Michael Buhlmann

Mathematatik-Aufgabenpool
> Lineare Gleichungssysteme I

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Lineare Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: $ax + b = 0$ mit rationalen oder reellen Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann: $x = -\frac{b}{a}$; ist $a = 0$, so besitzt die Gleichung keine Lösung ($L = \{\}$; $b \neq 0$) oder unendlich viele Lösungen ($L = \mathbf{Q}$ oder $\mathbf{R}$; $b=0$) (L als Lösungsmenge). Bei den Gleichungsumformungen gelten die algebraischen Gesetzmäßigkeiten (Punkt- vor Strichrechnung, Auflösen von Klammern in Termen, Vorzeichenregeln, Rechnen mit negativen und positiven Zahlen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Addition bzw. Subtraktion, Multiplikation bzw. Division in Gleichungen u.a.).

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \qquad (2)$$

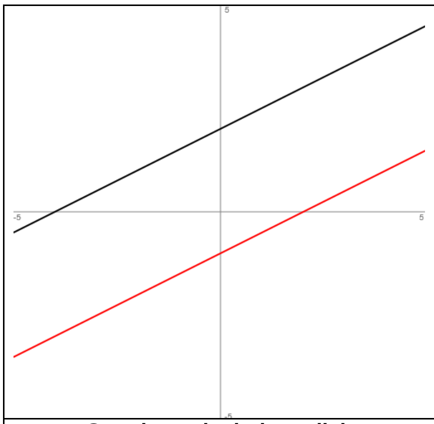
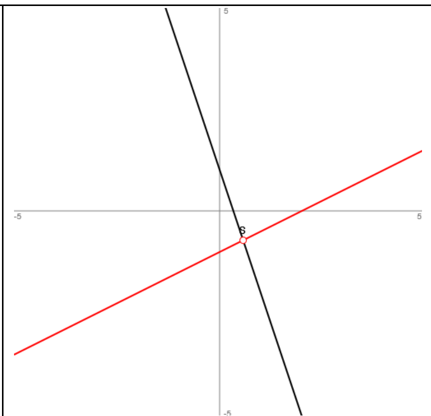
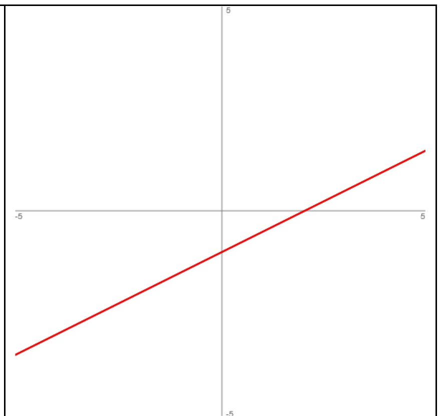
mit den reellen Variablen x, y, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \ldots a_{22}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x und y gilt Folgendes:

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen (1) und (2) werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke gleichgesetzt, die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung einsetzen, um die zweite Variable zu errechnen.

Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen, Variable in die andere Gleichung einsetzen, Lösung dieser Gleichung ermitteln, Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einsetzen.

Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen (oder deren Vielfachen) zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

Lineare Gleichungssysteme können mit Hilfe von Geraden u.a. der Form: $y = mx+b$ in einem x-y-Koordinatensystem dargestellt werden. Es ergeben sich zwei Geraden g und h, die entweder zueinander parallel liegen, sich schneiden oder identisch sind:

		
Geraden g, h sind parallel: keine Lösung	**Geraden g, h schneiden sich: eindeutige Lösung**	**Geraden g, h sind identisch: mehrdeutige Lösung**

Hinsichtlich der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen ergibt sich damit:

Keine Lösung: Lineares Gleichungssystem führt auf einen Widerspruch; Lösungsmenge: $L = \{\}$.

Eindeutige Lösung: Lineares Gleichungssystem führt auf eindeutig bestimmte Werte x_0 und y_0 für die Unbekannten x und y; Lösungsmenge: $L = \{(x_0; y_0)\}$.

Mehrdeutige Lösung: Lineares Gleichungssystem führt auf eine allgemein gültige Aussage; Lösungsmenge: $L = \{(x; (b_1-a_{11}x)/a_{12}) | x \varepsilon \mathbf{Q} \text{ oder } \mathbf{R}\}$ o.ä.

Aufgabe 1: Bestimme jeweils die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $y = 2$
$y = 2x - 4$

b) $2x + 3y = 8$
$y = 3$

c) $1 - 5y = 3$
$x = 2 + 3y$

d) $x = -4$
$y = -3x + 2$

e) $x + 3y = 6$
$5 - y = 2$

f) $2x + 5 = -(x+4)$
$-5x + 2y = 0$

g) $y = \frac{2}{5}x + 3$
$y = 7$

h) $4y + 6 = x - 5$
$5(x+1) = 4x$

i) $4x = 2y + 5$
$2x - 7 = 6$

j) $2(x-4) = -(x+3)$
$3x + 7y = -6$

k) $\frac{2}{3}y - \frac{5}{4} = \frac{3}{2}y$
$3x = 5(2y-3)$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten. Zusätzlich lässt sich hier aus einer Gleichung des linearen Gleichungssystems die Unbekannte x oder y bestimmen. Einsetzen des gefundenen Wertes in die andere Gleichung bestimmt auch den Wert der anderen Unbekannten y oder x.

Lösungen: L =: a) {(3; 2)}; b) {(-0,5; 3)}; c) {(0,8; -0,4)}; d) {(-4; 14)}; e) {(-3; 3)}; f) {(-3; -7,5)}; g) {(10; 7)}; h) {(-5; -4)}; i) {6,5; 10,5)}; j) {(5/3; -11/7)}; k) {(-10; -1,5)}.

Aufgabe 2: Bestimme jeweils die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme gemäß dem Gleichsetzungsverfahren:

a) $y = 3x + 7$
$y = -x + 11$

b) $y = -2x - 4$
$y = -5x - 10$

c) $x = y - 3$
$x = -4y + 37$

d) $2x = 7y + 1$
$2x = 4y - 8$

e) $3x = 8y + 12$
$5x = 9y + 20$

f) $y = 2x - 5$
$3y = -4x - 15$

g) $y = -5(x-1)$
$y = 3x - 11$

h) $x + 3 = -2y + 6$
$x = 4y - 3$

i) $y = -\frac{1}{5}x + 2$
$y = \frac{3}{4}x - 17$

j) $y = -\frac{1}{4}(-11-x)$
$y = \frac{2}{3}(x+1)$

k) $-2y = 5x + 14$
$4y = -(3x+21)$

l) $x = y - 6$
$x - 7y = -42$

m) $2x = 3(y+4)$
$3x = 2(y+19)$

n) $5x = y - 19$
$x + y = 1$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {(1; 10)}; b) {(-2; 0)}; c) {(5; 8)}; d) {(-10; -3)}; e) {(4; 0)}; f) {(0; -5)}; g) {(2; -5)}; h) {(1; 1)}; i) {(20; -2)}; j) {(5; 4)}; k) {(-1; -4,5)}; l) {(0; 6)}, m) {(18; 8)}; n) {(-3; 4)}.

Aufgabe 3: Bestimme jeweils die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme gemäß dem Einsetzungsverfahren:

a) $3x + y = 23$
$y = -x + 13$

b) $2y – 5x = 4$
$y = 6x + 2$

c) $4x + 5y = -4$
$x = -11y – 1$

d) $5x + 7y = -2$
$x = -y$

e) $3x = 5y – 45$
$y = 5x + 31$

f) $5y – 12x = 27$
$7y = 21$

g) $2(x–1) = 3(y+1)$
$2y = -x + 6$

h) $x + 4y + 6 = 20$
$3x = 5y + 8$

i) $\frac{1}{3}x – \frac{1}{2}y = -\frac{2}{3}$
$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

j) $\frac{11}{4}x – \frac{7}{3}y = 5\frac{1}{12}$
$2x = \frac{8}{5}(2y+11)$

k) $3x – 2y = -9{,}5$
$y = -(x-1)$

l) $3(x+2) – 2(y+1{,}2) = 8{,}6$
$x + y = 3$

m) $x = 5y + 8$
$-3x + 2(y+1) = -6{,}4$

n) $-5x = 5y – 9{,}5$
$5x + 10y = 36{,}5$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {(10; 3)}; b) {(0; 2)}; c) {(-1; 0)}; d) {(1; -1)}; e) {(-5; 6)}; f) {(-1; 3)}; g) {(4; 1)}; h) {(6; 2)}; i) {(1; 2)}; j) {(4; -3)}; k) {(-1,5; 2,5)}; l) {(2,2; 0,8)}, m) {(2; -1,2)}; n) {(-3,5; 5,4)}.

Aufgabe 4: Bestimme jeweils die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme gemäß dem Additionsverfahren:

a) $2x + 3y = 5$
$-2x + 5y = 3$

b) $x + 2y = 5$
$x + 5y = -7$

c) $4x + 3y = -4$
$5x – 3y = -19$

d) $3x – y = 13$
$2x + 4y = 18$

e) $3x + 5y = 45$
$y – 5x = 23$

f) $8y – 12x = 20$
$0 = x + y$

g) $3x – 7y = -21$
$-5x + 3y = 9$

h) $x + 5y – 9 = -5$
$3x – y = -8$

i) $\frac{5}{3}x – \frac{3}{4}y = 8$
$\frac{4}{5}x + \frac{7}{4}y = -\frac{23}{5}$

j) $35x – 22y = 48$
$-41 = 15y – 28x$

k) $\frac{5}{8}x – \frac{1}{5}y = 1\frac{7}{8}$
$\frac{7}{8}x + \frac{10}{7}y = 2\frac{5}{8}$

l) $3(3x–1) – 2(2y+5) = -99$
$2(4x+1) + 3(5-–2y) = -79$

m) $2x + 5(y+8) = 40$
$-4(x+5) + 3y = -20$

n) $10x + 5y = 12$
$9y = 16 – 4x$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {(1; 1)}; b) {(13; -4)}; c) {(-2; 3)}; d) {(5; 2)}; e) {(-2,5; 10,5)}; f) {(-1; 1)}; g) {(0; 3)}; h) {(-9/4; 5/4)}; i) {(3; -4)}; j) {(2; 1)}; k) {(3; 0)}; l) {(-6; 8)}, m) {(0; 0)}; n) {(0,4; 1,6)}.

Aufgabe 5: Bestimme jeweils die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) y = 5x – 3
y = 2x + 3

b) y = x + 5
2x + y = 2

c) 2x + 3y = 5
4x – 3y = 1

d) y = 2x + 4
3x – 2y = -18

e) 5x + y = -21
4x – 2y = 0

f) 5x + 4y = -9
3x + 2y = -7

g) 10x + y = 17
x – 4y = 14

h) y = 2x + 8
-2x + 5y = 8

i) y = 7x – 4
y = -2x + 14

j) y = 1,5x + 2
y – x = 5

k) x = 2y + 11
x = -3y – 14

l) 2x = 5y + 2
2x = 7y

m) 6x + 4y = 24
5x – 3y = 1

n) 3x + 5y = 21
2x + 3y = 13

o) x + 2y = 8
2x + 3y = 7

p) 6x – 5y = 6
4x + 6y = 60

q) 2x + y = 16
5y = x + 3

r) 4y = x – 7
5y = -2x + 14

s) 2x + 2y = 56
3x + y = 4

t) y = 14 – 5x
y = 3x – 10

u) -x – 2y = 18
2x – 5y = 36

v) -3x + 12y = 0
5x – y = 19

w) 2x + 5y = 45
2x = 10y

x) x + 4y = 10
3x – 10y = 19

y) 9x + 10y = 41
3x = 11 – 4y

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {(2; 7)}; b) {(-1; 4)}; c) {(1; 1)}; d) {(10; 24)}; e) {(-3; -6)}; f) {(-5; 4)}; g) {(2; -3)}; h) {(-4; 0)}; i) {(2; 10)}; j) {(6; 11)}; k) {(1; -5)}; l) {(3,5; 1)}, m) {(2; 3)}; n) {(2; 3)}; o) {(-10;9)}; p) {(6; 6)}; q) {(7; 2)}, r) {(7: 0)}; s) {(-12; 40)}; t) {(3; -1)}; u) {(-2; -8)}; v) {(4; 1)}; w) {(15; 3)}; x) {(8; 0,5)}; y) {(9; -4)}.

Aufgabe 6: Bestimme, falls vorhanden, jeweils die (eindeutige, mehrdeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) y = 3x – 3
y = 3x + 3

b) y = 2x – 5
4x + 3y = 18

c) 2x – 4y = 7
x – 3,5 = 2y

d) x = 2y + 4
5x – 2y = 2

e) -3x + y = 9
6x – 2y = -3

f) 3x + 2y = 11
$x = \frac{11-2y}{3}$

g) 12x + 5y = 57
5x – 3y = -22

h) 10x – 25y = 32
5y – 2x = 8

i) $y = \frac{2}{5}x + 1$
y = -0,8x + 3

j) -6x + 7y = 0
5x – 3y = -17

k) 4x = 8y – 3
4y = 2x + 2

l) 9x – 4y = 8
0 = 10y – 22,5x + 20

m) y = 15 – 2x
4x – 5y = 65

n) 16x + 5y = 200
x – 15y = -355

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {}; b) {(1,6; 3,3)}; c) {(t; 0,5t–1,75)|tε**Q** oder **R**}; d) {(-0,5; -2,25)}; e) {}; f) {((11-2t)/3; t)|tε**Q** oder **R**}; g) {(1; 9)}; h) {}; i) {(5/3; 5/3)}; j) {(-7; -6)}; k) {}; l) {(t; 2,25t-2)|tε**Q** oder **R**}, m) {(10; -5)}; n) {(5; 24)}.

Aufgabe 7: Bestimme, falls vorhanden, jeweils die (eindeutige, mehrdeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $2x + 2y = 3$
$y = 3x – 2{,}5$

b) $x = y + 17$
$3y – 11 = x$

c) $2x = 3 + 5y$
$2x – 3 = y$

d) $x = 3y – 4$
$x – 3y = 5$

e) $4x + y = 5$
$3x – y = 2$

f) $x – 5y = 5$
$y = -\frac{2x+1}{12}$

g) $3x – 4y = 7$
$5x + 6y = -1$

h) $2(2x–1) = y$
$x = y – 7$

i) $y = -\frac{2}{7}x + 2$
$5y = -2x + 3$

j) $2y = \frac{3}{5}x – 1$
$5y – \frac{3}{2}x = 1$

k) $3y = 5 + 4x$
$y = \frac{2}{3}x + 2$

l) $5(3–x) = 2(5+y)$
$x + y = -2$

m) $6x = -3y – 1$
$2y – 3{,}5 = x$

n) $x + 5y = 11$
$2x – 4y = 8$

o) $y = x$
$y = \frac{4}{5}(x–2)$

p) $3x – 5y = 39$
$10y = -78 + 6x$

q) $7x + 2y = 36$
$y + 3{,}5x – 32 = 0$

r) $y = 5 – x$
$5x – 10y = -23$

s) $3x + 8y = 3$
$8x – 3y = 1\frac{11}{12}$

t) $2x = -4y – 5$
$2y = -4x + 35$

u) $\frac{2}{3}x – y = 23$
$x + \frac{1}{5}y = 9$

v) $-\frac{7}{4}x + \frac{12}{5}y = -\frac{31}{2}$
$\frac{2}{5}x + \frac{5}{4}y = -\frac{109}{20}$

w) $4(x–3) + 5(y+1) = 41$
$15(y+2) = 25 – 12(x–7)$

x) $3x + 4y = 10(x–y–3) + 2$
$3(x+1) – 5(y–2) = 9x – 6y$

y) $12x – 30y = 21 + 6x$
$3y + 14 = 24x – 12y$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

Lösungen: L =: a) {(1; 0,5)}; b) {(14; 31)}; c) {(1,5; 0)}; d) {}; e) {(1; 1)}; f) {(2,5; -0,5)}; g) {(1; -1)}; h) {(3;10)}; i) {(12,25; 5,5)}; j) {}; k) {(0,5; 7/3)}; l) {(3; -5)}, m) {(-5/6; 4/3)}; n) {(6; 1)}; o) {(-8; -8)}; p) {t; (3t-39)/5|tε**Q** oder **R**}; q) {}; r) {(1,8; 3,2)}, s) {(1/3; 1/4)}, t) {(12,5, -7,5)}; u) {(12; -15)}, v) {(2; -5)}; w) {}; x) {(2; -1)}; y) {(1/6; -2/3)}.

Aufgabe 8: Bestimme, falls vorhanden, grafisch und rechnerisch jeweils den Schnittpunkt zweier Geraden g und h:

a) g: $y = 4x$, h: $y = 3x + 1$

b) g: $y = 10 - 2x$, h: $y = 4$

c) g: $y = x - 7$, h: $y = \frac{1}{8}x$

d) g: $3y + 2x = 6$, h: $y = -\frac{2}{3}x$

e) g: $y - 2x = 1$, $y = -2x + 7$

f) g: $y = \frac{1}{4}x + 5$, h: $y = -2x - 7$

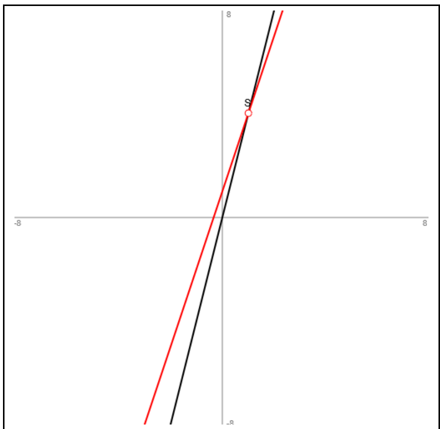
g) g: $y = 5x + 4$, h: $y = 0{,}5x - 5$

h) g: $y = 1{,}2x - 2$, h: $5y - 6x = -10$

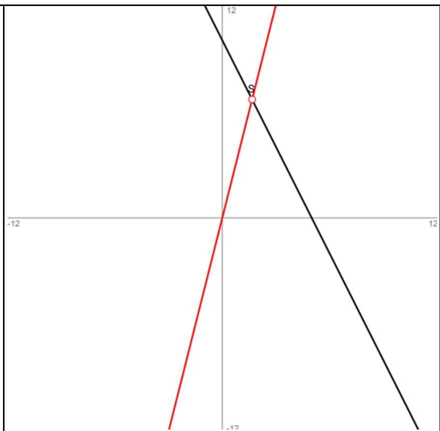
i) g: $y = 3x - 5$, h: $y = -4x - 12$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten. Geraden der Form y = mx+b können als Graph in ein x-y-Koordinatensystem eingezeichnet werden unter Beachtung von Steigung m (Steigungsdreieck) und y-Achsenabschnitt b.

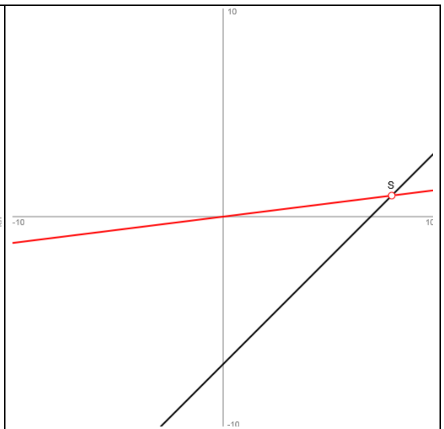
Lösungen: Schnittpunkt S; Graphen:



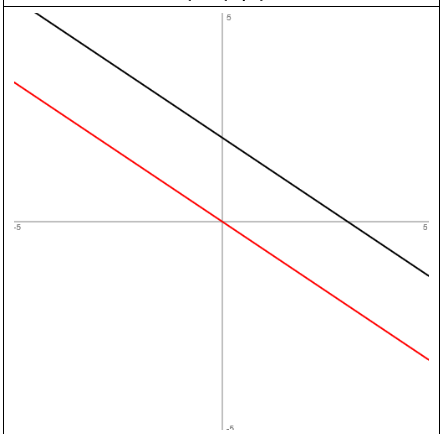
a) S(1|1)



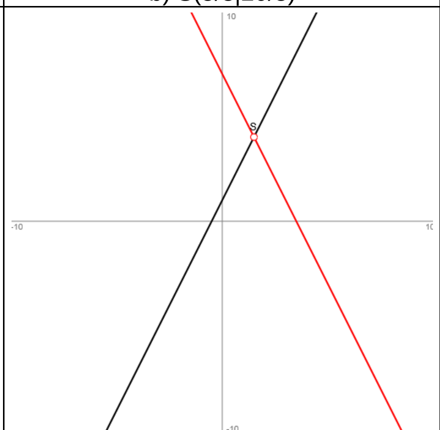
b) S(5/3|20/3)



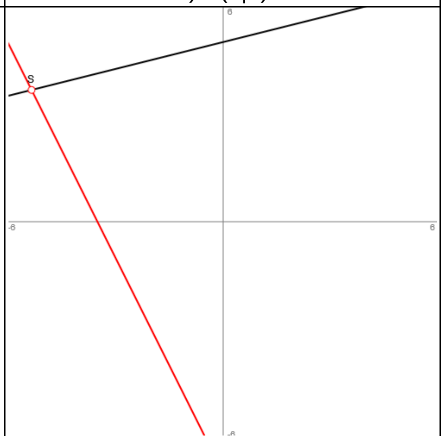
c) S(8|1)



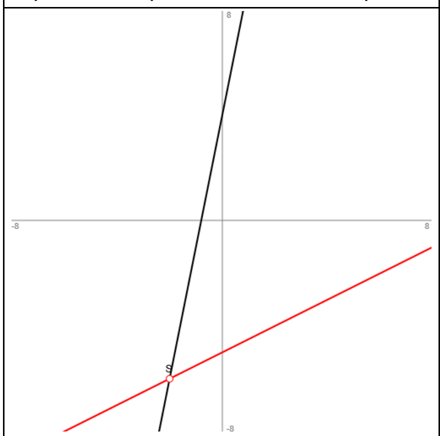
d) Geraden parallel, kein Schnittpunkt



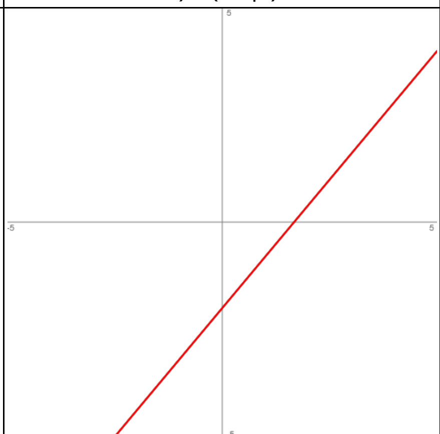
e) S(1,5|4)



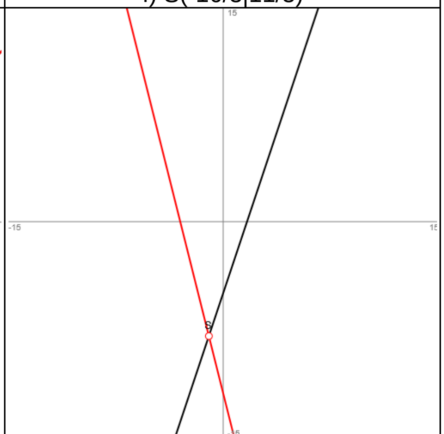
f) S(-16/3|11/3)



g) S(-2|-6)



h) Geraden identisch, kein Schnittpunkt



i) S(-1|-8)

Abkürzungen: L = Lösungsmenge, **Q** = Menge der rationalen Zahlen, **R** = Menge der reellen Zahlen.