Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen III

Einleitung: Eine gebrochen rationale Funktion (Polynom) f: D_f -> **R** (mit maximaler Definitionsbereich D_f) ist vom Typ: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ (für natürliche Zahlen m, n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n, b_0, …, b_m; a_n, $b_m \neq 0$). Gebrochen rationale Funktion sind Brüche von ganz rationalen Funktionen. Für die Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion f(x) folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2} \cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l} \cdot ... \cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert f*(x_P) vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Grenzkurve (Näherungspolynom), waagerechte, schiefe Asymptote y: Für x -> ±∞ gilt: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n < m \text{ (waagerechte Asymptote)} \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \text{ (waagerechte Asymptote)} \\ \to \frac{a_n}{b_m}x + c_0 & \text{falls } n = m+1 \text{ (schräge Asymptote)} \\ \to \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + ... + c_0 & \text{falls } n > m+1 \text{ (Grenzkurve)} \end{cases}$
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …

V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x<x_1), f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x>x_1), f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)>0)
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x<x_1), f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x<x_1), f''(x_0)>0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)>0); …
VIII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): f(-x) = f(x) oder: Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): f(-x) = -f(x) oder: Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{8}{(x+4)^2} + 6$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

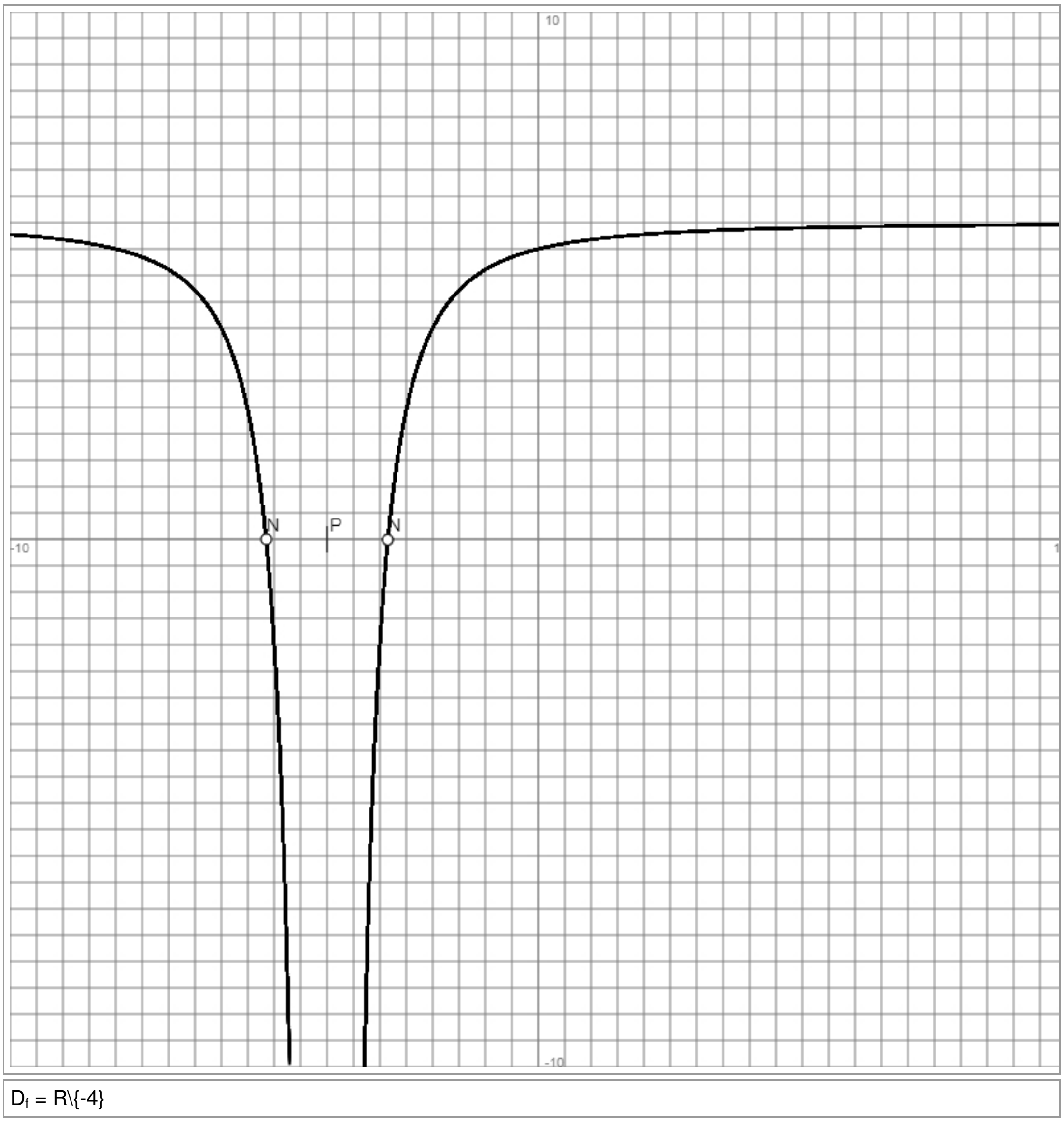
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	5.7778	-0.07	-0.04	
-9.5	5.7355	-0.1	-0.05	
-9	5.68	-0.13	-0.08	
-8.5	5.6049	-0.18	-0.12	
-8	5.5	-0.25	-0.19	
-7.5	5.3469	-0.37	-0.32	
-7	5.1111	-0.59	-0.59	
-6.5	4.72	-1.02	-1.23	
-6	4	-2	-3	
-5.5	2.4444	-4.74	-9.48	
-5.155	0.0031	-10.38	-26.97	Nullstelle N(-5.15|0)
-5	-2	-16	-48	
-4.5	-26	-128	-768.01	
-4	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -4
-3.5	-26	128	-768.01	
-3	-2	16	-48	
-2.846	-0.0073	10.41	-27.07	Nullstelle N(-2.85|-0.01)
-2.5	2.4444	4.74	-9.48	
-2	4	2	-3	
-1.5	4.72	1.02	-1.23	
-1	5.1111	0.59	-0.59	
-0.5	5.3469	0.37	-0.32	
0	5.5	0.25	-0.19	Schnittpunkt S_y(0|5.5)
0.5	5.6049	0.18	-0.12	
1	5.68	0.13	-0.08	
1.5	5.7355	0.1	-0.05	
2	5.7778	0.07	-0.04	
2.5	5.8107	0.06	-0.03	
3	5.8367	0.05	-0.02	
3.5	5.8578	0.04	-0.02	
4	5.875	0.03	-0.01	
4.5	5.8893	0.03	-0.01	
5	5.9012	0.02	-0.01	
5.5	5.9114	0.02	-0.01	
6	5.92	0.02	0	

6.5	5.9274	0.01	0	
7	5.9339	0.01	0	
7.5	5.9395	0.01	0	
8	5.9444	0.01	0	
8.5	5.9488	0.01	0	
9	5.9527	0.01	0	
9.5	5.9561	0.01	0	
10	5.9592	0.01	0	

Graph:



$D_f = R\backslash\{-4\}$

x = -4 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 6 als waagerechte Asymptote

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

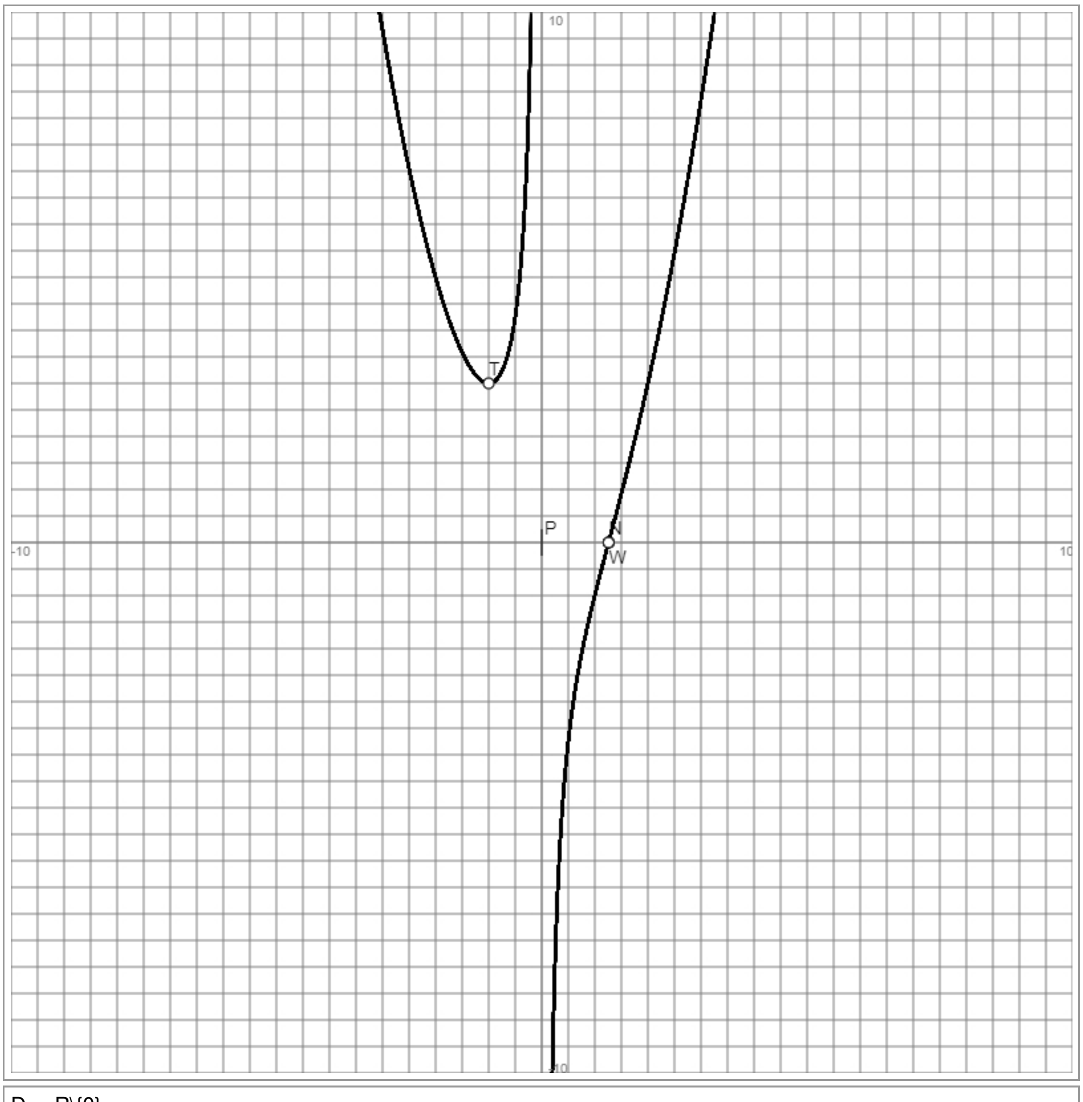
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	100.2	-19.98	2	
-9.5	90.4605	-18.98	2	
-9	81.2222	-17.98	2.01	
-8.5	72.4853	-16.97	2.01	
-8	64.25	-15.97	2.01	
-7.5	56.5167	-14.96	2.01	
-7	49.2857	-13.96	2.01	
-6.5	42.5577	-12.95	2.01	
-6	36.3333	-11.94	2.02	
-5.5	30.6136	-10.93	2.02	
-5	25.4	-9.92	2.03	
-4.5	20.6944	-8.9	2.04	
-4	16.5	-7.87	2.06	
-3.5	12.8214	-6.84	2.09	
-3	9.6667	-5.78	2.15	
-2.5	7.05	-4.68	2.26	
-2	5	-3.5	2.5	
-1.5	3.5833	-2.11	3.19	
-1.001	3	-0.01	5.99	Tiefpunkt T(-1|3)
-1	3	0	6	
-0.5	4.25	7	34	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-3.75	9	-30	
1	-1	4	-2	
1.259	-0.0035	3.78	0	Nullstelle N(1.26|0) = Wendepunkt W(1.26|0)
1.5	0.9167	3.89	0.81	
2	3	4.5	1.5	
2.5	5.45	5.32	1.74	
3	8.3333	6.22	1.85	
3.5	11.6786	7.16	1.91	
4	15.5	8.13	1.94	
4.5	19.8056	9.1	1.96	
5	24.6	10.08	1.97	
5.5	29.8864	11.07	1.98	
6	35.6667	12.06	1.98	

6.5	41.9423	13.05	1.99	
7	48.7143	14.04	1.99	
7.5	55.9833	15.04	1.99	
8	63.75	16.03	1.99	
8.5	72.0147	17.03	1.99	
9	80.7778	18.02	1.99	
9.5	90.0395	19.02	2	
10	99.8	20.02	2	

Graph:



D_f = R\{0}

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x^2 = y als Grenzkurve

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

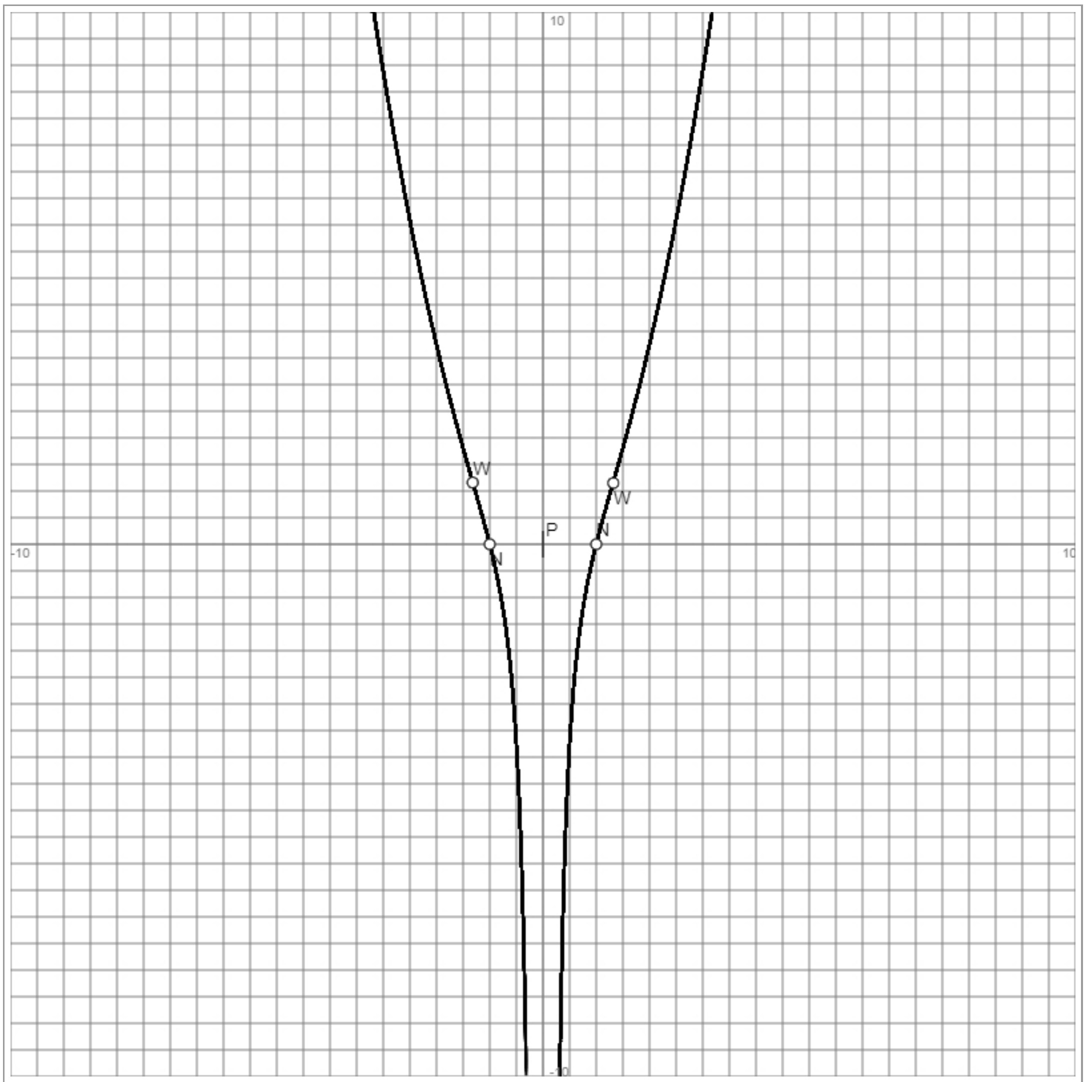
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	99.99	-20	2	
-9.5	90.2389	-19	2	
-9	80.9877	-18	2	
-8.5	72.2362	-17	2	
-8	63.9844	-16	2	
-7.5	56.2322	-15	2	
-7	48.9796	-14.01	2	
-6.5	42.2263	-13.01	2	
-6	35.9722	-12.01	2	
-5.5	30.2169	-11.01	1.99	
-5	24.96	-10.02	1.99	
-4.5	20.2006	-9.02	1.99	
-4	15.9375	-8.03	1.98	
-3.5	12.1684	-7.05	1.96	
-3	8.8889	-6.07	1.93	
-2.5	6.09	-5.13	1.85	
-2	3.75	-4.25	1.62	
-1.5	1.8056	-3.59	0.81	
-1.317	1.158	-3.51	0.01	Wendepunkt W(-1.32|1.16)
-1	0	-4	-4	Nullstelle N(-1|0)
-0.5	-3.75	-17	-94	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-3.75	17	-94	
1	0	4	-4	Nullstelle N(1|0)
1.316	1.1544	3.51	0	Wendepunkt W(1.32|1.15)
1.5	1.8056	3.59	0.81	
2	3.75	4.25	1.62	
2.5	6.09	5.13	1.85	
3	8.8889	6.07	1.93	
3.5	12.1684	7.05	1.96	
4	15.9375	8.03	1.98	
4.5	20.2006	9.02	1.99	
5	24.96	10.02	1.99	
5.5	30.2169	11.01	1.99	

6	35.9722	12.01	2	
6.5	42.2263	13.01	2	
7	48.9796	14.01	2	
7.5	56.2322	15	2	
8	63.9844	16	2	
8.5	72.2362	17	2	
9	80.9877	18	2	
9.5	90.2389	19	2	
10	99.99	20	2	

Graph:



$D_f = R\backslash\{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x^2 = y als Grenzkurve

f(-x) = f(x) -> y-Achsensymmetrie

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

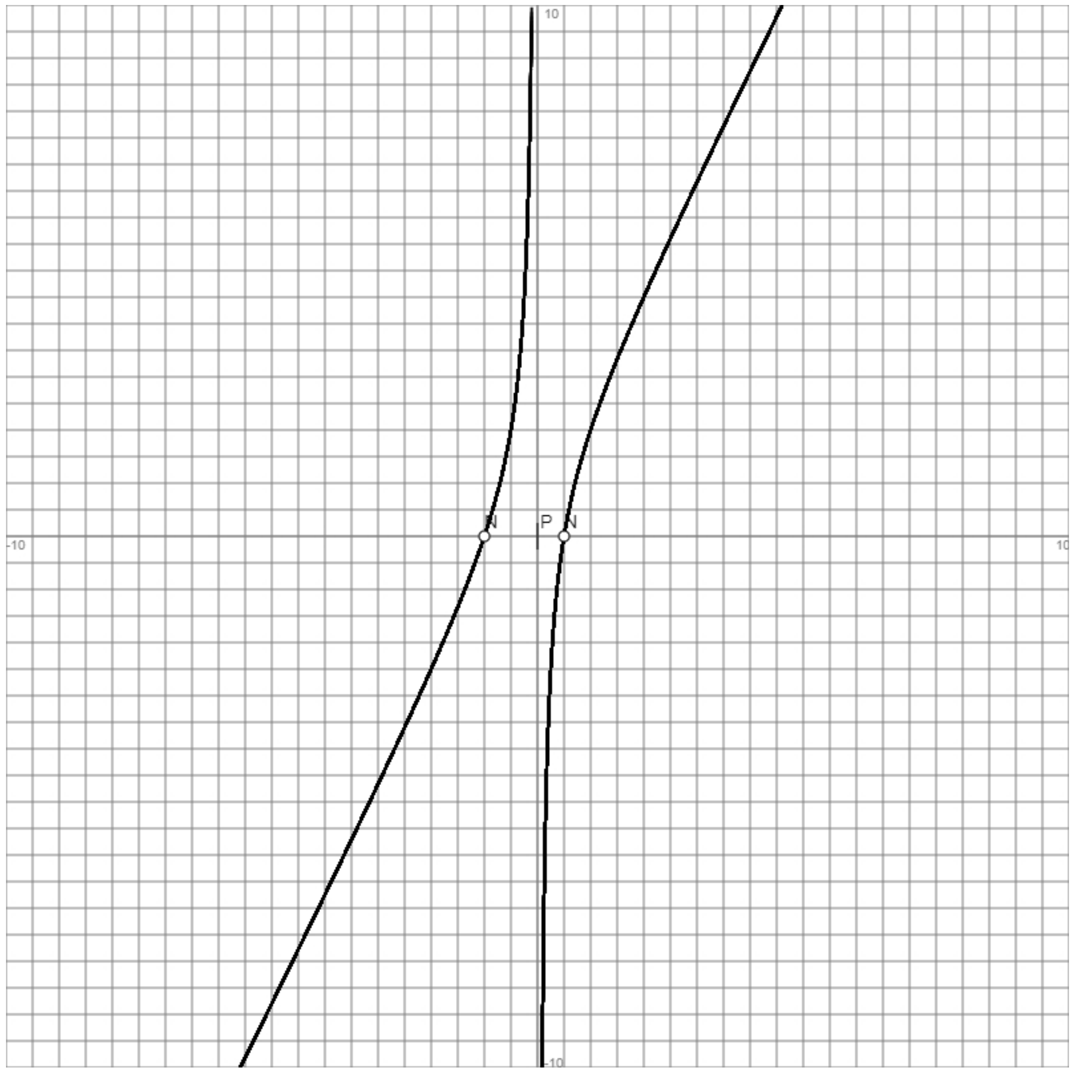
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	-18.9	2.01	0	
-9.5	-17.8947	2.01	0	
-9	-16.8889	2.01	0	
-8.5	-15.8824	2.01	0	
-8	-14.875	2.02	0	
-7.5	-13.8667	2.02	0	
-7	-12.8571	2.02	0.01	
-6.5	-11.8462	2.02	0.01	
-6	-10.8333	2.03	0.01	
-5.5	-9.8182	2.03	0.01	
-5	-8.8	2.04	0.02	
-4.5	-7.7778	2.05	0.02	
-4	-6.75	2.06	0.03	
-3.5	-5.7143	2.08	0.05	
-3	-4.6667	2.11	0.07	
-2.5	-3.6	2.16	0.13	
-2	-2.5	2.25	0.25	
-1.5	-1.3333	2.44	0.59	
-1	0	3	2	Nullstelle N(-1|0)
-0.5	2	6	16	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	0	6	-16	Nullstelle N(0.5|0)
1	2	3	-2	
1.5	3.3333	2.44	-0.59	
2	4.5	2.25	-0.25	
2.5	5.6	2.16	-0.13	
3	6.6667	2.11	-0.07	
3.5	7.7143	2.08	-0.05	
4	8.75	2.06	-0.03	
4.5	9.7778	2.05	-0.02	
5	10.8	2.04	-0.02	
5.5	11.8182	2.03	-0.01	
6	12.8333	2.03	-0.01	
6.5	13.8462	2.02	-0.01	
7	14.8571	2.02	-0.01	

7.5	15.8667	2.02	0	
8	16.875	2.02	0	
8.5	17.8824	2.01	0	
9	18.8889	2.01	0	
9.5	19.8947	2.01	0	
10	20.9	2.01	0	

Graph:



$D_f = R\backslash\{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 2x+1 = y als schiefe Asymptote

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{64}{x}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

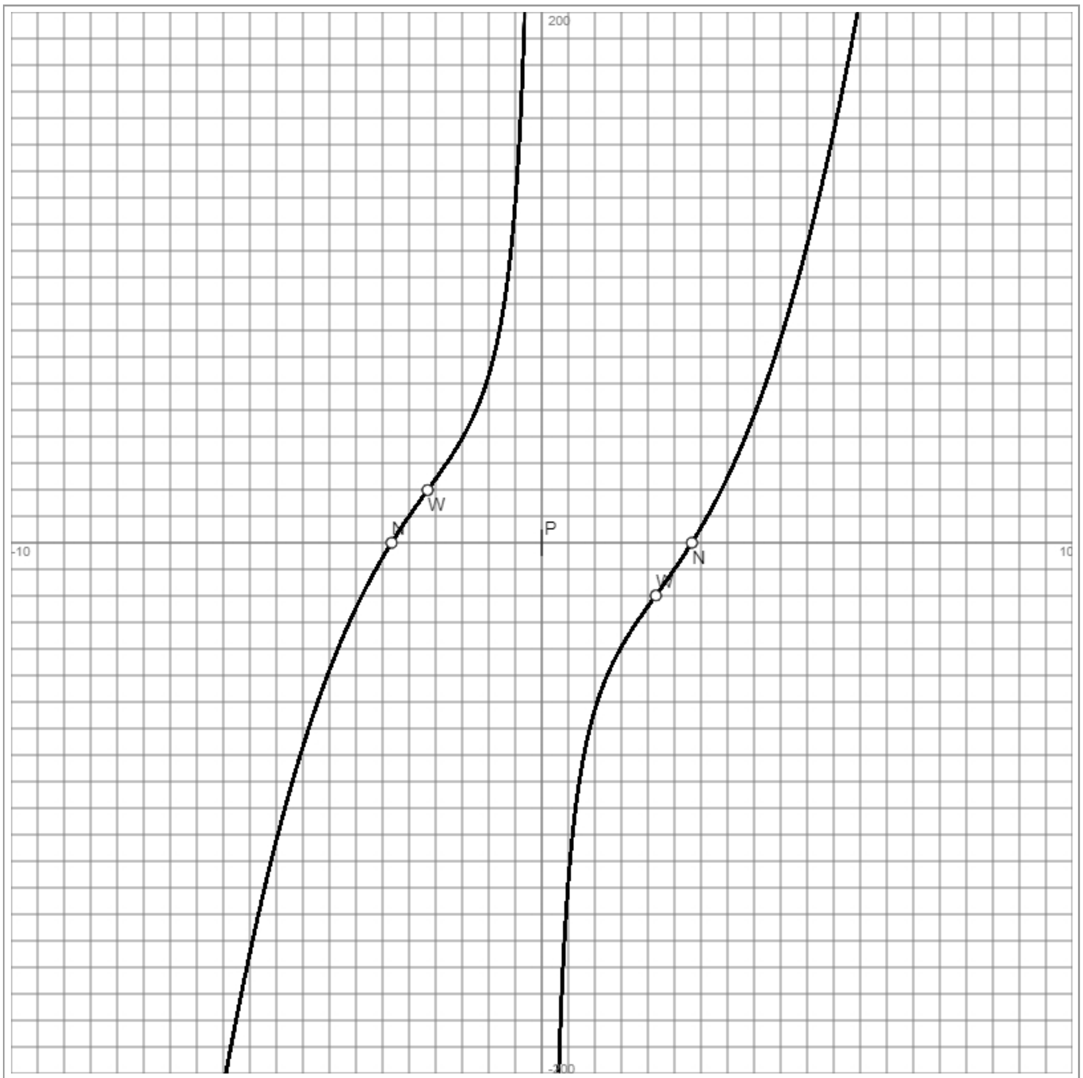
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	-993.6	300.64	-59.87	
-9.5	-850.6382	271.46	-56.85	
-9	-721.8889	243.79	-53.82	
-8.5	-606.5956	217.64	-50.79	
-8	-504	193	-47.75	
-7.5	-413.3417	169.89	-44.7	
-7	-333.8571	148.31	-41.63	
-6.5	-264.7788	128.26	-38.53	
-6	-205.3333	109.78	-35.41	
-5.5	-154.7386	92.87	-32.23	
-5	-112.2	77.56	-28.98	
-4.5	-76.9028	63.91	-25.6	
-4	-48	52	-22	
-3.5	-24.5893	41.97	-18.01	
-3	-5.6667	34.11	-13.26	
-2.829	-0.0183	32.01	-11.32	Nullstelle N(-2.83|-0.02)
-2.5	9.975	28.99	-6.81	
-2.15	19.8291	27.71	-0.02	Wendepunkt W(-2.15|19.83)
-2	24	28	4	
-1.5	39.2917	35.19	28.93	
-1	63	67	122	
-0.5	127.875	256.75	1021	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-127.875	256.75	-1021	
1	-63	67	-122	
1.5	-39.2917	35.19	-28.93	
2	-24	28	-4	
2.149	-19.8568	27.71	0	Wendepunkt W(2.15|-19.86)
2.5	-9.975	28.99	6.81	
2.828	-0.0137	32	11.31	Nullstelle N(2.83|-0.01)
3	5.6667	34.11	13.26	
3.5	24.5893	41.97	18.01	
4	48	52	22	
4.5	76.9028	63.91	25.6	

5	112.2	77.56	28.98	
5.5	154.7386	92.87	32.23	
6	205.3333	109.78	35.41	
6.5	264.7788	128.26	38.53	
7	333.8571	148.31	41.63	
7.5	413.3417	169.89	44.7	
8	504	193	47.75	
8.5	606.5956	217.64	50.79	
9	721.8889	243.79	53.82	
9.5	850.6382	271.46	56.85	
10	993.6	300.64	59.87	

Graph:



$D_f = R\backslash\{0\}$

x = 0 als senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> x^3 = y als Grenzkurve

f(-x) = -f(x) -> O-Punktsymmetrie

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

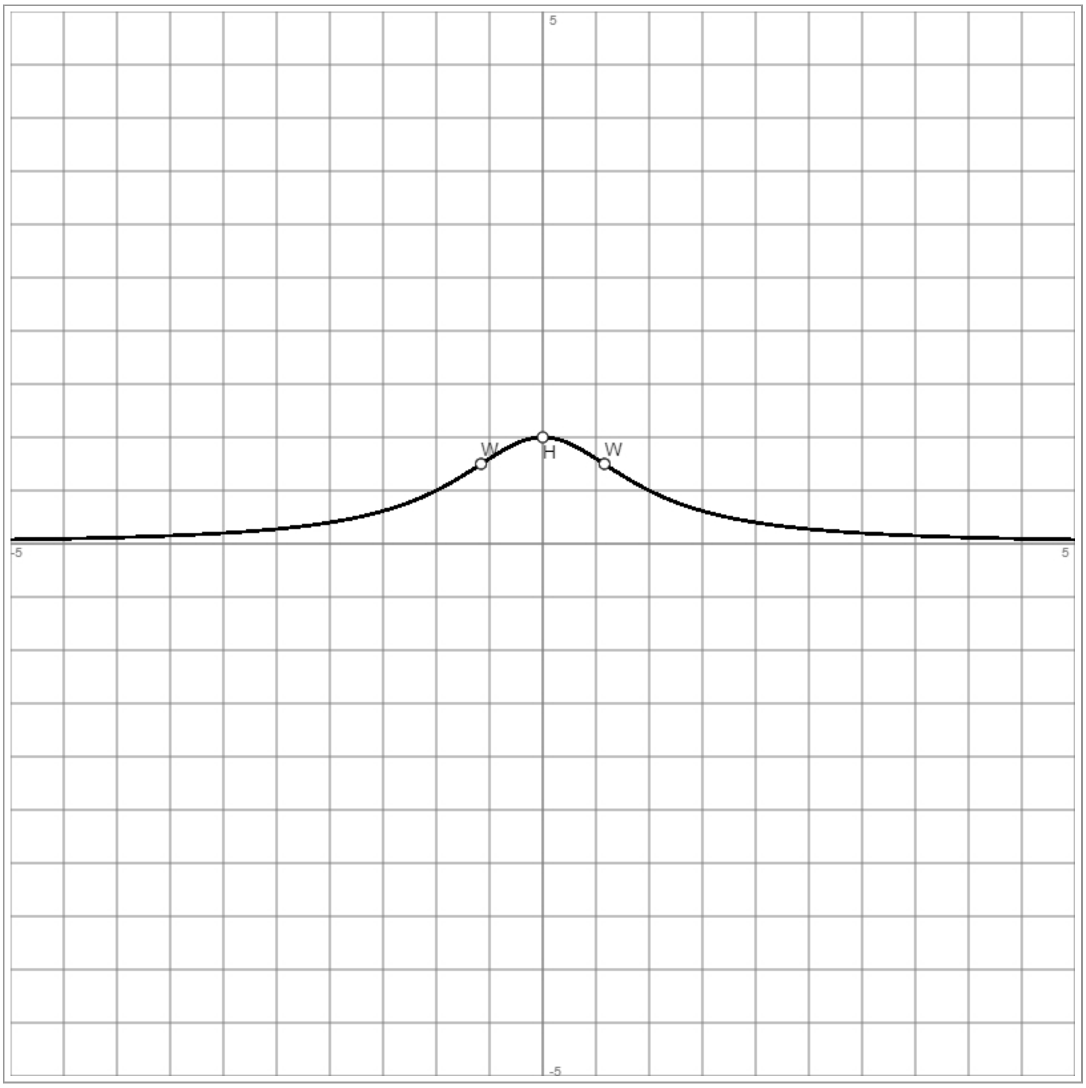
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	0.0385	0.01	0.01	
-4.5	0.0471	0.02	0.01	
-4	0.0588	0.03	0.02	
-3.5	0.0755	0.04	0.03	
-3	0.1	0.06	0.05	
-2.5	0.1379	0.1	0.09	
-2	0.2	0.16	0.18	
-1.5	0.3077	0.28	0.34	
-1	0.5	0.5	0.5	
-0.578	0.7496	0.65	0	Wendepunkt W(-0.58|0.75)
-0.5	0.8	0.64	-0.26	
0	1	0	-2	Schnittpunkt S_y(0|1) = Hochpunkt H(0|1)
0.5	0.8	-0.64	-0.26	
0.577	0.7502	-0.65	0	Wendepunkt W(0.58|0.75)
1	0.5	-0.5	0.5	
1.5	0.3077	-0.28	0.34	
2	0.2	-0.16	0.18	
2.5	0.1379	-0.1	0.09	
3	0.1	-0.06	0.05	
3.5	0.0755	-0.04	0.03	
4	0.0588	-0.03	0.02	
4.5	0.0471	-0.02	0.01	
5	0.0385	-0.01	0.01	

Graph:



$D_f = R$

x->±∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote

f(-x) = f(x) -> y-Achsensymmetrie

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

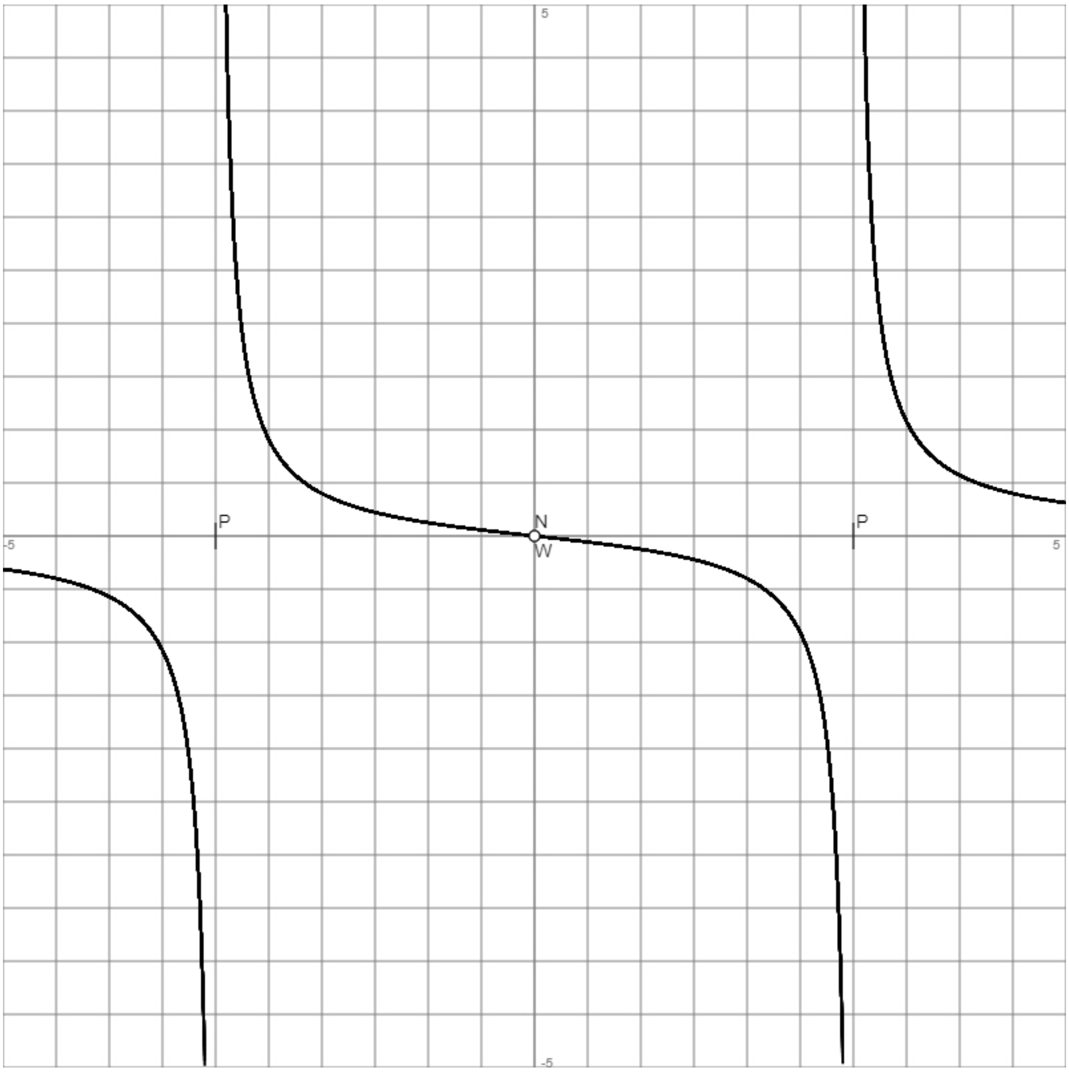
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-0.3125	-0.13	-0.13	
-4.5	-0.4	-0.23	-0.3	
-4	-0.5714	-0.51	-1	
-3.5	-1.0769	-2.01	-8	
-3	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -3
-2.5	0.9091	-2.02	7.99	
-2	0.4	-0.52	0.99	
-1.5	0.2222	-0.25	0.29	
-1	0.125	-0.16	0.11	
-0.5	0.0571	-0.12	0.04	
0	0	-0.11	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
0.5	-0.0571	-0.12	-0.04	
1	-0.125	-0.16	-0.11	
1.5	-0.2222	-0.25	-0.29	
2	-0.4	-0.52	-0.99	
2.5	-0.9091	-2.02	-7.99	
3	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 3
3.5	1.0769	-2.01	8	
4	0.5714	-0.51	1	
4.5	0.4	-0.23	0.3	
5	0.3125	-0.13	0.13	

Graph:



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

x = -3, x = 3 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote

f(-x) = -f(x) -> O-Punktsymmetrie

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(8 - \frac{1}{x}\right)$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

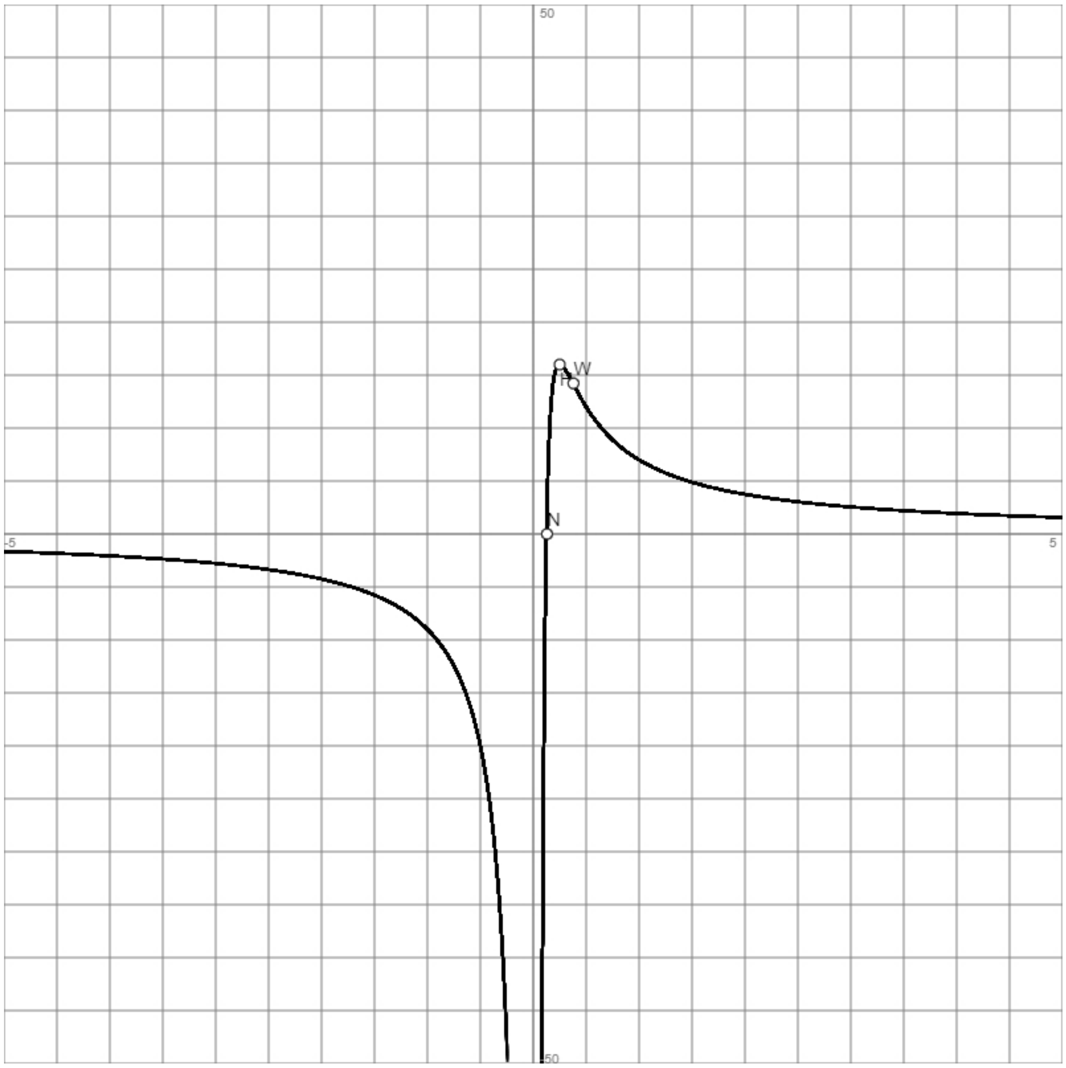
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Es ist: $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(8 - \frac{1}{x}\right) = \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}$ (Ausmultiplizieren).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-1.64	-0.34	-0.14	
-4.5	-1.8272	-0.42	-0.19	
-4	-2.0625	-0.53	-0.27	
-3.5	-2.3673	-0.7	-0.41	
-3	-2.7778	-0.96	-0.67	
-2.5	-3.36	-1.41	-1.18	
-2	-4.25	-2.25	-2.38	
-1.5	-5.7778	-4.15	-5.93	
-1	-9	-10	-22	
-0.5	-20	-48	-224	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.125	0	512.1	-16386.1	Nullstelle N(0.13|0)
0.25	16	0	-512.02	Hochpunkt H(0.25|16)
0.375	14.2222	-18.96	0	Wendepunkt W(0.38|14.22)
0.5	12	-16	32	
1	7	-6	10	
1.5	4.8889	-2.96	3.56	
2	3.75	-1.75	1.63	
2.5	3.04	-1.15	0.87	
3	2.5556	-0.81	0.52	
3.5	2.2041	-0.61	0.33	
4	1.9375	-0.47	0.23	
4.5	1.7284	-0.37	0.16	
5	1.56	-0.3	0.12	

Graph:



$D_f = R\backslash\{0\}$
x = 0 als senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel
x->±∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

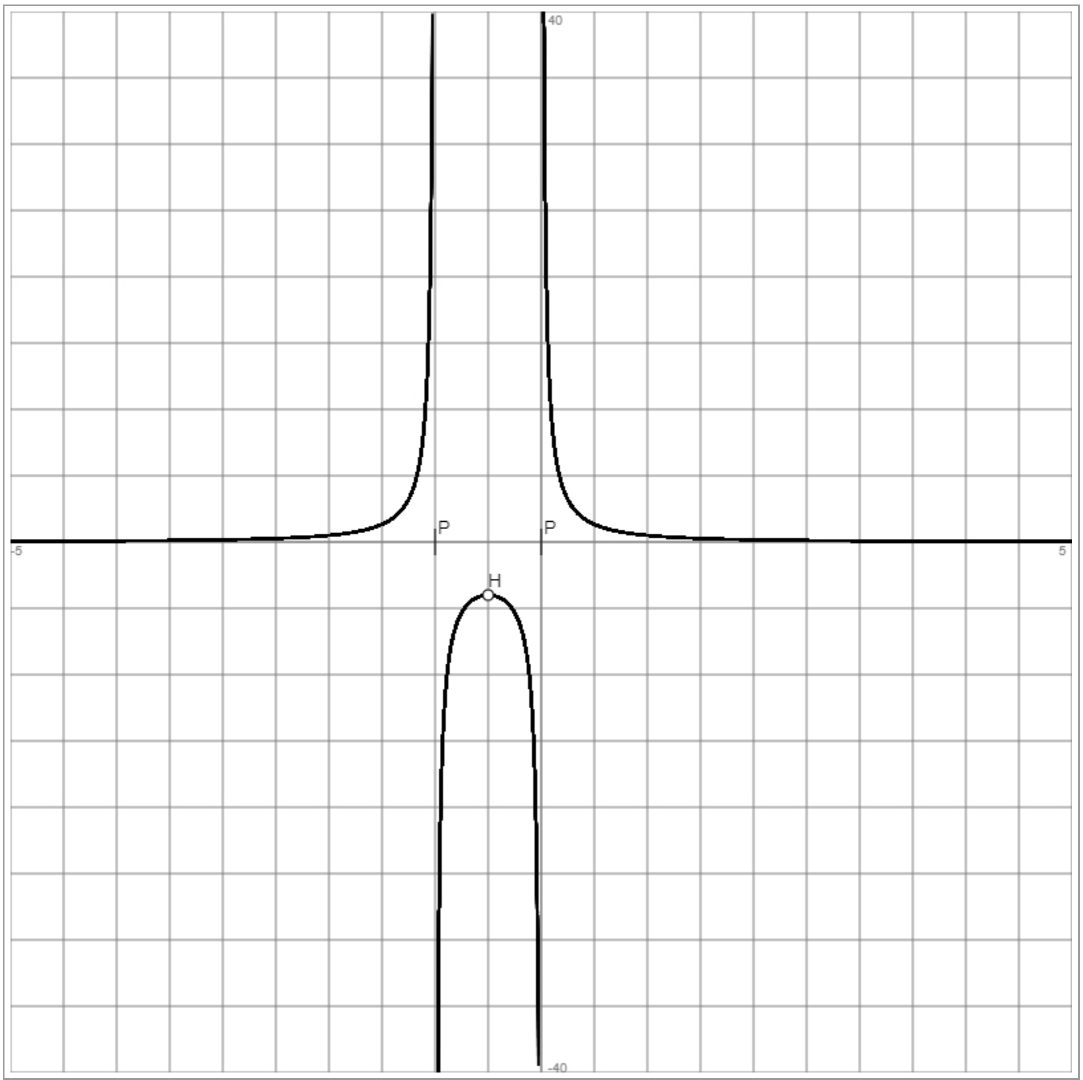
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	0.05	0.02	0.02	
-4.5	0.0635	0.03	0.02	
-4	0.0833	0.05	0.04	
-3.5	0.1143	0.08	0.08	
-3	0.1667	0.14	0.18	
-2.5	0.2667	0.28	0.46	
-2	0.5	0.75	1.75	
-1.5	1.3333	3.56	15.41	
-1	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
-0.5	-4	0	-32	Hochpunkt H(-0.5|-4)
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	1.3333	-3.56	15.41	
1	0.5	-0.75	1.75	
1.5	0.2667	-0.28	0.46	
2	0.1667	-0.14	0.18	
2.5	0.1143	-0.08	0.08	
3	0.0833	-0.05	0.04	
3.5	0.0635	-0.03	0.02	
4	0.05	-0.02	0.02	
4.5	0.0404	-0.02	0.01	
5	0.0333	-0.01	0.01	

Graph:



$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$

x = -1, x = 0 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0 = y$ als waagerechte Asymptote

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+8}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

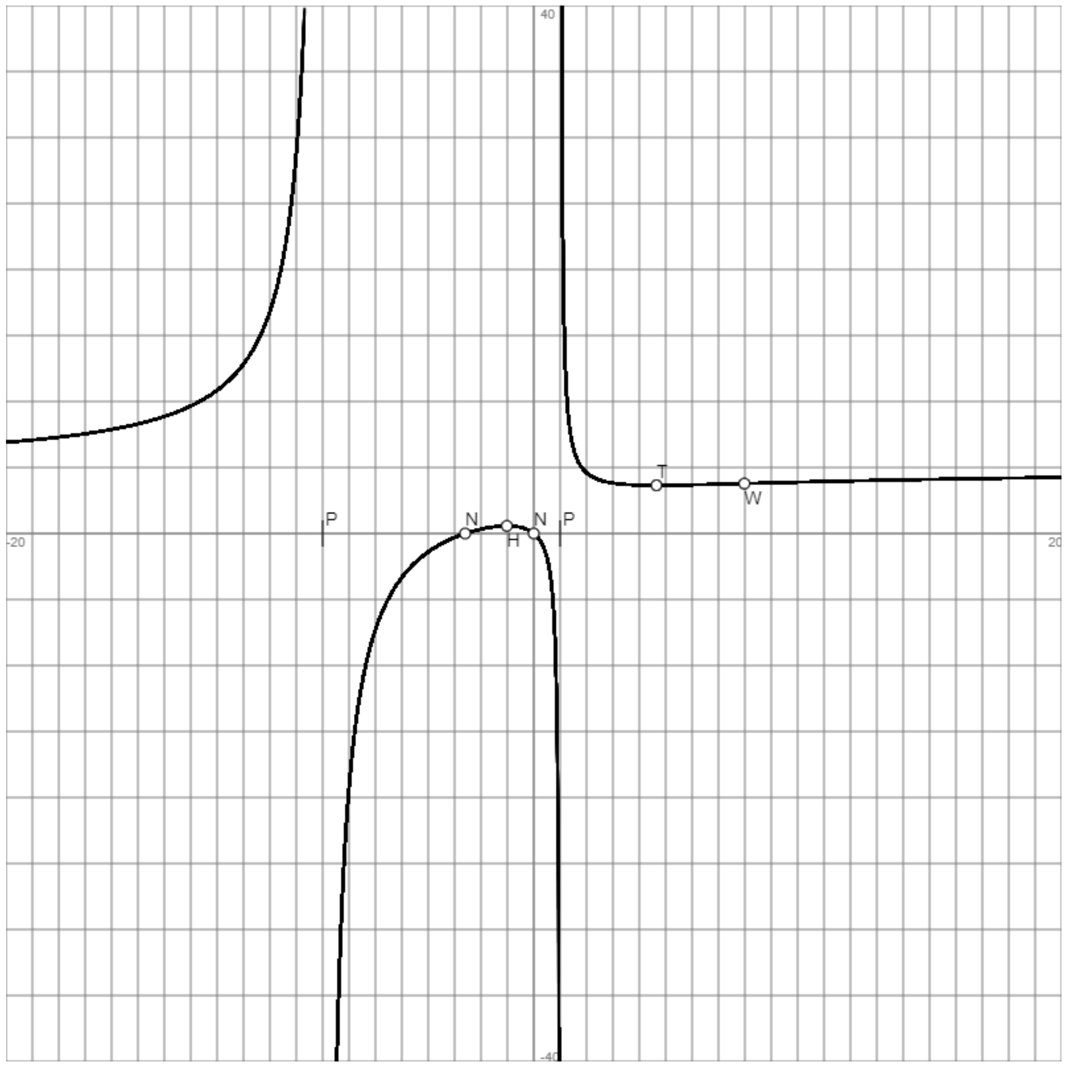
Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-20	6.9048	0.16	0.03	
-19.5	6.9894	0.18	0.03	
-19	7.0818	0.19	0.04	
-18.5	7.1832	0.21	0.04	
-18	7.2947	0.23	0.05	
-17.5	7.4182	0.26	0.06	
-17	7.5556	0.29	0.07	
-16.5	7.7092	0.33	0.08	
-16	7.8824	0.37	0.09	
-15.5	8.0788	0.42	0.11	
-15	8.3036	0.48	0.14	
-14.5	8.5633	0.56	0.17	
-14	8.8667	0.66	0.22	
-13.5	9.2257	0.78	0.29	
-13	9.6571	0.95	0.38	
-12.5	10.1852	1.17	0.53	
-12	10.8462	1.49	0.75	
-11.5	11.6971	1.95	1.12	
-11	12.8333	2.65	1.78	
-10.5	14.4261	3.82	3.07	
-10	16.8182	5.98	6	
-9.5	20.8095	10.65	14.22	
-9	28.8	23.98	48	
-8.5	52.7895	95.99	384.03	
-8	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -8
-7.5	-43.2353	95.98	-384.04	
-7	-19.25	23.97	-48.01	
-6.5	-11.2667	10.63	-14.23	
-6	-7.2857	5.96	-6.01	
-5.5	-4.9077	3.79	-3.09	
-5	-3.3333	2.61	-1.8	
-4.5	-2.2208	1.89	-1.14	
-4	-1.4	1.42	-0.78	
-3.5	-0.7778	1.09	-0.57	
-3	-0.3	0.84	-0.45	

-2.6	0	0.67	-0.39	Nullstelle N(-2.6|0)
-2.5	0.0649	0.63	-0.38	
-2	0.3333	0.44	-0.37	
-1.5	0.5077	0.25	-0.43	
-1.02	0.5715	0	-0.63	Hochpunkt H(-1.02|0.57)
-1	0.5714	-0.01	-0.64	
-0.5	0.4667	-0.46	-1.3	
0	0	-1.63	-4.09	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	-1.8235	-7.67	-32.08	
1	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 1
1.5	6.4737	-7.73	31.95	
2	4.6	-1.76	3.95	
2.5	4.0476	-0.67	1.14	
3	3.8182	-0.3	0.46	
3.5	3.713	-0.14	0.22	
4	3.6667	-0.06	0.12	
4.5	3.6514	-0.01	0.07	
4.65	3.6507	0	0.06	Tiefpunkt T(4.65|3.65)
5	3.6538	0.02	0.04	
5.5	3.6667	0.03	0.02	
6	3.6857	0.04	0.01	
6.5	3.7085	0.05	0.01	
7	3.7333	0.05	0	
7.5	3.7593	0.05	0	
7.975	3.7844	0.05	0	Wendepunkt W(7.98|3.78)
8	3.7857	0.05	0	
8.5	3.8121	0.05	0	
9	3.8382	0.05	0	
9.5	3.8639	0.05	0	
10	3.8889	0.05	0	
10.5	3.9132	0.05	0	
11	3.9368	0.05	0	
11.5	3.9597	0.04	0	
12	3.9818	0.04	0	
12.5	4.0032	0.04	0	
13	4.0238	0.04	0	
13.5	4.0437	0.04	0	
14	4.0629	0.04	0	
14.5	4.0815	0.04	0	
15	4.0994	0.04	0	
15.5	4.1167	0.03	0	
16	4.1333	0.03	0	
16.5	4.1494	0.03	0	
17	4.165	0.03	0	

17.5	4.18	0.03	0	
18	4.1946	0.03	0	
18.5	4.2086	0.03	0	
19	4.2222	0.03	0	
19.5	4.2354	0.03	0	
20	4.2481	0.03	0	

Graph:



D_f = R\{-8; 1}

x = -8, x = 1 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 5 = y als waagerechte Asymptote

Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x+1)(x-2)}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

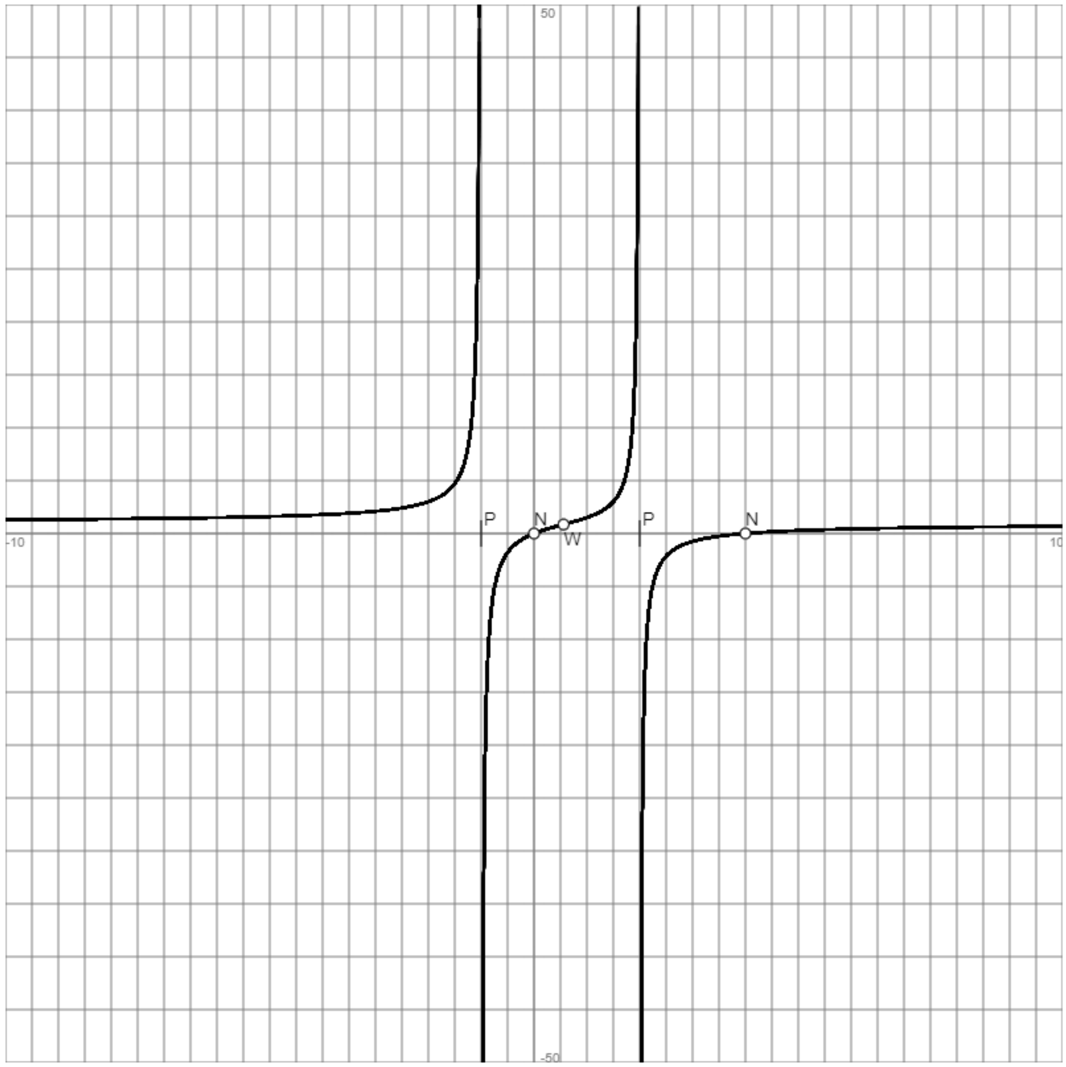
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	1.2963	0.03	0.01	
-9.5	1.312	0.03	0.01	
-9	1.3295	0.04	0.01	
-8.5	1.3492	0.04	0.01	
-8	1.3714	0.05	0.01	
-7.5	1.3968	0.05	0.02	
-7	1.4259	0.06	0.02	
-6.5	1.4599	0.07	0.02	
-6	1.5	0.09	0.03	
-5.5	1.5481	0.11	0.04	
-5	1.6071	0.13	0.06	
-4.5	1.6813	0.17	0.09	
-4	1.7778	0.22	0.14	
-3.5	1.9091	0.31	0.23	
-3	2.1	0.47	0.44	
-2.5	2.4074	0.81	1.02	
-2	3	1.75	3.38	
-1.5	4.7143	6.78	26.73	
-1	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -1
-0.5	-1.8	6.88	-26.5	
0	0	2	-3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	0.7778	1.33	-0.2	
0.555	0.8509	1.33	0	Wendepunkt W(0.56|0.85)
1	1.5	1.75	2.25	
1.5	3	5.6	21.12	
2	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2
2.5	-2.1429	5.47	-21.41	
3	-0.75	1.44	-2.72	
3.5	-0.2593	0.67	-0.83	
4	0	0.4	-0.36	Nullstelle N(4|0)
4.5	0.1636	0.27	-0.19	
5	0.2778	0.19	-0.11	
5.5	0.3626	0.15	-0.07	
6	0.4286	0.12	-0.05	
6.5	0.4815	0.1	-0.04	

7	0.525	0.08	-0.03	
7.5	0.5615	0.07	-0.02	
8	0.5926	0.06	-0.02	
8.5	0.6194	0.05	-0.01	
9	0.6429	0.04	-0.01	
9.5	0.6635	0.04	-0.01	
10	0.6818	0.03	-0.01	

Graph:



$D_f = R\backslash\{-1; 2\}$

x = -1, x = 2 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote

Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^3+4x^2}$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, senkrechte Asymptoten und Grenzkurve.

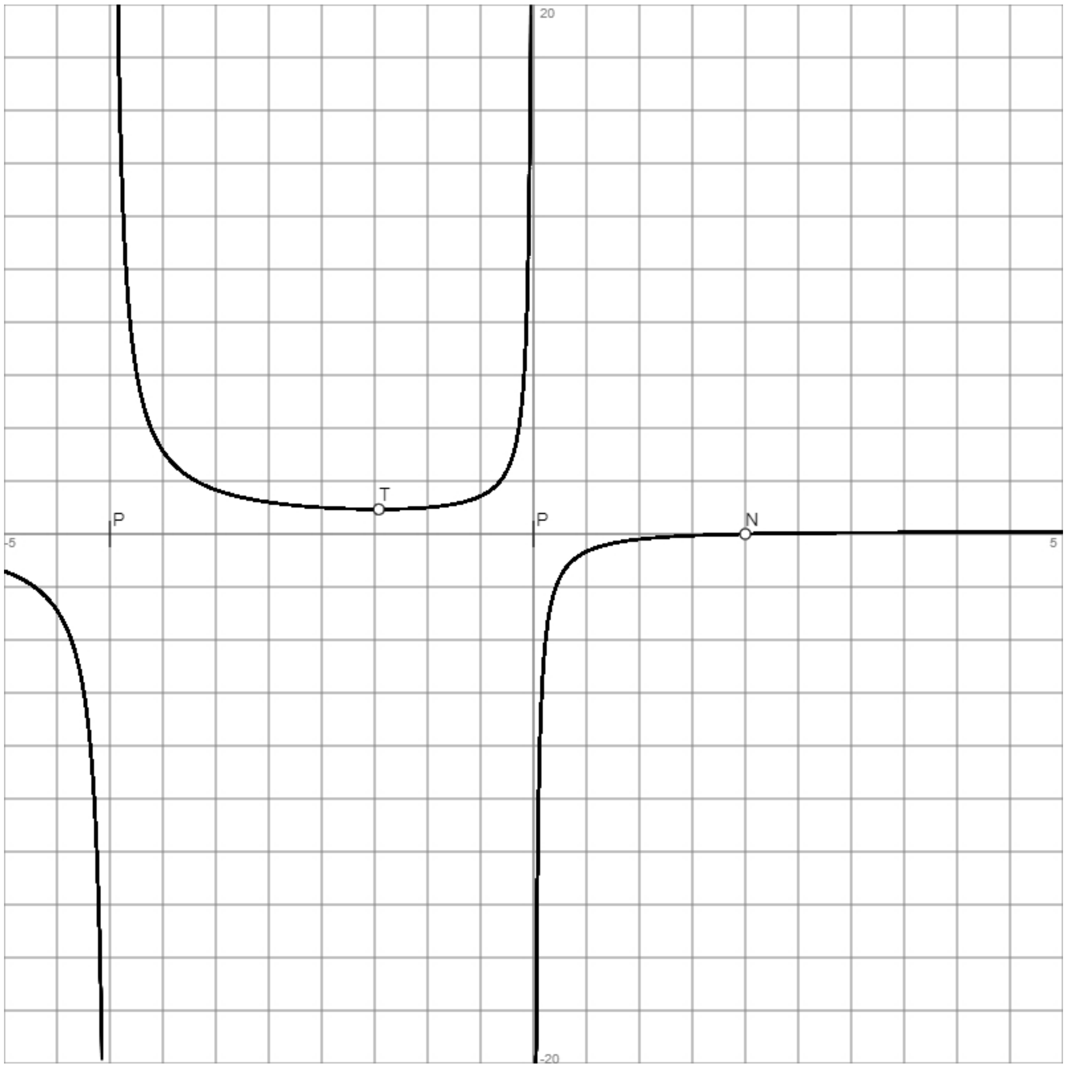
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; Nenner von f(x) = 0 -> senkrechte Asymptoten/Pole -> Definitionsbereich D_f; x-> ±∞ => f(x) -> y mit y als Grenzkurve.

Lösung:

Es ist: $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^3+4x^2}=\frac{x-2}{x^2+4x}$ (Kürzen von Zähler und Nenner).

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-1.4	-1.48	-2.99	
-4.5	-2.8889	-5.98	-23.99	
-4	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = -4
-3.5	3.1429	-5.96	24.02	
-3	1.6667	-1.44	3.04	
-2.5	1.2	-0.59	0.95	
-2	1	-0.25	0.5	
-1.5	0.9333	-0.02	0.49	
-1.4645	0.933	0	0.5	Tiefpunkt T(-1.46|0.93)
-1	1	0.33	1.11	
-0.5	1.4286	1.88	8.07	
0	-	-	-	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
0.5	-0.6667	1.93	-7.97	
1	-0.2	0.44	-0.98	
1.5	-0.0606	0.17	-0.28	
2	0	0.08	-0.11	Nullstelle N(2|0)
2.5	0.0308	0.04	-0.05	
3	0.0476	0.02	-0.03	
3.5	0.0571	0.01	-0.02	
4	0.0625	0.01	-0.01	
4.5	0.0654	0	-0.01	
5	0.0667	0	0	

Graph:



$D_f = R\backslash\{-4; 0\}$

x = -4, x = 0 als senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel

x->±∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote