Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Lineare Gleichungssysteme III

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Lineare Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: ax + b = 0 mit rationalen oder reellen Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für a ≠ 0 dann: $x = -\frac{b}{a}$; ist a = 0, so besitzt die Gleichung keine Lösung (L = {}; b≠0) oder unendlich viele Lösungen (L = **R**; b=0) (L als Lösungsmenge). Bei den Gleichungsumformungen gelten die algebraischen Gesetzmäßigkeiten (Punkt- vor Strichrechnung, Auflösen von Klammern in Termen, Vorzeichenregeln, Rechnen mit negativen und positiven Zahlen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Addition bzw. Subtraktion, Multiplikation bzw. Division in Gleichungen u.a.).

Ein lineares Gleichungssystem z.B. aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus lösen für ein lineares Gleichungssystem allgemein mit n Gleichungen und n Unbekannten der Form:

$$\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \dots & \\ a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & (n) \end{array}$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{nn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_n. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gauß-Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus in Stufen- oder Dreiecksform, das auf die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß: 3) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement a≠0 und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n = b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement c≠0, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1}+dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Aufgabe 1: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (x_1, x_2, x_3):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$-1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 14$ $+2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 20$ $-1x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 23$	$x_1 = 7, x_2 = 9, x_3 = 3$
2	$+2x_1 - 1x_2 - 2x_3 = -17$ $+5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -20$ $+5x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 10$	$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 9$
3	$-3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3$ $+3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -27$ $-5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 86$	$x_1 = -7, x_2 = 6, x_3 = 9$
4	$-5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -45$ $-2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -35$ $-1x_1 + 5x_2 - 1x_3 = -30$	$x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 0$
5	$-4x_1 - 3x_3 = 24$ $-3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 1$ $+1x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -16$	$x_1 = -9, x_2 = 3, x_3 = 4$
6	$-3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -12$ $+2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -5$ $+5x_2 + 1x_3 = -3$	$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -8$
7	$-4x_1 + 1x_2 + 2x_3 = -32$ $+2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -25$ $+4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 18$	$x_1 = 4, x_2 = -6, x_3 = -5$
8	$-4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5$ $-1x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -15$ $+3x_2 + 5x_3 = 5$	$x_1 = 5, x_2 = 10, x_3 = -5$
9	$+3x_1 + 1x_2 - 3x_3 = -17$ $-4x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 8$ $-1x_1 + 3x_2 = -3$	$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2$
10	$+2x_1 - 2x_3 = 2$ $+2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -10$ $+2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7$	$x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = -3$

Aufgabe 2: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (x_1, x_2, x_3):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$-8x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 26$ $+4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -49$ $-9x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 5$	$x_1 = -8, x_2 = 14, x_3 = 5$

2	$+ 2x_1 \qquad + 5x_3 = 98$ $- 1x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 66$ $+ 7x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 158$	$x_1 = 14$, $x_2 = 12$, $x_3 = 14$
3	$+ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -27$ $+ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 115$ $+ 2x_1 - 1x_2 - 8x_3 = -41$	$x_1 = 12$, $x_2 = -7$, $x_3 = 9$
4	$- 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -84$ $- 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -50$ $- 10x_1 + 7x_2 - 1x_3 = -118$	$x_1 = 16$, $x_2 = 8$, $x_3 = 14$
5	$- 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -106$ $- 8x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -211$ $- 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -45$	$x_1 = 14$, $x_2 = 0$, $x_3 = 11$
6	$+ 8x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 157$ $+ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 32$ $- 9x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -106$	$x_1 = 13$, $x_2 = -4$, $x_3 = -3$
7	$+ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -64$ $+ 2x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -61$ $- 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -206$	$x_1 = 13$, $x_2 = 19$, $x_3 = 12$
8	$- 6x_1 + 8x_2 \qquad = -26$ $+ 8x_1 - 1x_2 - 4x_3 = 128$ $- 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -78$	$x_1 = 15$, $x_2 = 8$, $x_3 = -4$
9	$+ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -30$ $- 5x_1 - 2x_2 - 1x_3 = -37$ $- 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -68$	$x_1 = 1$, $x_2 = 16$, $x_3 = 0$
10	$+ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 69$ $- 6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -59$ $+ 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 = 97$	$x_1 = 10$, $x_2 = -2$, $x_3 = -5$

Aufgabe 3: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (x, y, z):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$+ 5x \qquad - 3z = -59$ $+ 3x \qquad - 1z = -29$ $+ 7x + 2y + 5z = 13$	$x = -7$, $y = 11$, $z = 8$
2	$+ 4x + 4y - 1z = -48$ $- 6x + 6y + 7z = 56$ $+ 6x - 7y - 1z = -3$	$x = -5$, $y = -5$, $z = 8$

3	$-1x - 2y - 1z = -29$ $+4y + 4z = 36$ $+4x - 2y - 4z = 20$	$x = 8$, $y = 12$, $z = -3$
4	$+6x + 5y + 8z = 30$ $-3x - 2y - 2z = 0$ $-3x + 7y + 3z = 115$	$x = -10$, $y = 10$, $z = 5$
5	$+7x + 7y + 3z = 26$ $-3x - 4y + 1z = 3$ $-2x - 6y + 5z = 13$	$x = -12$, $y = 11$, $z = 11$
6	$+6y - 5z = -111$ $-8x - 4y - 2z = -6$ $+7x + 6y + 5z = 39$	$x = 0$, $y = -6$, $z = 15$
7	$-2x - 6y + 4z = -110$ $+4x - 7y + 2z = -53$ $+1x + 7z = -92$	$x = 6$, $y = 7$, $z = -14$
8	$-3x - 1y + 3z = 12$ $+6x + 1y - 5z = -30$ $+6x + 3y - 5z = -6$	$x = -2$, $y = 12$, $z = 6$
9	$-1x + 7y - 4z = 1$ $+5x - 5y - 3z = -101$ $-5x - 2y = 23$	$x = -7$, $y = 6$, $z = 12$
10	$+8x + 7y = 105$ $+6x - 2y - 4z = 64$ $-5x - 4y - 1z = -54$	$x = 7$, $y = 7$, $z = -9$

Aufgabe 4: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (r, s, t):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$+1r + 7s + 1t = -15$ $-10r - 8s - 12t = -44$ $-12r + 5s - 7t = -67$	$r = 2$, $s = -3$, $t = 4$
2	$-13r + 10s - 8t = -9$ $+2r - 1s + 4t = 24$ $-5r + 1s + 11t = 78$	$r = 1$, $s = 6$, $t = 7$
3	$-8r + 4s + 3t = -44$ $+9r - 11s + 7t = -5$ $-7r - 1s - 9t = -1$	$r = 5$, $s = 2$, $t = -4$

4	$-3r - 14s + 9t = -86$ $+10r + 10s - 2t = 30$ $-6r + 10s + 13t = 94$	$r = -4$, $s = 7$, $t = 0$
5	$+13r + 2s + 13t = 124$ $+13r + 4s - 1t = 48$ $-5r + 7s - 12t = -106$	$r = 5$, $s = -3$, $t = 5$
6	$+9r + 9s - 15t = -93$ $+6r + 9s - 4t = -47$ $-4r - 5s + 14t = 83$	$r = 3$, $s = -5$, $t = 5$
7	$-14r + 10s - 6t = 160$ $+8r - 3s - 12t = -57$ $+13r - 12s + 13t = -175$	$r = -6$, $s = 7$, $t = -1$
8	$+1r - 3s - 6t = -31$ $-1r + 12s + 4t = -19$ $-13r + 4s - 2t = -17$	$r = -1$, $s = -4$, $t = 7$
9	$-12r - 6s - 7t = -6$ $+11r + 11s - 1t = 28$ $-15r - 11s - 2t = -34$	$r = 6$, $s = -4$, $t = -6$
10	$+10r - 15s - 5t = -45$ $-1r - 9s - 2t = -33$ $+8r + 12s + 14t = -24$	$r = 0$, $s = 5$, $t = -6$

Aufgabe 5: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (a, b, c):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$+2b + 5c = 88$ $+1a + 4b - 4c = -70$ $+6a + 7b + 3c = 83$	$a = 6$, $b = -1$, $c = 18$
2	$-4a + 3b + 9c = 96$ $+6a + 1b + 3c = 32$ $-1a + 4b - 4c = -16$	$a = 0$, $b = 5$, $c = 9$
3	$+6a + 4b + 7c = 110$ $+9a + 6b + 4c = 152$ $+8a - 4b - 5c = -22$	$a = 6$, $b = 15$, $c = 2$
4	$+5a - 2b + 4c = 96$ $-3a + 3b = -60$ $+7a + 9b = 12$	$a = 12$, $b = -8$, $c = 5$

5	$-3a + 8b - 3c = -23$ $+3b - 2c = -4$ $-1a + 9b - 2c = 0$	$a = 8$, $b = 2$, $c = 5$
6	$+5a + 3b + 2c = 38$ $+5a + 6b + 10c = 56$ $+7a + 5b + 1c = 58$	$a = 4$, $b = 6$, $c = 0$
7	$-5a + 6b - 5c = 95$ $+3a + 4c = -48$ $+8a + 4c = -68$	$a = -4$, $b = 5$, $c = -9$
8	$+4a + 9b - 5c = -27$ $+8b - 2c = -38$ $+5a + 4b + 5c = 180$	$a = 17$, $b = 0$, $c = 19$
9	$+1a + 3b - 2c = -12$ $+4a + 4b + 3c = 16$ $+7a - 1b + 6c = 92$	$a = 12$, $b = -8$, $c = 0$
10	$+9a + 3b - 2c = -33$ $+3a + 4b + 4c = 92$ $-3a + 3b - 2c = 15$	$a = -4$, $b = 11$, $c = 15$

Aufgabe 6: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (α, β, γ):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$-4\alpha + 2\beta - 5\gamma = -18$ $-2\alpha + 4\beta - 3\gamma = -26$ $-3\alpha + 4\beta - 4\gamma = -27$	$\alpha = -3$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$
2	$-4\alpha + 3\beta + 1\gamma = -50$ $-4\alpha - 3\beta + 4\gamma = 1$ $-2\alpha - 3\beta - 2\gamma = -1$	$\alpha = 8$, $\beta = -7$, $\gamma = 3$
3	$+2\alpha + 1\beta + 1\gamma = -17$ $-2\alpha - 4\beta + 2\gamma = 32$ $-3\alpha + 1\beta = 1$	$\alpha = -3$, $\beta = -8$, $\gamma = -3$
4	$+1\alpha - 1\beta + 2\gamma = -9$ $-1\alpha + 4\beta + 2\gamma = -32$ $+3\alpha - 5\beta + 4\gamma = -5$	$\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = -8$
5	$+5\alpha + 1\beta - 4\gamma = 73$ $-4\alpha - 2\beta = -46$ $-2\alpha + 3\beta + 2\gamma = -21$	$\alpha = 10$, $\beta = 3$, $\gamma = -5$

6	$-1\alpha + 1\beta + 1\gamma = -6$ $+2\alpha + 4\beta - 5\gamma = -45$ $-4\alpha + 2\beta = 0$	$\alpha = -5$, $\beta = -10$, $\gamma = -1$
7	$+5\alpha - 2\beta + 3\gamma = 40$ $+1\alpha - 4\beta + 2\gamma = 17$ $-3\alpha - 1\gamma = -18$	$\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 9$
8	$+2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 14$ $-1\alpha - 3\beta + 4\gamma = 14$ $+2\alpha - 3\beta - 4\gamma = -30$	$\alpha = -4$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$
9	$-2\alpha + 2\beta - 4\gamma = 24$ $+3\alpha - 3\gamma = 36$ $-3\alpha + 5\gamma = -50$	$\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = -7$
10	$+2\alpha + 1\beta - 5\gamma = 6$ $+3\alpha + 5\beta - 4\gamma = -12$ $+4\alpha + 1\beta - 1\gamma = -2$	$\alpha = 0$, $\beta = -4$, $\gamma = -2$

Aufgabe 7: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (i, j, k):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$-1i - 2j - 1k = -2$ $+1i - 1j + 7k = 38$ $-1i + 11j + 9k = -14$	$i = 6$, $j = -4$, $k = 4$
2	$+1i + 2k = -5$ $+15i + 1j + 2k = 71$ $+14i + 14j + 4k = 134$	$i = 5$, $j = 6$, $k = -5$
3	$+8i + 2j - 5k = 19$ $+11i - 3j - 3k = 45$ $+8i + 11j - 3k = -67$	$i = 0$, $j = -8$, $k = -7$
4	$-4i + 2j - 4k = -6$ $-4i + 10j + 3k = -6$ $+6i + 11j - 1k = 163$	$i = 13$, $j = 7$, $k = -8$
5	$+10i + 4j + 11k = 40$ $-4i - 3j + 8k = 20$ $+11j + 3k = -82$	$i = 5$, $j = -8$, $k = 2$
6	$+6i + 9j + 7k = 118$ $-2i + 1j + 12k = -98$ $+10i + 14j + 7k = 220$	$i = 8$, $j = 14$, $k = -8$

7	$+10i + 11j - 2k = 173$ $+9i + 12j + 6k = 174$ $-3i + 9j + 2k = 11$	$i = 12$, $j = 5$, $k = 1$
8	$+8i + 11j + 11k = -83$ $+12i + 10j + 13k = -136$ $+1i - 1j + 8k = -62$	$i = -9$, $j = 5$, $k = -6$
9	$-4i + 10j + 15k = 322$ $+15i + 1j - 4k = 63$ $-2j + 9k = 98$	$i = 7$, $j = 14$, $k = 14$
10	$+15i + 9j - 5k = 160$ $+1i - 1k = 2$ $+11i + 6j - 1k = 152$	$i = 15$, $j = 0$, $k = 13$

Aufgabe 8: Die folgenden linearen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen und drei Unbekannten haben eine eindeutige Lösung. Bestimme die Lösungen (A, B, C):

Nr.	*Lineares Gleichungssystem*	*Lösungen*
1	$-11A - 1B + 5C = 127$ $-1A - 3B - 2C = -11$ $+9A + 2B - 2C = -86$	$A = -8$, $B = 1$, $C = 8$
2	$-1A + 2C = 44$ $-11A - 13B - 6C = -98$ $+7A - 1B - 10C = -242$	$A = -8$, $B = 6$, $C = 18$
3	$-14A - 9B - 14C = 229$ $+8A - 1B + 3C = -102$ $+6A - 9B - 1C = -62$	$A = -10$, $B = 1$, $C = -7$
4	$-1A - 4B + 3C = 10$ $-10A - 5B - 4C = -1$ $+3A - 15B - 11C = -65$	$A = -2$, $B = 1$, $C = 4$
5	$-4A - 7B + 2C = 60$ $+9A - 4B - 7C = -222$ $+5A - 10B + 5C = 30$	$A = -9$, $B = 2$, $C = 19$
6	$-6A - 11B - 11C = -138$ $+3A - 9B - 12C = -228$ $-1A - 4B + 7C = 70$	$A = -10$, $B = 6$, $C = 12$
7	$-4A - 2B + 1C = -44$ $-3A - 15B - 13C = -348$ $-8A - 1B + 2C = -73$	$A = 13$, $B = 5$, $C = 18$

8	$-4A + 1B + 3C = 84$ $+6A - 13B - 3C = -260$ $+5A + 6B - 11C = -134$	$A = -4$, $B = 14$, $C = 18$
9	$+7A - 3B - 2C = 81$ $-5A - 3B + 4C = 27$ $+4A - 9B - 10C = -71$	$A = 14$, $B = -7$, $C = 19$
10	$-13A - 6B - 6C = -52$ $-11A - 4B + 2C = -100$ $-9A + 8B + 7C = -187$	$A = 10$, $B = -6$, $C = -7$

www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Mathematik-Aufgabenpool: Lineare Gleichungssysteme III / Aufgaben 943-950