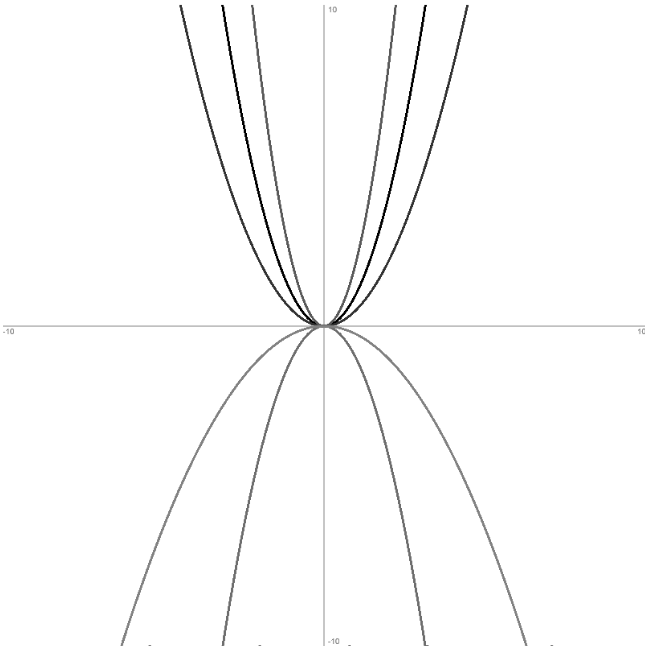
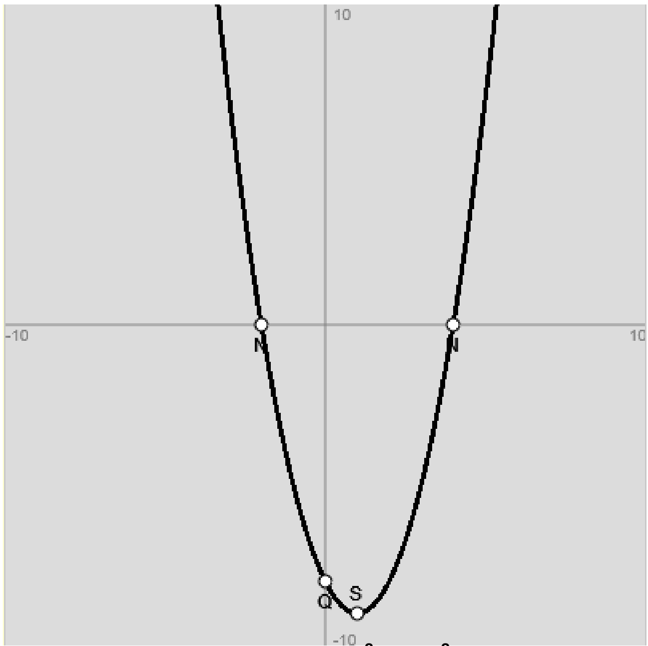
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Normalparabeln, spezielle allgemeine Parabeln I

Einleitung: Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + px + q$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + c$ (Scheitelform), $y = (x-x_1)(x-x_2)$ (Produktform) mit reellen Zahlen p, q, dem Scheitelpunkt S(d|c) und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel S(0|c) (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; für a=-1 ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist -1<a<1, so ist die Parabel gestaucht, ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.



$y = x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = 2x^2$, $y =-x^2$, $y = -025x^2$



$y = (x+2)(x-4) = (x-1)^2–9 = x^2–2x–8$

Aufgabe 1: Bestimme die Scheitel- und Normalform der Funktionsgleichung einer Normalparabel $y = x^2+px+q$, wenn der Scheitelpunkt S(d|c) der Parabel gegeben ist.

a) S(0|4)
b) S(-1|0)
c) S(4|2)
d) S(-2|-8)
e) S(-5|-5)
f) S(3|-1)
g) S(-2|1)
h) S(4|-3)

Vorgehensweise: Aus dem Scheitelpunkt S(d|c) folgt die Scheitelform der Normalparabel als: $y = (x-d)^2+c$, daraus die Normalform $y = x^2+px+q$, wenn die Klammer in der Scheitelform mit Hilfe der binomischen Formeln aufgelöst wird. Die binomischen Formeln lauten: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (1. binomische Formel); $(a-b)^2 = a^2–2ab+b^2$ (2. binomische Formel).

Lösungen: a) $y = x^2+4$; b) $y = (x+1)^2 = x^2+2x+1$; c) $y = (x-4)^2+2 = x^2-8x+18$; d) $y = (x+2)^2–8 = x^2+4x-4$; e) $y = (x+5)^2–5 = x^2+10x+20$; f) $y = (x-3)^2–1 = x^2-6x+8$; g) $y = (x+2)^2–1 = x^2+4x+3$; h) $y = (x-4)^2–3 = x^2-8x+13$.

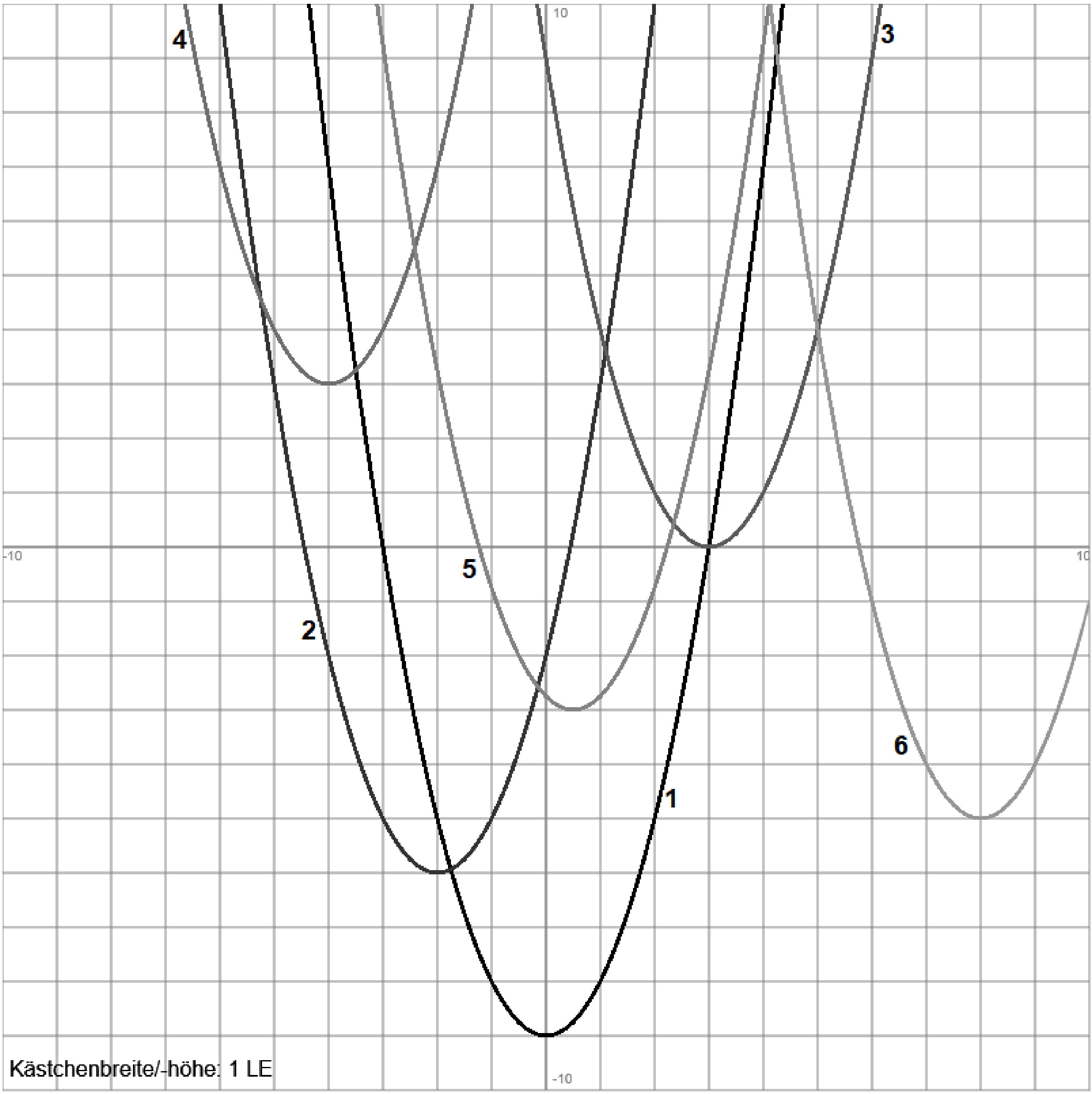
Aufgabe 2: Bestimme die Funktionsgleichung der Normalparabel, wenn als (teilweise) zu bestimmende Normalform und als Punkte P, Q oder Scheitelpunkt S gegeben sind:

a) $y = x^2 + 5x + q$, P(1|8)
b) $y = x^2 + px – 11$, P(-2|5)
c) $y = x^2 + px + 2$, P(4,5|17,75)
d) $y = x^2 + px + q$, P(0|4), Q(2|2)
e) $y = x^2 + px + q$, P(-2|1), Q(3,5|12)
f) $y = x^2 + px + q$, P(-3|0), Q(5|0)
g) $y = x^2 + px + q$, P(-4|-24), Q(-1,5|-20,25)
h) $y = x^2 + px + q$, S(-2,5|1)

Vorgehensweise: I. Einsetzen der Punkte P, Q in die Normalenform $y = x^2+px+q$ (Punktprobe) ergibt eine lineare Gleichung oder ein lineares Gleichungssystem, die oder das nach p und q aufgelöst wird. II. Im Fall, dass die Nullstellen x_1, x_2 der Normalparabel gegeben sind gilt die Produktform: $y = (x-x_1)(x-x_2)$, die durch Ausmultiplizieren der Klammern in die Normalform $y = x^2+px+q$ umgewandelt werden kann. III. Aus dem Scheitelpunkt S(d|c) folgt die Scheitelform der Normalparabel als: $y = (x-d)^2+c$, daraus die Normalform $y = x^2+px+q$.

Lösungen: a) $y = x^2+5x+2$; b) $y = x^2-6x-11$; c) $y = x^2-x+2$; d) $y = x^2-3x+4$; e) $y = x^2+0,5x-2$; f) $y = (x+3)(x-5) = x^2-2x-15$; g) $y = x^2+7x-12$.

Aufgabe 3: Bestimme die Funktionsgleichungen der Normalparabeln $y = x^2+px+q$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = x^2+px+q$ ist der Scheitelpunkt S(d|c) zu ermitteln; es ergibt sich die Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$ und daraus die Normalform.

Lösungen: 1) S(0|-9) -> $y = x^2-9$; 2) S(-2|-6) -> $y = x^2+4x-2$; 3) S(3|0) -> $y = x^2-6x+9$; 4) S(-4|3) -> $y = x^2+8x+19$; 5) S(0,5|-3) -> $y = x^2-x-2,75$; 6) S(8|-5) -> $y = x^2-16x+59$.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$, wenn als Koeffizienten a, c bzw. als Punkte P, Q oder Scheitelpunkt S gegeben sind:

a) a = -1, P(2|-2)

b) c = -5, P(-4|3)

c) a = $\frac{3}{4}$, P(0|-1)

d) a = -2, S(0|7)

e) a = $-\frac{2}{3}$, P(3|0)

f) S(0|-4), P(2|4)

g) P(0|-1), Q(4|12)

h) P(-2|1,75), Q(1|1)

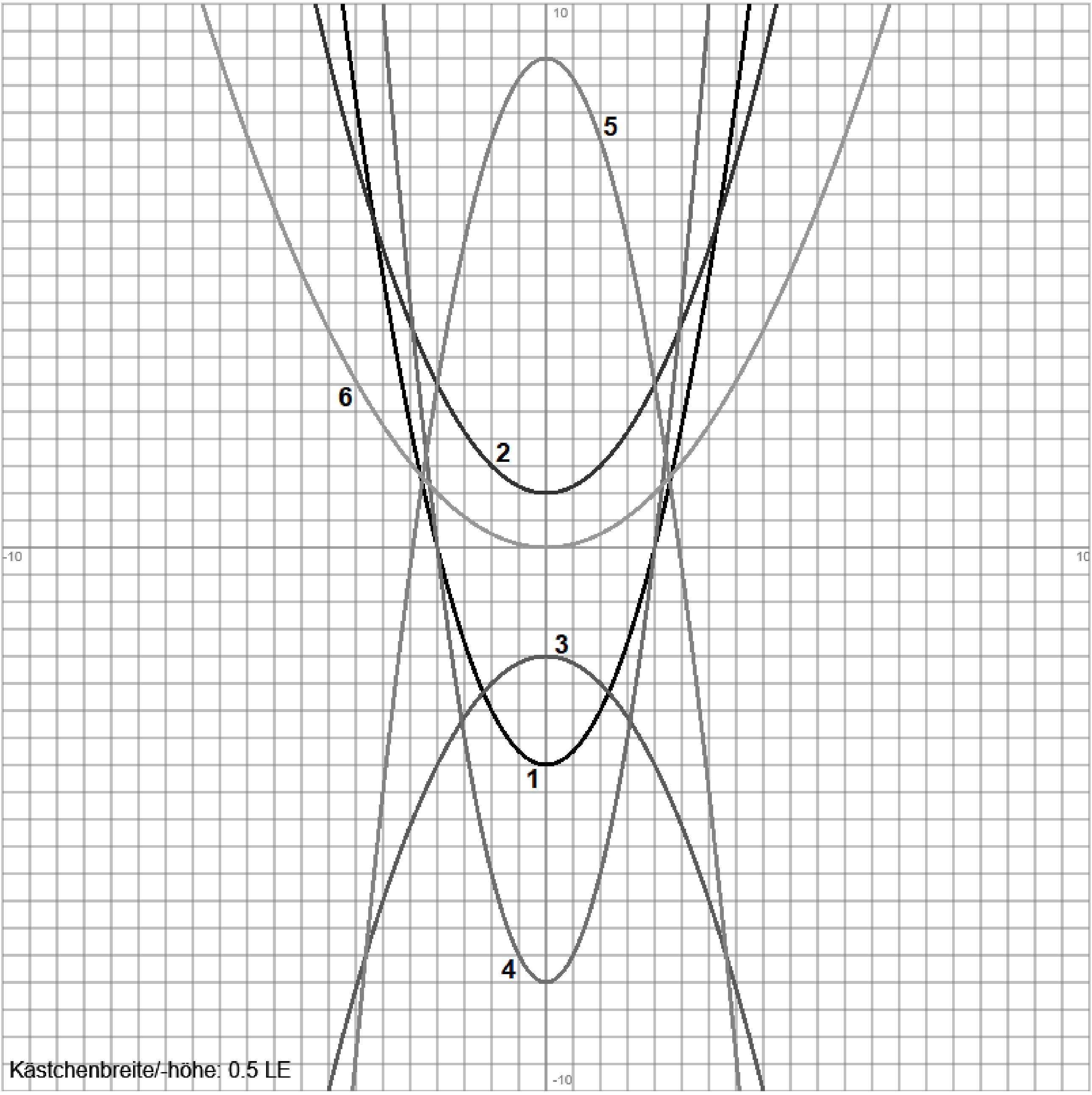
i) P(-2|-4), Q(3|11)

j) P(-5|-9,5), Q(4|-5)

Vorgehensweise: a) Mit den Koeffizienten a bzw. c und der Punktprobe mit dem Punkt P ergibt sich die Parabelgleichung $y = ax^2+c$. b) Aus dem Scheitelpunkt S(0|c) folgt der Koeffizient c der Parabelgleichung $y = ax^2+c$. c) Sind zwei Punkte P, Q vorgegeben, so ergibt sich mit den Punktproben der beiden Punkte ein lineares Gleichungssystem, das nach den Koeffizienten a und c aufzulösen ist.

Lösungen: a) $y = -x^2+2$; b) $y = 0,5x^2-5$; c) $y = 0,75x^2-1$; d) $y = -2x^2+7$; e) $y = -2x^2/3+6$; f) $y = 2x^2-4$; g) $y = 13x^2/16-1$; h) $y = 0,25x^2+0,75$; i) $y = 3x^2-16$; j) $y = -0,5x^2+3$.

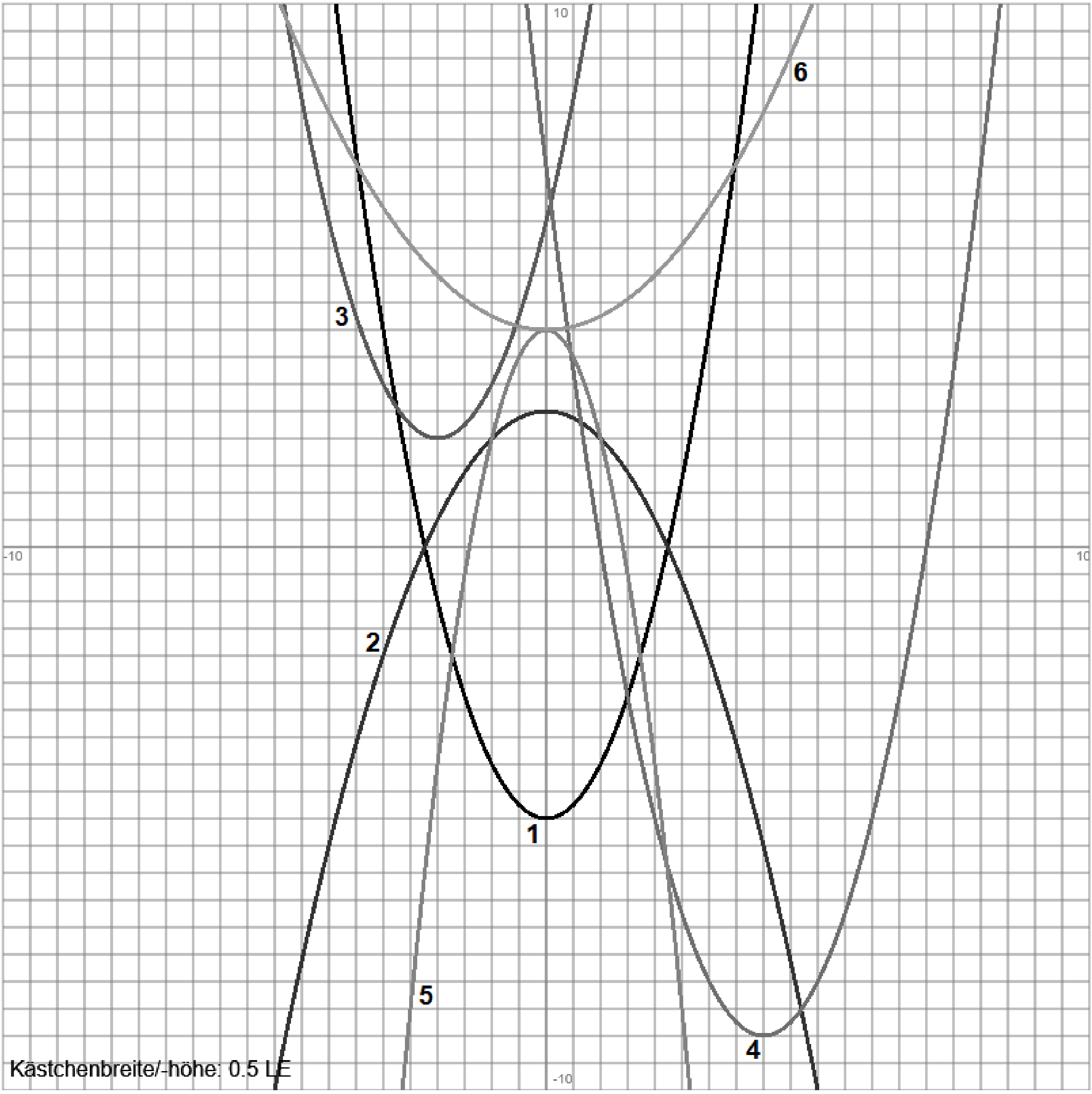
Aufgabe 5: Bestimme die Funktionsgleichungen der allgemeinen Parabeln $y = ax^2+c$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = ax^2+c$ ist zunächst der Scheitelpunkt S(0|c) und damit der Koeffizient c zu ermitteln. Der Koeffizient a kann danach durch Punktprobe mit einem geeigneten Parabelpunkt P(x|y) bestimmt oder als Differenz von y-Wert an der Stelle x=1 und Koeffizient c errechnet werden.

Lösungen: 1) S(0|-4), a=1 -> $y = x^2-4$; 2) S(0|1), a=0,5 -> $y = 0,5x^2+1$; 3) S(0|-2), a=-0,5 -> $y = -0,5x^2-2$; 4) S(0|-8), a=2 -> $y = 2x^2-8$; 5) S(0|9), a=-1,5 -> $y = -1,5x^2+9$; 6) S(0|0), a=0,25 -> $y = 0,25x^2$.

Aufgabe 6: Bestimme die Funktionsgleichungen der Normalparabeln $y = x^2+px+q$ bzw. der allgemeinen Parabeln $y = ax^2+c$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = x^2+px+q$ ist der Scheitelpunkt S(d|c) zu ermitteln; es ergibt sich die Scheitelform $y = (x–d)^2 + c$ und daraus die Normalform. II. Allgemeine Parabeln: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = ax^2+c$ ist zunächst der Scheitelpunkt S(0|c) und damit der Koeffizient c zu ermitteln. Der Koeffizient a kann danach durch Punktprobe mit einem geeigneten Parabelpunkt P(x|y) bestimmt oder als Differenz von y-Wert an der Stelle x=1 und Koeffizient c errechnet werden.

Lösungen: 1) S(0|-5), a=1 -> $y = x^2-5$; 2) S(0|2,5), a=-0,5 -> $y = -0,5x^2+2,5$; 3) S(-2|2), a=1 -> $y = x^2+4x+6$; 4) S(4|-9), a=1 -> $y = x^2-8x+7$; 5) S(0|4), a=-2 -> $y = -2x^2+4$; 6) S(0|4), a=0,25 -> $y = 0,25x^2+4$.

Aufgabe 7: Bestimme den Scheitelpunkt der Normal- bzw. allgemeinen Parabel y.

a) $y = 0,5x^2 – 3$

b) $y = (x–5)^2 + 3$

c) $y = x^2 – 7x + 12$

d) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 8$

e) $y = x^2 + 14x – 9$

f) $y = (x+3)^2 – 2$

g) $y = (x–4)(x+3)$

h) $y = x^2 + 9x + 22{,}25$

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Aus der Scheitelform der Parabel $y = (x–d)^2 + c$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts S(d|c). b) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2+px+q$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{p}{2} \,|\, q - \left(\frac{p}{2}\right)^2)$. c) Ist die Parabel in der Form $y = x^2+px+q$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $d = -\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. II. Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt S(0|c).

Lösungen: a) S(0|-3); b) S(5|3); c) S(3,5|-0,25); d) S(0|8); e) S(-7|-58); f) S(-3|-2); g) S(0,5|-12,25); h) S(-4,5|2).

Aufgabe 8: Wandle die Funktionsgleichung der Normalparabel y von der Scheitel- in die Normalform bzw. von der Normal- in die Scheitelform um.

a) $y = (x+1)^2 – 5$

b) $y = x^2 + 6x – 14$

c) $y = x^2 – 13x + 10$

d) $y = (x - \frac{1}{4})^2 + \frac{5}{3}$

e) $y = x^2 – 5x + 6$

f) $y = x^2 + 2x – 1$

g) $y = x^2 + 10x + 7$

h) $y = (x-3)^2 + \frac{11}{9}$

Vorgehensweise: I. Scheitelform -> Normalform: Aus Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2+c$ folgt die Normalform $y = x^2+px+q$, wenn die Klammer in der Scheitelform mit Hilfe der binomischen Formeln aufgelöst wird. II. Normalform -> Scheitelform: a) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2+px+q$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{p}{2} \,|\, q - \left(\frac{p}{2}\right)^2)$. b) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2+px+q$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $d = -\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt, woraus die Scheitelform $y = (x–d)^2 + c$ folgt.

Lösungen: a) $y = x^2+2x-4$; b) $y = (x+3)^2–23$; c) $y = (x-6{,}5)^2–32{,}25$; d) $y = x^2–0{,}5x+83/48$; e) $y = (x-2{,}5)^2–0{,}25$; f) $y = (x+1)^2–2$; g) $y = (x+5)^2–18$; h) $y = x^2–6x+92/9$.

Aufgabe 9: Welche Parabelgleichungen gehören zu welchen Parabelkurven?

Parabelgleichungen:

A: $y = 2x^2 – 3$

B: $y = (x–3)^2 + 4$

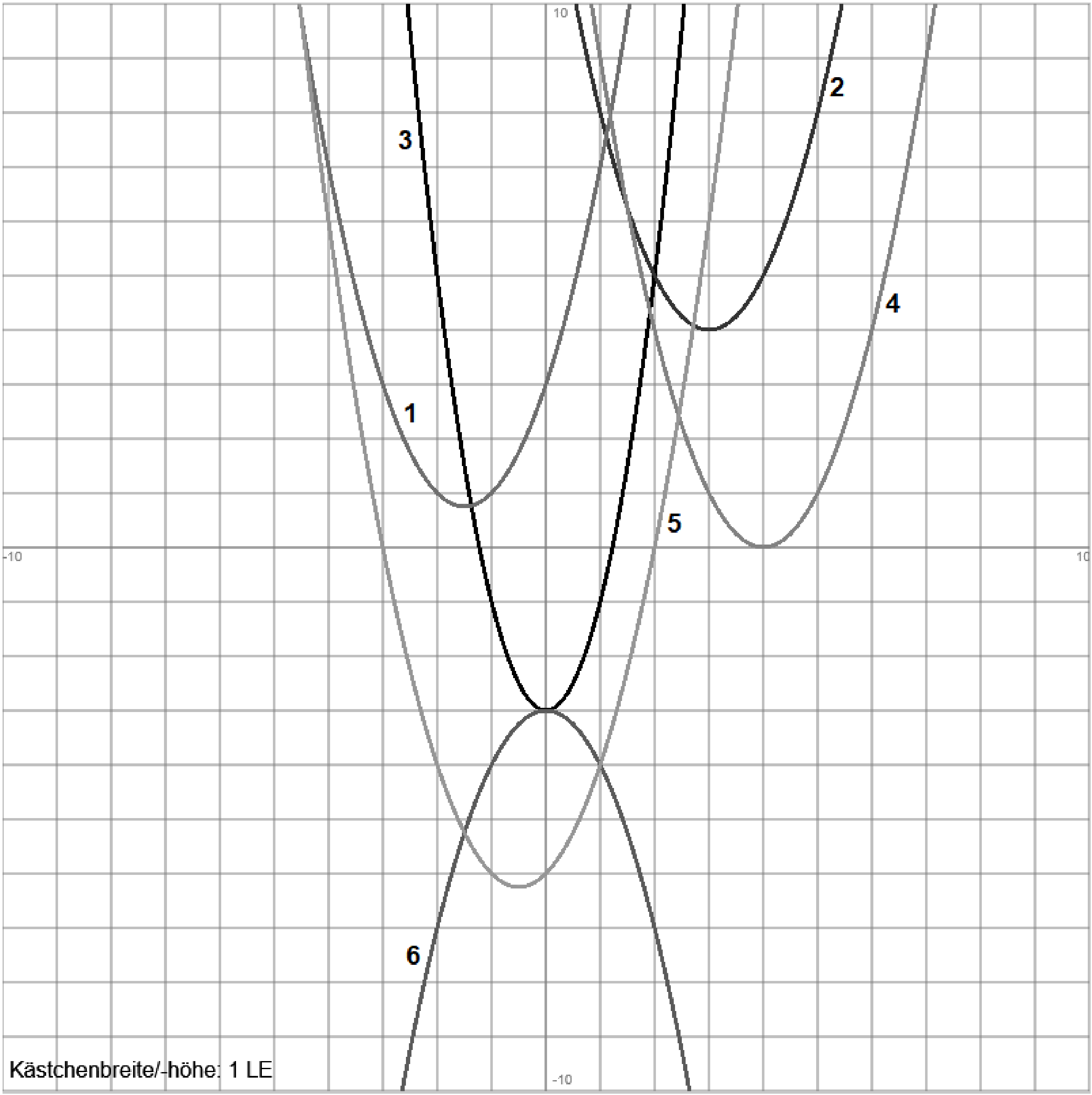
C: $y = -x^2 – 3$

D: $y = x^2 + 3x + 3$

E: $y = x^2 – 8x + 16$

F: $y = x^2 + x – 6$

Parabelkurven:



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Aus der Scheitelform der Parabel y = $(x–d)^2 + c$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts S(d|c). b) Ist die Parabel in der Normalform y = x^2+px+q gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt S($-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$). c) Ist die Parabel in der Form y = x^2+px+q gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: d = $-\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes x = $-\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten y = $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ = c der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. II. Allgemeine Parabeln der Form y = ax^2+c haben den Scheitelpunkt S(0|c). III. Mit dem Scheitelpunkt S(d|c) lässt sich bei Normalparabeln die Parabelkurve eindeutig ermitteln; bei allgemeinen Parabeln y = ax^2+c ist noch der Koeffizient a zu beachten, der sich ergibt, wenn man sich im Koordinatensystem vom Scheitelpunkt der Parabel 1 Längeneinheit nach rechts und |a| Längeneinheiten nach oben (a>0) bzw. unten (a<0) fortbewegt, um den Parabelpunkt der Stelle d+1 zu erreichen.

Lösungen: A – 3; B – 2; C – 6; D – 1; E – 4; F – 5.

Aufgabe 10: Zeichne die Normal- und allgemeinen Parabeln y in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

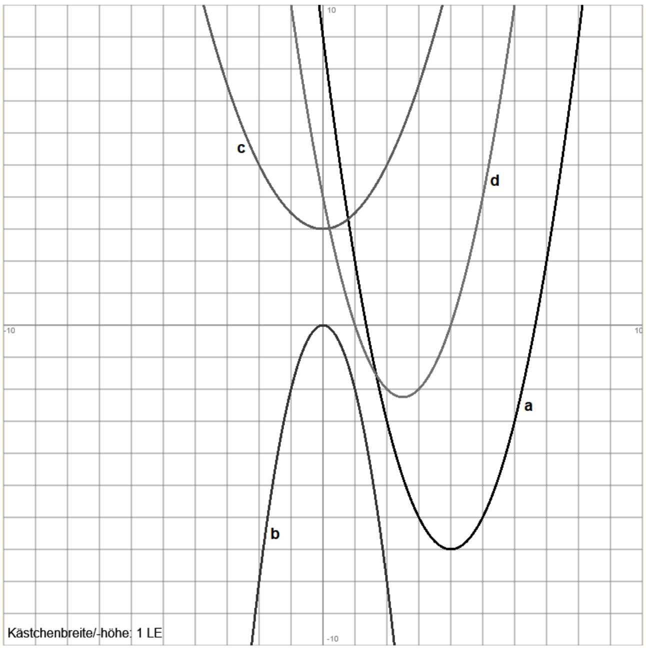
a) y = $(x-4)^2 - 7$ | b) y = $-2x^2$

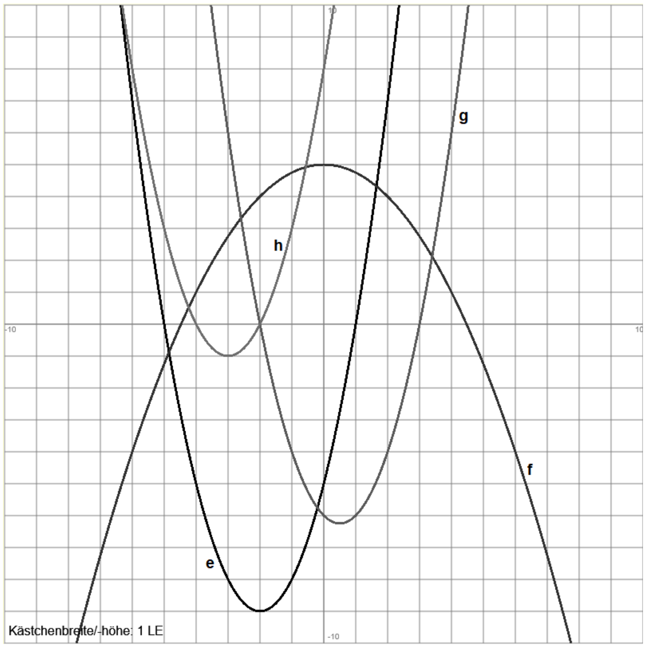
c) y = $0,5x^2 + 3$ | d) y = $x^2 - 5x + 4$

e) y = $x^2 + 4x - 5$ | f) y = $-\frac{1}{4}x^2+5$

g) y = $x^2 - x - 6$ | h) y = $(x+3)^2 - 1$

Vorgehensweise: I. Liegt die Scheitelform der Normalparabel y = $(x-d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt S(d|c); im Fall der Normalform y = x^2+px+q kann die Bestimmung des Scheitelpunkts S(d|c) mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder vermöge d = $-\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes x = $-\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten y = $q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ = c der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. II. Eine x-y-Wertetabelle ergänzt die Bestimmung des Scheitelpunkts S(d|c), wobei wegen der Symmetrie der links und rechts vom Scheitel liegenden Parabelpunkte die Gleichheit der y-Werte der Parabelpunkte gilt (besonders bei ganzzahligen x-Werten in der Tabelle); ansonsten können vom gegebenen Scheitelpunkt bzw. von einem vorhergehenden Parabelpunkt aus im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und $1\cdot a$, $3\cdot a$, $5\cdot a$, $7\cdot a$, … (ungerade Zahlen aufsteigend) Längeneinheiten nach oben (a>0) bzw. unten (a<0) zum nächsten Parabelpunkt abgemessen werden (Normalparabel: a=1).





Lösungen: a) S(4|-7), Normalparabel; b) S(0|0), a=-2, allgemeine Parabel; c) S(0|3), a=0,5, allgemeine Parabel; d) S(2,5|-2,25), Normalparabel; e) S(-2|-9), Normalparabel; f) S(0|5), a=-0,25, allgemeine Parabel; g) S(0,5|-6,25), Normalparabel; h) S(-3|-1), Normalparabel.

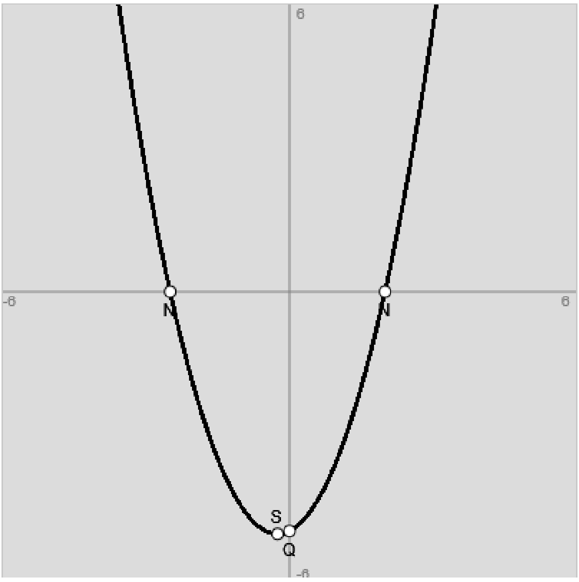
Aufgabe 11: Bestimme die Nullstellen der Normal- und allgemeinen Parabel y.

a) y = $2x^2 - 18$ | b) y = $-\frac{1}{2}x^2 - 3$

c) y = $x^2 - 5x$ | d) y = $\frac{1}{4}x^2 - 1$

e) y = $(x+5)^2 - 9$ | f) y = $x^2 + 4x - 32$

g) y = $-\frac{1}{6}x^2+1$ | h) y = $x^2 - \frac{10}{3}x + 1$



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel y = $(x-d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0$ => $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: b) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$ => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel y = ax^2+c ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

$y=x^2+0,5x-5$: S(-0,25|-5,0625), Q=S_y(0|-5), N_1(-2,5|0), N_2(2|0)

Lösungen: a) N_1(-3|0), N_2(3|0); b) keine Nullstellen; c) N_1(0|0), N_2(5|0); d) N_1(-2|0), N_2(2|0); e) N_1(-8|0), N_2(-2|0); f) N_1(-8|0), N_2(4|0); g) N_1(-√6|0), N_2(√6|0); h) $N_1(\frac{1}{3}|0)$, N_2(3|0).

Aufgabe 12: Bestimme die Schnittpunkte der allgemeinen Parabel y mit den Achsen des Koordinatensystems.

a) y = $x^2 - 4x + 4$	b) y = $-1,5x^2 + 6$
c) y = $\frac{1}{2}x^2 + 12$	d) y = $x^2 + 5x - 14$
e) y = $(x-2)^2 + 5$	f) y = $x^2 - 0,5x - 18$
g) y = $x^2 + 2x + 15$	h) y = $x^2 + 10x$

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = x^2+px+q mit y = q der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|q). b) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel y = $(x-d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: 1) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0$ => $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$ => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = ax^2+c mit y = c der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|c). b) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel y = ax^2+c ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) S_y(0|4), N(2|0) = S(2|0); b) S_y(0|6) = S(0|6), N_1(-2|0), N_2(2|0); c) S_y(0|12) = S(0|12), keine Nullstellen; d) S_y(0|-14), N_1(-7|0), N_2(2|0); e) S_y(0|9), keine Nullstellen; f) S_y(0|-40,96), N_1(-4|0), N_2(4,5|0); g) S_y(0|15), keine Nullstellen; h) S_y(0|0) = N_1(0|0), N_2(-10|0).

Aufgabe 13: Für die gegebenen Parabeln y sind der Scheitelpunkt, die Nullstellen und der Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen.

a) y = $x^2 - 10,24$	b) y = $-0,5x^2 + 8$
c) y = $(x+2,5)^2 + 2$	d) y = $(x-3)^2 - 4$
e) y = $x^2 - 5x + 6$	f) y = $x^2 + 0,5x - 5$
g) y = $\frac{8}{5}x^2 + 2$	h) y = $x^2 + 4x + 6$
i) y = $x^2 - 2x - 80$	j) y = $(x+4,5)^2 - 25$

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x–d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt S(d|c); im Fall der Normalform $y = x^2+px+q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts S(d|c) mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder vermöge d = $-\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes x = $-\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten y = $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ = c der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $y = x^2+px+q$ mit y = q der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x–d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: 1) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0$ => $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$ => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt S(0|c). b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $y = ax^2+c$ mit y = c der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) S(0|-10,24), N(-3,2|0), N(3,2|0), S_y(0|-10,24); b) S(0|8), N(-4|0), N(4|0), S_y(0|8); c) S(-2,5|2), S_y(0|8,25); d) S(3|-4), N(1|0), N(5|0), S_y(0|5); e) S(2,5|-0,25), N(2|0), N(3|0), S_y(0|6); f) S(-0,25|-5,0625), N(-2,5|0), N(2|0), S_y(0|-5); g) S(0|2), S_y(0|2); h) S(-2|2), S_y(0|6); i) S(1|-81), N(-8|0), N(10|0), S_y(0|-80); j) S(-4,5|-25), N(-9,5|0), N(0,5|0), S_y(0|-4,75).

Aufgabe 14: Berechne die Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.

a) $y = x^2 + x – 12$, $y = -3x – 7$

b) $y = 2x^2 + 5$, $y = 4x + 11$

c) $y = (x+1)^2 – 3$, $y = -4$

d) $y = x^2 + 3x + 1$, $y = -x – 3$

e) $y = \frac{2}{5}x^2 + 7$, $y = 0{,}5x – 3$

f) $y = x^2 – 5x + 8{,}25$, $y = 2$

g) $y = x^2 – 3x – 5$, $y = 2x – 11$

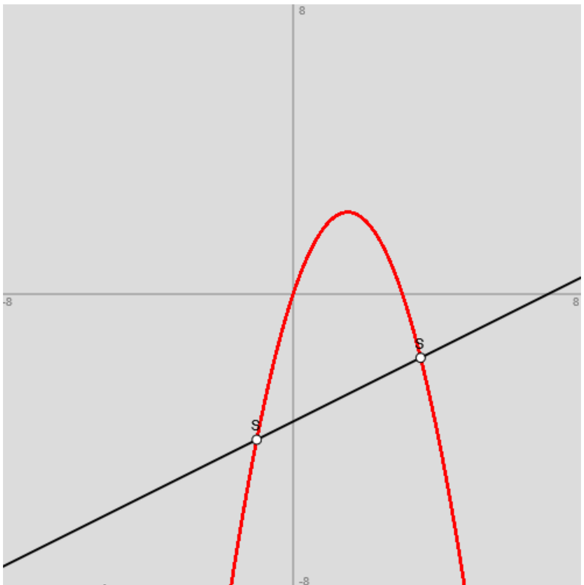
h) $y = (x+0{,}5)^2 – 5$, $y = -\frac{2}{3}x$

i) $y = (x–2)^2 + 1$, $y = 6x – 20$

j) $y = x^2 + 10x + 10$, $y = 5x + 6$

k) $y = x^2 – 13x + 1$, $y = -10{,}1x$

l) $y = -3x^2 + 16$, $y = 3x + 10$



$y=-x^2+3x$, $y=0{,}5x–3{,}5$: $S_1(-1|-4)$, $S_2(3{,}5|-1{,}75)$

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = x^2+px+q$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $x^2+px+q = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (*) der Form: $x^2+(b-m)x+q-b = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{m-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m-b}{2}\right)^2 + b - q}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. II. Allgemeine Parabeln: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = ax^2+c$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $ax^2+c = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (**) der Form: $ax^2–mx+c-b = 0$ bzw.: $x^2–mx/a+(c-b)/a = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{m}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \frac{b-c}{a}}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. III. Hat die Gleichung (*) bzw. (**) zwei Lösungen, ist die Gerade eine Sekante zur Parabel, hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante.

Lösungen: a) $S_1(-5|8)$, $S_2(1|-10)$; b) $S_1(-1|7)$, $S_2(3|23)$; c) keine Schnittpunkte; d) $S_1(-2|-1)$; e) keine Schnittpunkte; f) $S_1(2,5|2)$, g) $S_1(2|-7)$, $S_2(3|-5)$; h) $S_1(-19/6|19/9)$, $S_2(1,5|-1)$; i) $S_1(5|10)$; j) $S_1(-4|-14)$, $S_2(-1|1)$; k) $S_1(0,4|4,04)$, $S_2(2,5|25,25)$; l) $S_1(-2|4)$, $S_2(1|13)$.

Aufgabe 15: Berechne die Schnittpunkte zwischen den Parabeln.

a) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

b) $y = x^2 – 4$, $y = 0,5x^2 – 3,5$

c) $y = x^2 + 4x – 3$, $y = x^2 + 2x + 11$

d) $y = x^2 – x + 5$, $y = x^2 + 2x + 5$

e) $y = x^2 – 7x + 21$, $y = x^2 + 3,5x$

f) $y = (x–1)^2 + 6$, $y = x^2 + 5x – 10,5$

g) $y= (x+5,5)^2$, $y = (x–4)^2 + 52,25$

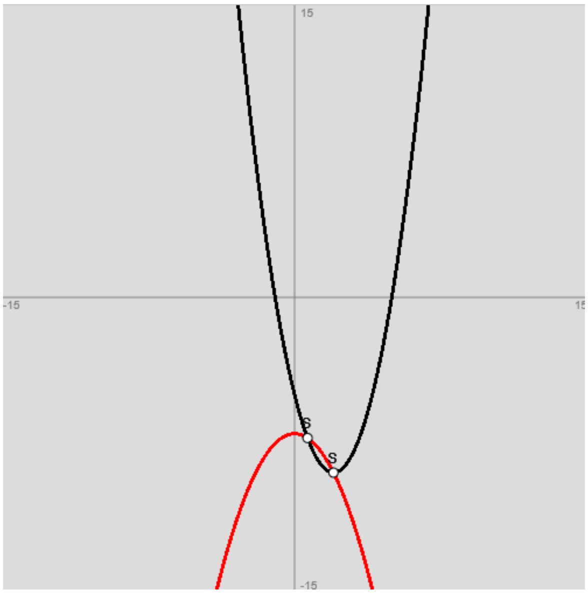
h) $y = x^2 + 6x – 10.$ $y = -x^2 + 10$

i) $y = x^2 + 11x – 2$, $y = 3x^2 + 12$

j) $y = (x+2)^2 + 3$, $y = \frac{1}{5}x^2 + 47$

k) $y = (x–4)^2 – 10$, $y = x^2 – 8x + 24$

l) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $y= (x–5)^2 + 3,5$



$y=x^2–4x–5$, **$y=-0,5x^2–7$**: $S_1(\frac{2}{3}|-\frac{65}{9})$, $S_2(2|-9)$

Vorgehensweise: I. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln $y = x^2+p_1x+q_1$ und $y = x^2+p_2x+q_2$ ist die Gleichung: $x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form: $(p_1-p_2)x = q_2-q_1$, die als Lösung: $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ besitzt ($p_1 \neq p_2$). Mit dem y-Wert $y_1 = x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2x_1 + q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. II. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel $y = x^2+px+q$ und einer allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2+px+q = ax^2+c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (**) von der Form: $(a-1)x^2–px+c-q = 0$ bzw.: $x^2–px/(a-1)+(c-q)/(a-1)$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{p}{2(a-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2 + \frac{q-c}{a-1}}$ ($a \neq 1$). Mit den y-Werten $y_{1,2} = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. III. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2+c_1$ und $y = a_2x^2+c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2+c_1 = a_2x^2+c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form: $(a_1-a_2)x^2 = c_2-c_1$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2}}$ ($a_1 \neq a_2$). Mit den y-Werten $y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. IV. Die quadratischen Gleichungen (**) und (***) können zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung haben, die lineare Gleichung (*) eine oder keine Lösung.

Lösungen: a) $S_1(-2|6)$, $S_2(2|6)$; b) $S_1(-1|-3)$, $S_2(1|-3)$; c) $S_1(7|74)$; d) $S_1(0|5)$; e) $S_1(2|11)$; f) $S_1(2,5|8,25)$; g) $S_1(2|56,25)$; h) $S_1(-5|-15)$, $S_2(2|6)$; i) $S_1(2|24)$, $S_2(3,5|48,75)$; j) $S_1(-10|67)$, $S_2(5|52)$; k) keine Schnittpunkte; l) $S_1(3|7,5)$, $S_2(17|147,5)$.

Aufgabe 16: a) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem Scheitel und Nullstellen der Parabel $y = x^2–2x–8$ als Ecken hat.

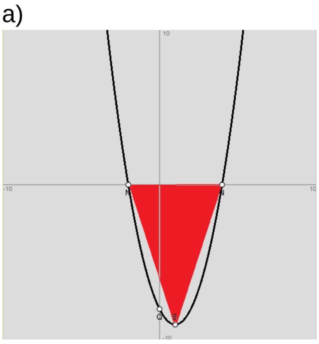
b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem y-Achsenabschnittspunkt und Nullstellen der Parabel $y = x^2–7x+6$ als Ecken hat.

c) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks, dessen Ecken Scheitel und Nullstellen der Parabel $y = 16–2,25x^2$ sind?

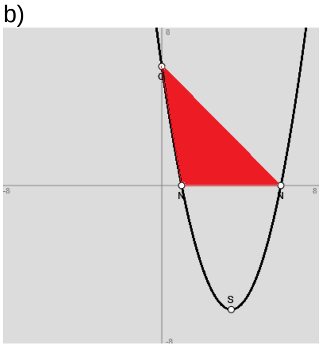
d) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem Scheitel, y-Achsenabschnittspunkt und positive Nullstelle der Parabel $y = x^2–5x–6$ als Ecken hat?

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x–d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(d|c)$; im Fall der Normalform $y = x^2+px+q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|c)$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder vermöge d = $-\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes x = $-\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten y = $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ = c der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = x^2+px+q mit y = q der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|q). c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel y = $(x–d)^2$ + c = x^2+px+q ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: 1) (Scheitelform:) $(x-d)^2$+c = 0 => $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) x^2+px+q = 0 => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form y = ax^2+c haben den Scheitelpunkt S(0|c). b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für y = ax^2+c mit y = c der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|c). c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel y = ax^2+c ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: ax^2+c = 0 => $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. III. Es gilt für ein Dreieck ΔABC zwischen Scheitel, y-Achsenabschnitt und/oder Nullstellen einer allgemeinen Parabel: Fläche A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe); Umfang u = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ mit: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$ für Punkte $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ als Abstand. Für ein Dreieck ΔABC lässt sich die Fläche auch als Fläche eines das Dreieck umfassenden Rechtecks minus der Flächen an das Dreieck angrenzender rechtwinkliger Dreiecke berechnen.

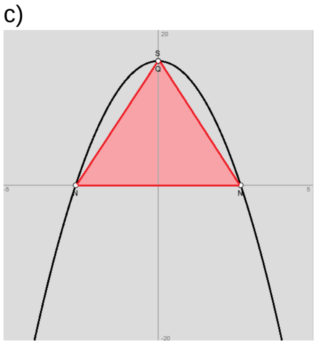
a)



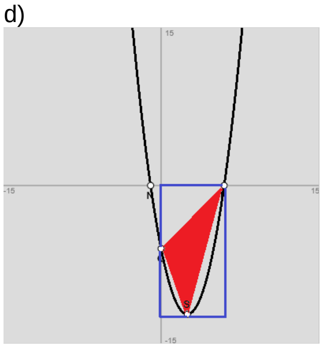
b)



c)



d)



Lösungen: a) S(1|-9), S_y(0|-8), N_1(-2|0), N_2(4|0) -> g=6, h=9 -> A=27 FE; b) S_y(0|6), N_1(1|0), N_2(6|0) -> g=5, h=6 -> A=15 FE; c) S(0|16) = S_y(0|16), $N_1(-\frac{8}{3}|0)$, $N_2(\frac{8}{3}|0)$ -> $\overline{N_1N_2} = \frac{16}{3}$, $\overline{SN_1} = \overline{SN_2}$ = 16,22 -> u = 37,77 LE; d) S(2,5|-12,25), S_y(0|-6), [N_1(-1|0)], N_2(6|0) -> Rechteckfläche A_R, Flächen rechtwinkliger Dreiecke A_1, A_2, A_3 -> A = A_R – A_1 – A_2 – A_3 = 6·12,25 – 3,5·12,25/2 – 6·6/2 – 2,5·6,25/2 = 26,25FE.

Aufgabe 17: a) Bestimme den Abstand zwischen den Schnittpunkten der Parabel y = $-\frac{1}{3}x^2$+12 und der Geraden y = 2x+3.

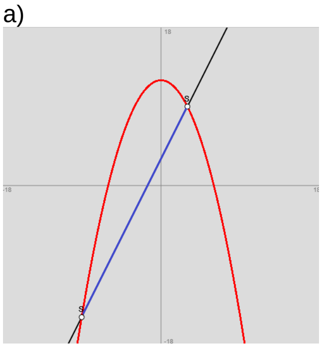
b) Die Parabel p_1: y = x^2–8x+13 wird um 5 Längeneinheiten nach links und um 6 Längeneinheiten nach oben zur Parabel p_2 verschoben. Wo schneiden sie die beiden Parabeln?

c) Gegeben sind die Parabeln p_1: y = $-\frac{1}{5}x^2$+8 und p_2: y = $\frac{3}{10}x^2$. Die Scheitelpunkte bilden zusammen mit den Schnittpunkten der beiden Parabeln ein Viereck. Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks. Um welche Art von Viereck handelt es sich?

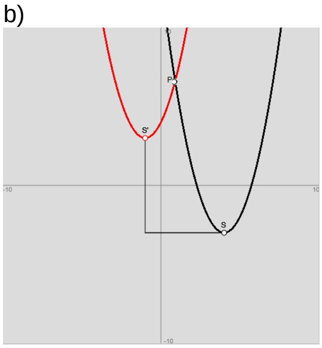
d) Die Schnittpunkte von Parabel y = x^2+8x und Geraden y = -4x+20 bilden zusammen mit dem Scheitelpunkt der Parabel ein Dreieck. Berechne dessen Umfang.

Vorgehensweise: I. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln y = $x^2+p_1x+q_1$ und y = $x^2+p_2x+q_2$ ist die Gleichung: $x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form: $(p_1-p_2)x = q_2-q_1$, die als Lösung: $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ besitzt ($p_1 \neq p_2$). Mit dem y-Wert $y_1 = x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2x_1 + q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. II. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel y = x^2+px+q und einer allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2+px+q = ax^2+c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (**) der Form: $(a-1)x^2–px+c-q = 0$ bzw.: $x^2–px/(a-1)+(c-q)/(a-1)$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{p}{2(a-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2 + \frac{q-c}{a-1}}$ ($a\neq1$). Mit den y-Werten $y_{1,2} = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. III. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2+c_1$ und $y = a_2x^2+c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2+c_1 = a_2x^2+c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form: $(a_1-a_2)x^2 = c_2-c_1$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}}$ ($a_1\neq a_2$). Mit den y-Werten $y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. IV. Der Abstand zwischen zwei (Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ berechnet sich als: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$. V. $x_V>0$ bedeutet eine Verschiebung (um x_V Längeneinheiten) nach rechts, $x_V<0$ nach links; $y_V>0$ bedeutet eine Verschiebung nach oben, $y_V<0$ nach unten. Mit der Scheitelform $y = (x-d)^2+c$ ist die Gleichung der verschobenen Parabel $y = (x-d-x_V)^2+c+y_V$, aus dem Scheitelpunkt S(d|c) wird durch Verschiebung um x_V bzw. y_V der Scheitelpunkt $S'(d-x_V|c+y_V)$. VI. Für einen Drachen ABCD gilt: Fläche A = ef/2 (e, f als Diagonalen). VII. Es gilt für ein Dreieck ΔABC: Umfang u = $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ mit: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$ für Punkte $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ als Abstand.

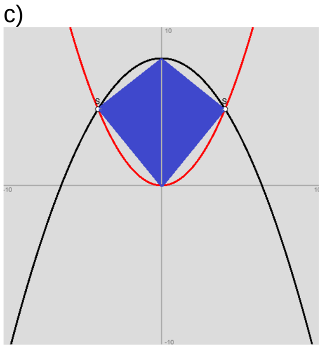
a)



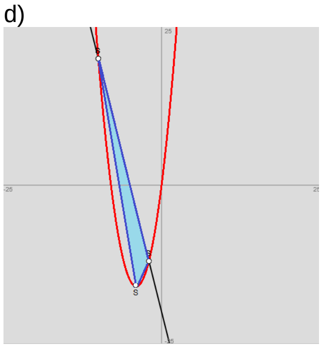
b)



c)



d)



Lösungen: a) $S_1(-9|-15)$, $S_2(3|9)$, $\overline{S_1S_2}$ = 26,83 LE; b) $y = x^2–8x+13$ -> S(4|-3) -> Verschiebung -> S'(-1|3) -> $y = x^2+2x+4$ -> Schnittpunkt P(0,9|6,61); c) p_1 -> $S_1(0|8)$, p_2 -> $S_2(0|0)$, Schnittpunkte $P_1(-4|4,8)$, $P_2(4|4,8)$ -> Drache $S_1P_2S_2P_2$ -> e=9,6, f=8 -> A = ef/2 = 38,4 FE; d) Schnittpunkte P(-10|20), Q(-2|-12), Scheitel S(-4|-16) -> u = $\overline{PQ}+\overline{PS}+\overline{QS}$ = 33+36,5+4,47 = 73,97 LE.

Aufgabe 18: a) Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Scheitel und den y-Achsenabschnittspunkt der Parabel $y = x^2–7x+10$?

b) Die Parabeln p_1: $y = x^2+4x+4$ und p_2: $y = -3x^2+28$ schneiden sich in zwei Schnittpunkten. Wie lautet der Gleichung der Geraden durch diese Schnittpunkte?

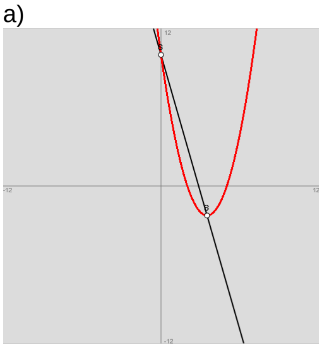
c) Eine Normalparabel schneidet die Gerade $y = 2x+7$ an den Stellen x=-2 und x=3. Bestimme die Gleichung der Parabel.

d) Wie heißt Gleichung der Geraden $y = mx+3$, die Tangente an die Parabel $y = x^2–6x+4$ ist? Bestimme die Geradensteigung m. Wie lautet der Schnittpunkt von Tangente und Parabel?

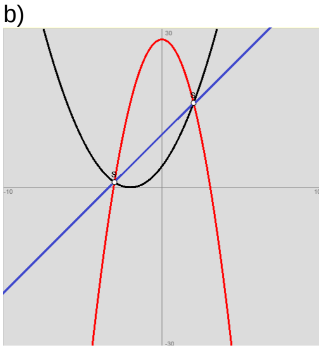
Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x–d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt S(d|c); im Fall der Normalform $y = x^2+px+q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts S(d|c) mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder vermöge d = $-\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes x = $-\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten y = $q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ = c der Scheitelpunkt S(d|c) ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $y = x^2+px+q$ mit y = q der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x–d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: y = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: 1) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0$ => $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$

=> $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = ax^2+c$ mit $y = c$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0$ => $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. III. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = x^2+px+q$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $x^2+px+q = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (*) der Form: $x^2+(b-m)x+q-b = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2}=\frac{m-b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m-b}{2}\right)^2+b-q}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2}=mx_{1,2}+b=x_{1,2}^2+px_{1,2}+q$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. b) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = ax^2+c$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $ax^2+c = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (**) der Form: $ax^2–mx+c-b = 0$ bzw.: $x^2–mx/a+(c-b)/a = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2}=\frac{m}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\frac{b-c}{a}}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2}=mx_{1,2}+b=ax_{1,2}^2+c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. c) Hat die Gleichung (*) bzw. (**) zwei Lösungen, ist die Gerade eine Sekante zur Parabel, hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante. Im Fall der Tangente müssen die Diskriminanten der Wurzeln in den Lösungen gleich 0 sein, also: (*) -> $\left(\frac{m-b}{2}\right)^2+b-q=0$, (**) -> $\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\frac{b-c}{a}=0$, woraus m bzw. b der Tangenten zu bestimmen sind. IV. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln $y = x^2+p_1x+q_1$ und $y = x^2+p_2x+q_2$ ist die Gleichung: $x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form: $(p_1-p_2)x = q_2-q_1$, die als Lösung: $x_1=\frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$ besitzt ($p_1\neq p_2$). Mit dem y-Wert $y_1=x_1^2+p_1x_1+q_1=x_1^2+p_2x_1+q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. b) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel $y = x^2+px+q$ und einer allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2+px+q = ax^2+c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (**) der Form: $(a-1)x^2–px+c-q = 0$ bzw.: $x^2–px/(a-1)+(c-q)/(a-1)$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2}=\frac{p}{2(a-1)}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2+\frac{q-c}{a-1}}$ ($a\neq 1$). Mit den y-Werten $y_{1,2}=x_{1,2}^2+px_{1,2}+q=ax_{1,2}^2+c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. c) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2+c_1$ und $y = a_2x^2+c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2+c_1 = a_2x^2+c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form: $(a_1-a_2)x^2 = c_2-c_1$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}}$ ($a_1\neq a_2$). Mit den y-Werten $y_{1,2}=a_1x_{1,2}^2+c_1=a_2x_{1,2}^2+c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. V. Aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ lässt sich eine Gerade der Form $y = mx+b$ bestimmen mit: $m = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$ und $b = y_P–mx_P$. Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ und die Steigung m vor, so lässt sich $b = y_P–mx_P$ direkt bestimmen. VI. Für eine nach oben geöffnete Normalparabel $y = x^2+px+q$ bestimmen sich aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ die Koeffizienten p, q mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additions-, Gleichsetzungsverfahren).

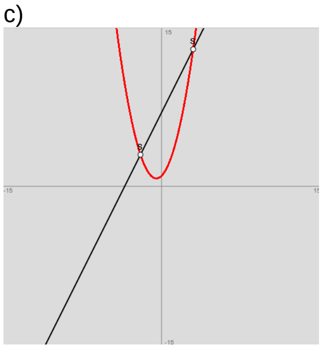
a)



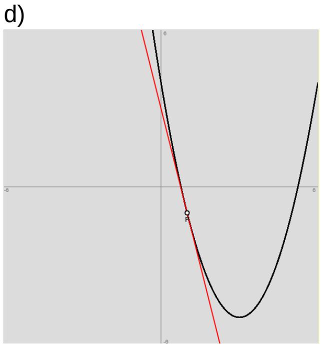
b)



c)



d)



Lösungen: a) Parabel -> $S(3{,}5|-2{,}25)$, $S_y(0|10)$ -> Gerade $y = -3{,}5x+10$; b) Schnittpunkte $S_1(-3|1)$, $S_2(2|16)$ -> Gerade $y = 3x+10$; c) Schnittpunkte $S_1(-2|3)$, $S_2(3|13)$ -> Normalparabel $y = x^2+x+1$; d) $m=-4$ -> Tangente $y = -4x+3$ -> Schnittpunkt $P(1|-1)$.

Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Normalparabeln, spezielle allgemeine Parabeln / Aufgaben 517-534