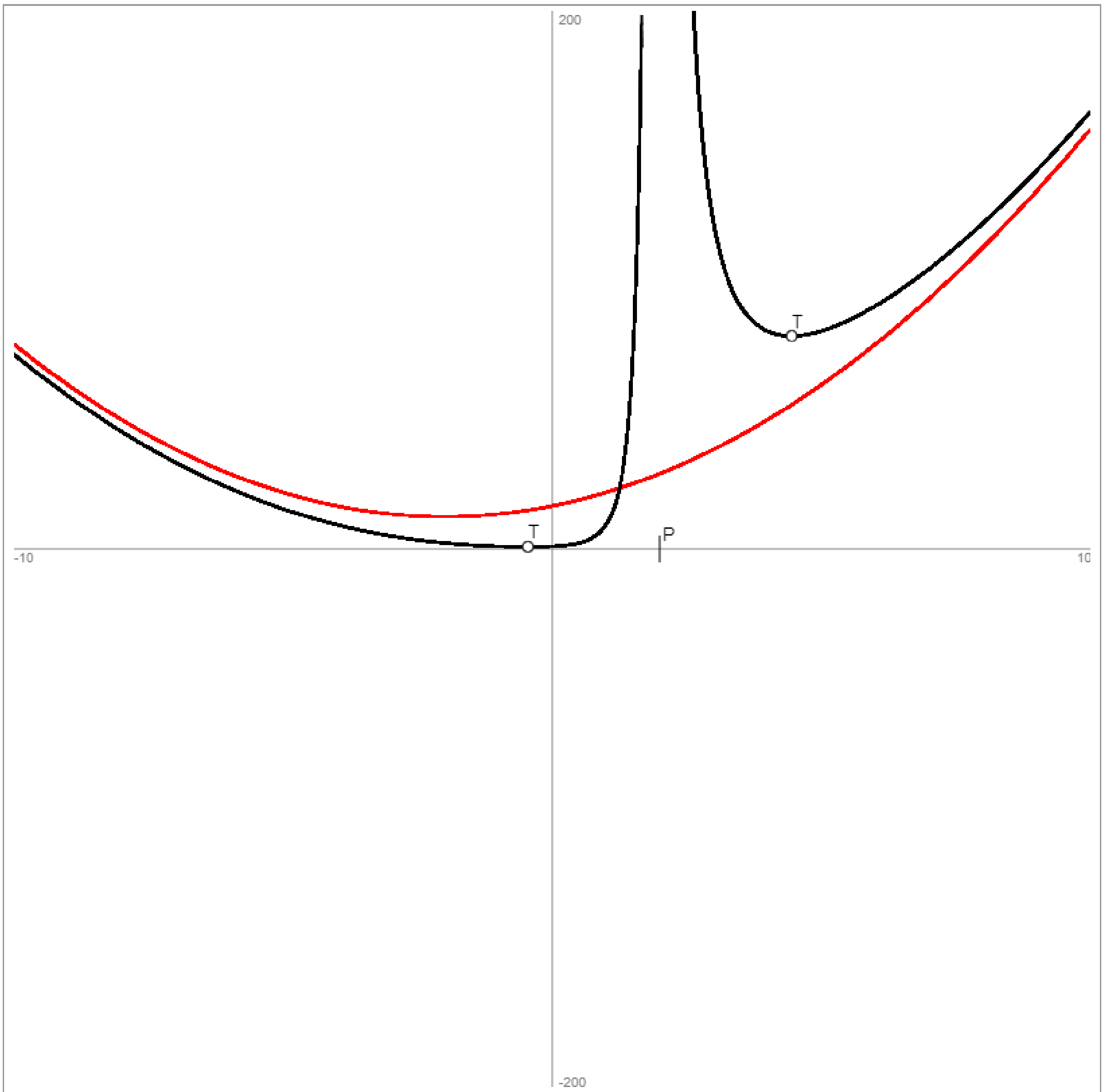
Lösung:

Es ist: $f(x) = \left(\frac{x^2+2}{x-2}\right)^2 = \frac{x^4+4x^2+4}{x^2-4x+4} = x^2+4x+16+\frac{48x-60}{(x-2)^2}$ (Polynomdivision mit Rest).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	72.25	-16.29	1.95	
-9.5	64.3483	-15.32	1.95	
-9	56.9339	-14.34	1.94	
-8.5	50.0051	-13.37	1.93	
-8	43.56	-12.41	1.93	
-7.5	37.5963	-11.45	1.91	
-7	32.1111	-10.49	1.9	
-6.5	27.1012	-9.55	1.89	
-6	22.5625	-8.61	1.87	
-5.5	18.49	-7.68	1.84	
-5	14.8776	-6.77	1.81	
-4.5	11.7175	-5.87	1.77	
-4	9	-5	1.72	
-3.5	6.7128	-4.15	1.66	
-3	4.84	-3.34	1.58	
-2.5	3.3611	-2.58	1.47	
-2	2.25	-1.88	1.34	
-1.5	1.4745	-1.24	1.2	
-1	1	-0.67	1.11	
-0.5	0.81	-0.07	1.39	
-0.45	0.8082	0	1.47	Tiefpunkt T(-0.45|0.81)
0	1	1	3.5	Schnittpunkt S_y(0|1)
0.5	2.25	5	16.22	
1	9	30	122	
1.5	72.25	391.02	2690.08	
2	Infinity	12000008	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2
2.5	272.25	-759.02	4226.1	
3	121	-110	314	
3.5	90.25	-31.67	73.11	
4	81	-9	27.5	
4.448	79.1919	-0.02	14.56	Tiefpunkt T(4.45|79.19)

4.5	79.21	0.71	13.67	
5	81	6	8.22	
5.5	84.9031	9.4	5.68	
6	90.25	11.87	4.34	
6.5	96.6944	13.84	3.58	
7	104.04	15.5	3.11	
7.5	112.1674	16.98	2.81	
8	121	18.33	2.61	
8.5	130.4867	19.6	2.47	
9	140.5918	20.81	2.37	
9.5	151.29	21.98	2.3	
10	162.5625	23.11	2.24	

Graph:



$D_f = \mathbf{R}\setminus\{2\}$

x = 2 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> $x^2+4x+16$ mit: y = $x^2+4x+16$ als Grenzkurve (Näherungspolynom)