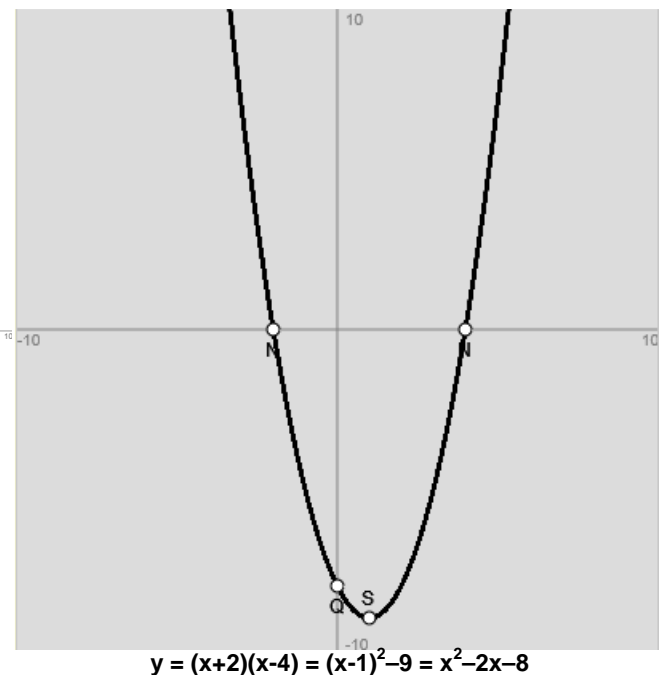
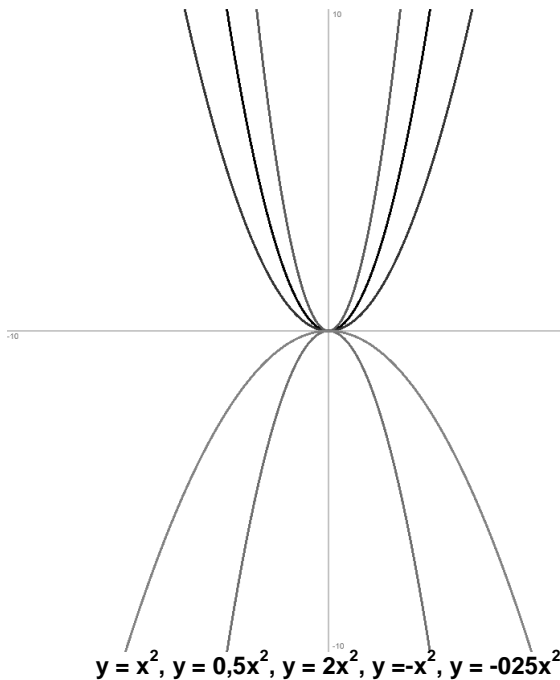


Mathematik-Aufgabenpool

> Normalparabeln, spezielle allgemeine Parabeln I

Einleitung: Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + px + q$ (Normalform), $y = (x-d)^2 + c$ (Scheitelform), $y = (x-x_1)(x-x_2)$ (Produktform) mit reellen Zahlen p, q , dem Scheitelpunkt $S(d|c)$ und den Nullstellen $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel $S(0|c)$ (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$, nach unten geöffnet, wenn $a < 0$; für $a = -1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1 < a < 1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a < -1$ oder $a > 1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.



Aufgabe 1: Bestimme die Scheitel- und Normalform der Funktionsgleichung einer Normalparabel $y = x^2 + px + q$, wenn der Scheitelpunkt $S(d|c)$ der Parabel gegeben ist.

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $S(0 4)$ | b) $S(-1 0)$ |
| c) $S(4 2)$ | d) $S(-2 -8)$ |
| e) $S(-5 -5)$ | f) $S(3 -1)$ |
| g) $S(-2 1)$ | h) $S(4 -3)$ |

Vorgehensweise: Aus dem Scheitelpunkt $S(d|c)$ folgt die Scheitelform der Normalparabel als: $y = (x-d)^2 + c$, daraus die Normalform $y = x^2 + px + q$, wenn die Klammer in der Scheitelform mit Hilfe der binomischen Formeln aufgelöst wird. Die binomischen Formeln lauten: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1. binomische Formel); $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2. binomische Formel).

Lösungen: a) $y = x^2 + 4$; b) $y = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$; c) $y = (x-4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$; d) $y = (x+2)^2 - 8 = x^2 + 4x - 4$; e) $y = (x+5)^2 - 5 = x^2 + 10x + 20$; f) $y = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$; g) $y = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3$; h) $y = (x-4)^2 - 3 = x^2 - 8x + 13$.

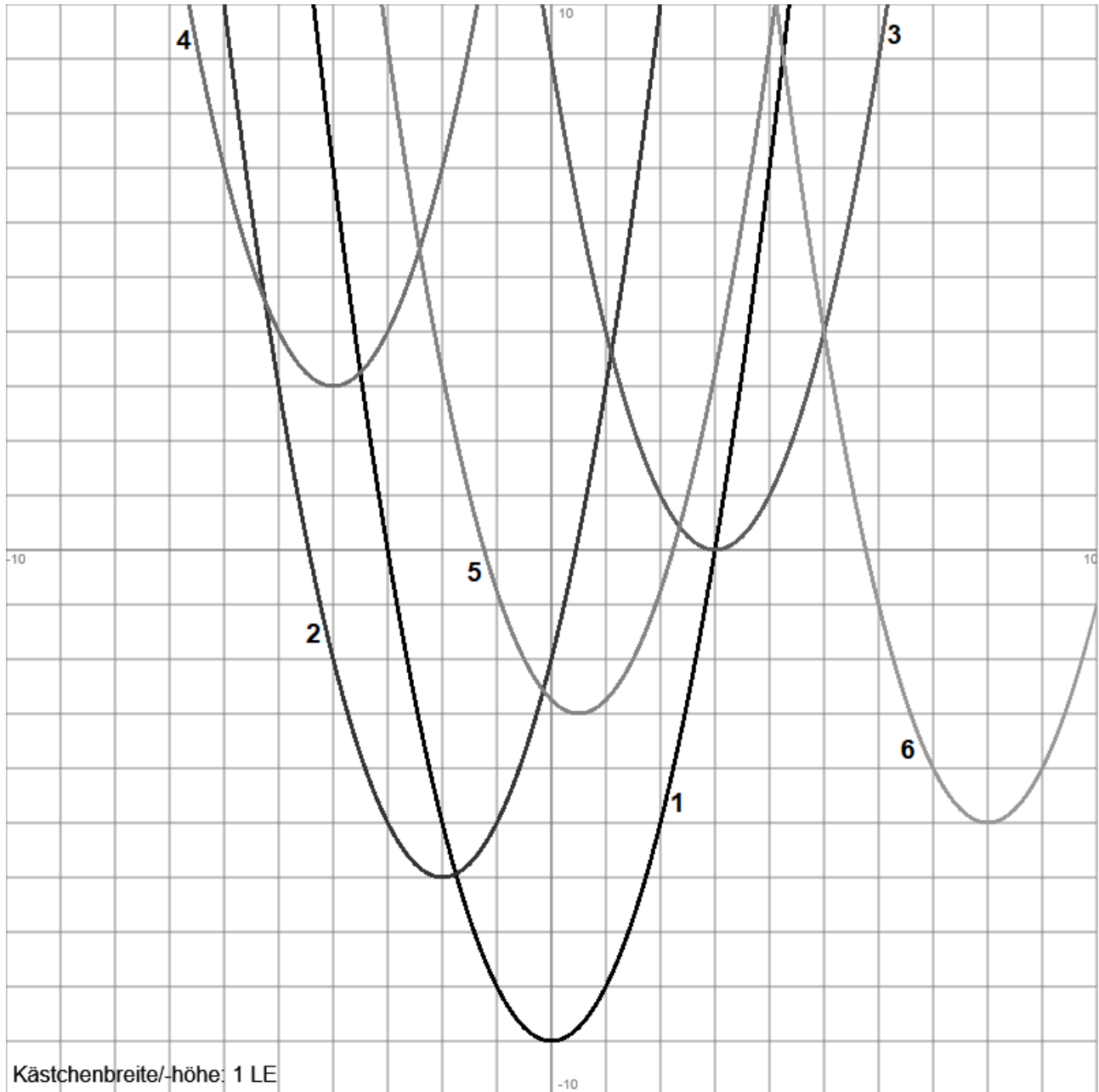
Aufgabe 2: Bestimme die Funktionsgleichung der Normalparabel, wenn als (teilweise) zu bestimmende Normalform und als Punkte P, Q oder Scheitelpunkt S gegeben sind:

- | | |
|--|--|
| a) $y = x^2 + 5x + q, P(1 8)$ | b) $y = x^2 + px - 11, P(-2 5)$ |
| c) $y = x^2 + px + 2, P(4,5 17,75)$ | d) $y = x^2 + px + q, P(0 4), Q(2 2)$ |
| e) $y = x^2 + px + q, P(-2 1), Q(3,5 12)$ | f) $y = x^2 + px + q, P(-3 0), Q(5 0)$ |
| g) $y = x^2 + px + q, P(-4 -24), Q(-1,5 -20,25)$ | h) $y = x^2 + px + q, S(-2,5 1)$ |

Vorgehensweise: I. Einsetzen der Punkte P, Q in die Normalform $y = x^2 + px + q$ (Punktprobe) ergibt eine lineare Gleichung oder ein lineares Gleichungssystem, die oder das nach p und q aufgelöst wird. II. Im Fall, dass die Nullstellen x_1, x_2 der Normalparabel gegeben sind gilt die Produktform: $y = (x-x_1)(x-x_2)$, die durch Ausmultiplizieren der Klammern in die Normalform $y = x^2 + px + q$ umgewandelt werden kann. III. Aus dem Scheitelpunkt $S(d|c)$ folgt die Scheitelform der Normalparabel als: $y = (x-d)^2 + c$, daraus die Normalform $y = x^2 + px + q$.

Lösungen: a) $y = x^2 + 5x + 2$; b) $y = x^2 - 6x - 11$; c) $y = x^2 - x + 2$; d) $y = x^2 - 3x + 4$; e) $y = x^2 + 0,5x - 2$; f) $y = (x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$; g) $y = x^2 + 7x - 12$.

Aufgabe 3: Bestimme die Funktionsgleichungen der Normalparabeln $y = x^2 + px + q$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = x^2 + px + q$ ist der Scheitelpunkt $S(d|c)$ zu ermitteln; es ergibt sich die Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$ und daraus die Normalform.

Lösungen: 1) $S(0|-9) \rightarrow y = x^2 - 9$; 2) $S(-2|-6) \rightarrow y = x^2 + 4x - 2$; 3) $S(3|0) \rightarrow y = x^2 - 6x + 9$; 4) $S(-4|3) \rightarrow y = x^2 + 8x + 19$; 5) $S(0,5|-3) \rightarrow y = x^2 - x - 2,75$; 6) $S(8|-5) \rightarrow y = x^2 - 16x + 59$.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$, wenn als Koeffizienten a, c bzw. als Punkte P, Q oder Scheitelpunkt S gegeben sind:

a) $a = -1, P(2|-2)$

b) $c = -5, P(-4|3)$

c) $a = \frac{3}{4}$, P(0|-1)

d) $a = -2$, S(0|7)

e) $a = -\frac{2}{3}$, P(3|0)

f) S(0|-4), P(2|4)

g) P(0|-1), Q(4|12)

h) P(-2|1,75), Q(1|1)

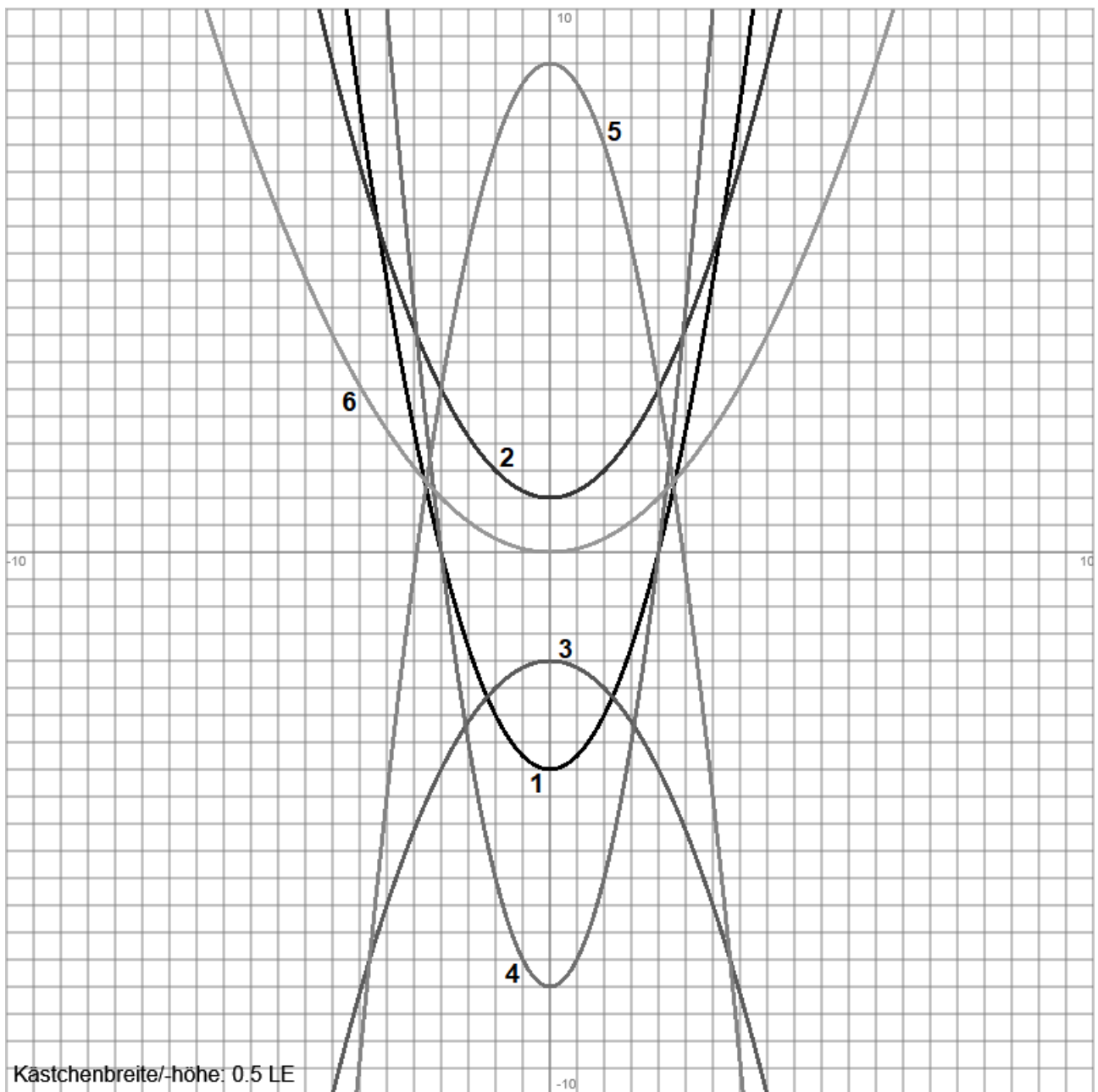
i) P(-2|-4), Q(3|11)

j) P(-5|-9,5), Q(4|-5)

Vorgehensweise: a) Mit den Koeffizienten a bzw. c und der Punktprobe mit dem Punkt P ergibt sich die Parabelgleichung $y = ax^2 + c$. b) Aus dem Scheitelpunkt $S(0|c)$ folgt der Koeffizient c der Parabelgleichung $y = ax^2 + c$. c) Sind zwei Punkte P, Q vorgegeben, so ergibt sich mit den Punktproben der beiden Punkte ein lineares Gleichungssystem, das nach den Koeffizienten a und c aufzulösen ist.

Lösungen: a) $y = -x^2 + 2$; b) $y = 0,5x^2 - 5$; c) $y = 0,75x^2 - 1$; d) $y = -2x^2 + 7$; e) $y = -2x^2/3 + 6$; f) $y = 2x^2 - 4$; g) $y = 13x^2/16 - 1$; h) $y = 0,25x^2 + 0,75$; i) $y = 3x^2 - 16$; j) $y = -0,5x^2 + 3$.

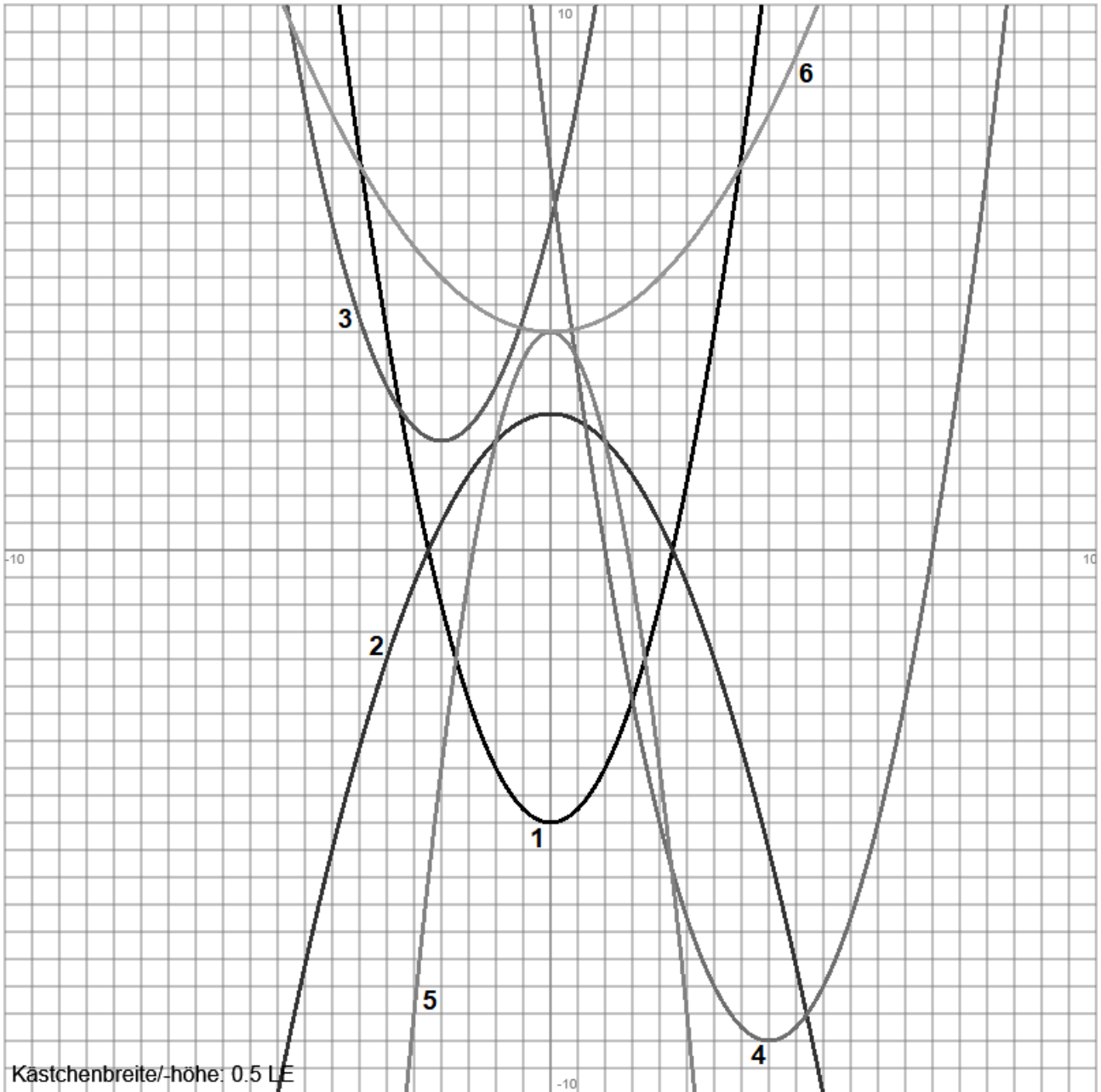
Aufgabe 5: Bestimme die Funktionsgleichungen der allgemeinen Parabeln $y = ax^2 + c$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = ax^2 + c$ ist zunächst der Scheitelpunkt $S(0|c)$ und damit der Koeffizient c zu ermitteln. Der Koeffizient a kann danach durch Punktprobe mit einem geeigneten Parabelpunkt $P(x|y)$ bestimmt oder als Differenz von y -Wert an der Stelle $x=1$ und Koeffizient c errechnet werden.

Lösungen: 1) $S(0|-4)$, $a=1 \rightarrow y = x^2-4$; 2) $S(0|1)$, $a=0,5 \rightarrow y = 0,5x^2+1$; 3) $S(0|-2)$, $a=-0,5 \rightarrow y = -0,5x^2-2$;
 4) $S(0|-8)$, $a=2 \rightarrow y = 2x^2-8$; 5) $S(0|9)$, $a=-1,5 \rightarrow y = -1,5x^2+9$; 6) $S(0|0)$, $a=0,25 \rightarrow y = 0,25x^2$.

Aufgabe 6: Bestimme die Funktionsgleichungen der Normalparabeln $y = x^2+px+q$ bzw. der allgemeinen Parabeln $y = ax^2+c$ aus den Graphen.



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = x^2+px+q$ ist der Scheitelpunkt $S(d|c)$ zu ermitteln; es ergibt sich die Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$ und daraus die Normalform. II. Allgemeine Parabeln: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $y = ax^2+c$ ist zunächst der Scheitelpunkt $S(0|c)$ und damit der Koeffizient c zu ermitteln. Der Koeffizient a kann danach durch Punktprobe mit einem geeigneten Parabelpunkt $P(x|y)$ bestimmt oder als Differenz von y -Wert an der Stelle $x=1$ und Koeffizient c errechnet werden.

Lösungen: 1) $S(0|-5)$, $a=1 \rightarrow y = x^2-5$; 2) $S(0|2,5)$, $a=-0,5 \rightarrow y = -0,5x^2+2,5$; 3) $S(-2|2)$, $a=1 \rightarrow y = x^2+4x+6$;
 4) $S(4|-9)$, $a=1 \rightarrow y = x^2-8x+7$; 5) $S(0|4)$, $a=-2 \rightarrow y = -2x^2+4$; 6) $S(0|4)$, $a=0,25 \rightarrow y = 0,25x^2+4$.

Aufgabe 7: Bestimme den Scheitelpunkt der Normal- bzw. allgemeinen Parabel y .

a) $y = 0,5x^2 - 3$

b) $y = (x-5)^2 + 3$

c) $y = x^2 - 7x + 12$

d) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 8$

e) $y = x^2 + 14x - 9$

f) $y = (x+3)^2 - 2$

g) $y = (x-4)(x+3)$

h) $y = x^2 + 9x + 22,25$

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Aus der Scheitelform der Parabel $y = (x-d)^2 + c$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(d|c)$. b) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2 + px + q$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$. c) Ist die Parabel in der Form $y = x^2 + px + q$ gegeben, so bestimmt sich die x-

Koordinate des Scheitelpunkts als: $d = -\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung

und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. II. Allgemeine Parabeln der

Form $y = ax^2 + c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$.

Lösungen: a) $S(0|-3)$; b) $S(5|3)$; c) $S(3,5|-0,25)$; d) $S(0|8)$; e) $S(-7|-58)$; f) $S(-3|-2)$; g) $S(0,5|-12,25)$; h) $S(-4,5|2)$.

Aufgabe 8: Wandle die Funktionsgleichung der Normalparabel y von der Scheitel- in die Normalform bzw. von der Normal- in die Scheitelform um.

a) $y = (x+1)^2 - 5$

b) $y = x^2 + 6x - 14$

c) $y = x^2 - 13x + 10$

d) $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{3}$

e) $y = x^2 - 5x + 6$

f) $y = x^2 + 2x - 1$

g) $y = x^2 + 10x + 7$

h) $y = (x-3)^2 + \frac{11}{9}$

Vorgehensweise: I. Scheitelform \rightarrow Normalform: Aus Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c$ folgt die Normalform $y = x^2 + px + q$, wenn die Klammer in der Scheitelform mit Hilfe der binomischen Formeln aufgelöst wird. II. Normalform \rightarrow Scheitelform: a) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2 + px + q$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$. b) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2 + px + q$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate

des Scheitelpunkts als: $d = -\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem

Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt, woraus die Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$

folgt.

Lösungen: a) $y = x^2 + 2x - 4$; b) $y = (x+3)^2 - 23$; c) $y = (x-6,5)^2 - 32,25$; d) $y = x^2 - 0,5x + 83/48$; e) $y = (x-2,5)^2 - 0,25$; f) $y = (x+1)^2 - 2$; g) $y = (x+5)^2 - 18$; h) $y = x^2 - 6x + 92/9$.

Aufgabe 9: Welche Parabelgleichungen gehören zu welchen Parabelkurven?

Parabelgleichungen:

A: $y = 2x^2 - 3$

B: $y = (x-3)^2 + 4$

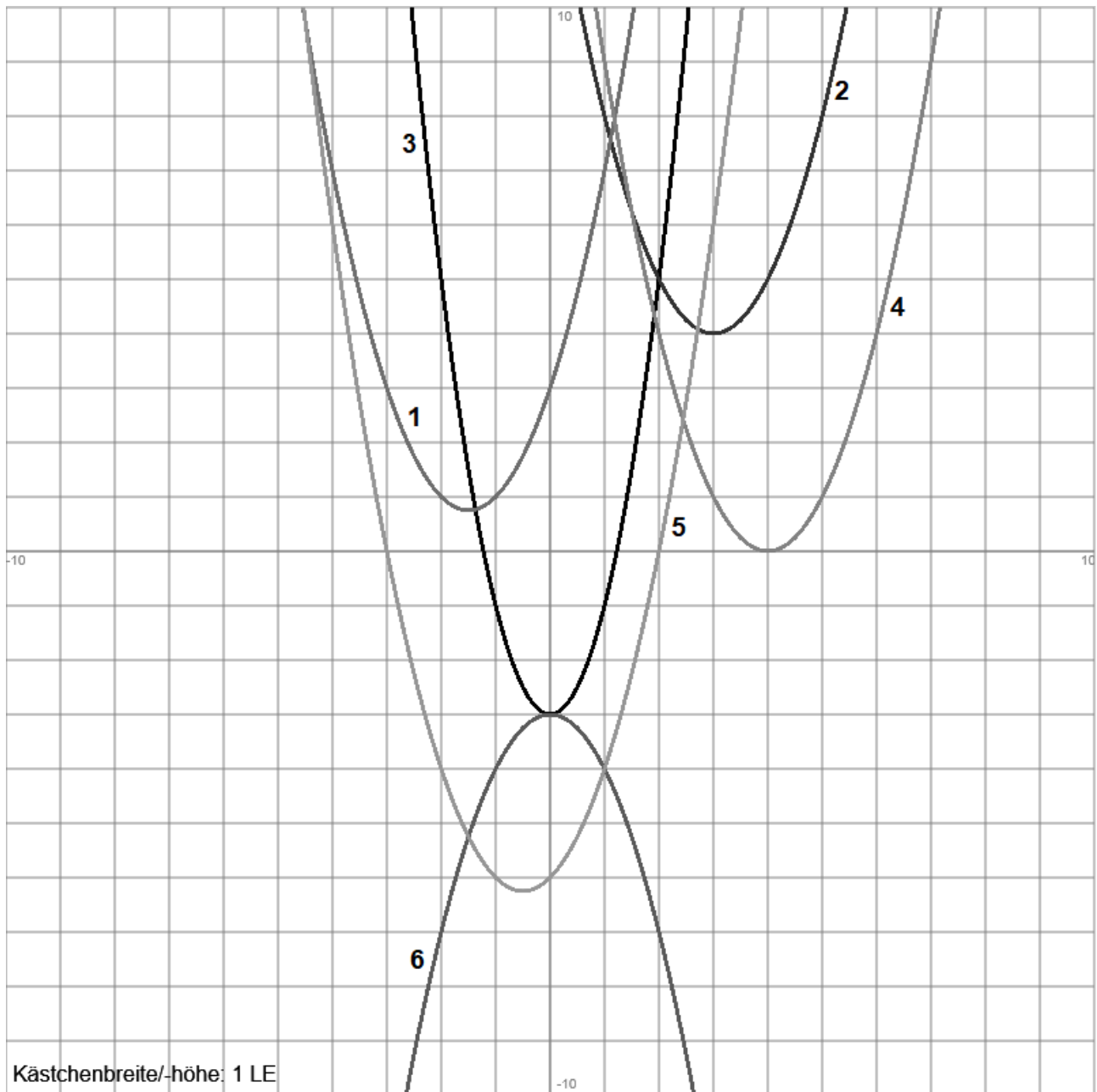
C: $y = -x^2 - 3$

D: $y = x^2 + 3x + 3$

E: $y = x^2 - 8x + 16$

F: $y = x^2 + x - 6$

Parabelkurven:



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Aus der Scheitelform der Parabel $y = (x-d)^2 + c$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(d|c)$. b) Ist die Parabel in der Normalform $y = x^2 + px + q$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$. c) Ist die Parabel in der Form $y = x^2 + px + q$ gegeben, so bestimmt sich die x-

Koordinate des Scheitelpunkts als: $d = -\frac{p}{2}$, so dass mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung

und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. II. Allgemeine Parabeln der

Form $y = ax^2 + c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. III. Mit dem Scheitelpunkt $S(d|c)$ lässt sich bei Normalparabeln die Parabelkurve eindeutig ermitteln; bei allgemeinen Parabeln $y = ax^2 + c$ ist noch der Koeffizient a zu beachten, der sich ergibt, wenn man sich im Koordinatensystem vom Scheitelpunkt der Parabel 1 Längeneinheit nach rechts und $|a|$ Längeneinheiten nach oben ($a > 0$) bzw. unten ($a < 0$) fortbewegt, um den Parabelpunkt der Stelle $d+1$ zu erreichen.

Lösungen: A – 3; B – 2; C – 6; D – 1; E – 4; F – 5.

Aufgabe 10: Zeichne die Normal- und allgemeinen Parabeln y in ein geeignetes x - y -Koordinatensystem.

a) $y = (x - 4)^2 - 7$

b) $y = -2x^2$

c) $y = 0,5x^2 + 3$

d) $y = x^2 - 5x + 4$

e) $y = x^2 + 4x - 5$

f) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 5$

g) $y = x^2 - x - 6$

h) $y = (x+3)^2 - 1$

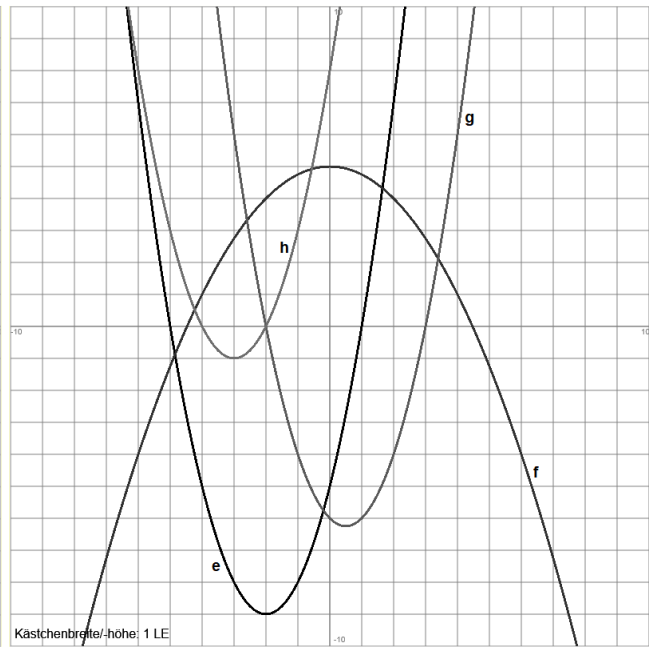
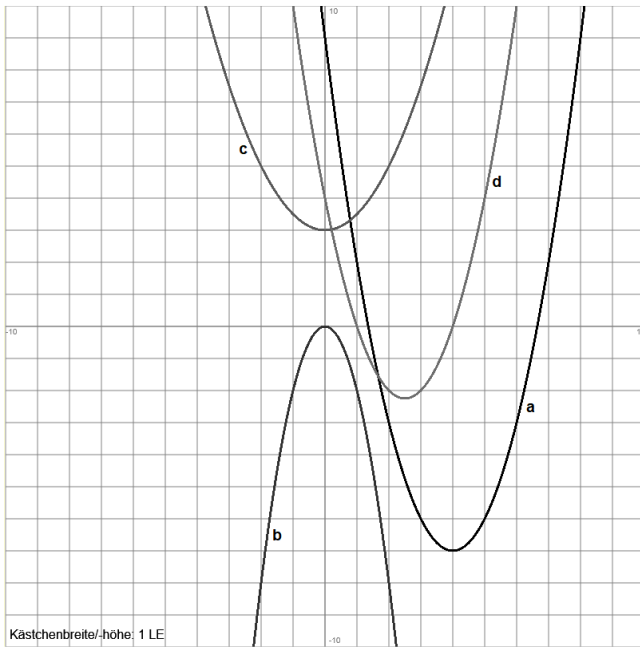
Vorgehensweise: I. Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(d|c)$; im Fall der Normalform $y = x^2 + px + q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|c)$ mit Hilfe der quadratischen

Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder vermöge

$d = -\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y -

Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. II. Eine x - y -Wertetabelle ergänzt die Bestimmung des

Scheitelpunkts $S(d|c)$, wobei wegen der Symmetrie der links und rechts vom Scheitel liegenden Parabelpunkte die Gleichheit der y -Werte der Parabelpunkte gilt (besonders bei ganzzahligen x -Werten in der Tabelle); ansonsten können vom gegebenen Scheitelpunkt bzw. von einem vorhergehenden Parabelpunkt aus im x - y -Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und $1 \cdot a$, $3 \cdot a$, $5 \cdot a$, $7 \cdot a$, ... (ungerade Zahlen aufsteigend) Längeneinheiten nach oben ($a > 0$) bzw. unten ($a < 0$) zum nächsten Parabelpunkt abgemessen werden (Normalparabel: $a=1$).



Lösungen: a) $S(4|-7)$, Normalparabel; b) $S(0|0)$, $a=-2$, allgemeine Parabel; c) $S(0|3)$, $a=0,5$, allgemeine Parabel; d) $S(2,5|-2,25)$, Normalparabel; e) $S(-2|-9)$, Normalparabel; f) $S(0|5)$, $a=-0,25$, allgemeine Parabel; g) $S(0,5|-6,25)$, Normalparabel; h) $S(-3|-1)$, Normalparabel.

Aufgabe 11: Bestimme die Nullstellen der Normal- und allgemeinen Parabel y .

a) $y = 2x^2 - 18$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

c) $y = x^2 - 5x$

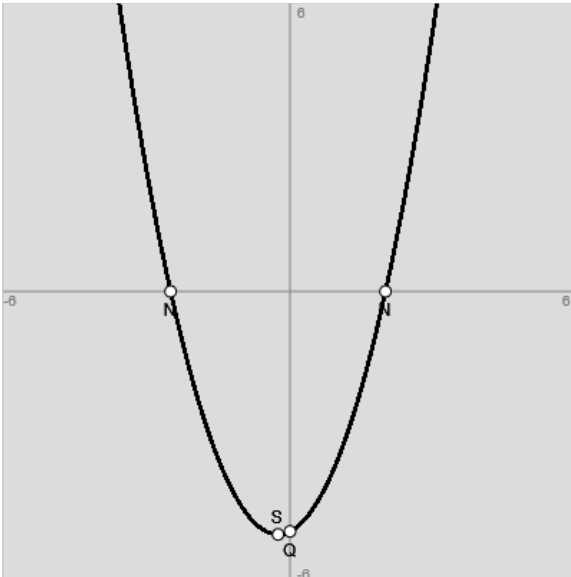
d) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

e) $y = (x+5)^2 - 9$

f) $y = x^2 + 4x - 32$

g) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 1$

h) $y = x^2 - \frac{10}{3}x + 1$



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c = x^2 + px + q$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) (Scheitelform:) $(x-d)^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: b) (Normalform:) $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$.

$y = x^2 + 0,5x - 5$: $S(-0,25|-5,0625), Q=S_y(0|-5), N_1(-2,5|0), N_2(2|0)$

Lösungen: a) $N_1(-3|0), N_2(3|0)$; b) keine Nullstellen; c) $N_1(0|0), N_2(5|0)$; d) $N_1(-2|0), N_2(2|0)$; e) $N_1(-8|0), N_2(-2|0)$; f) $N_1(-8|0), N_2(4|0)$; g) $N_1(-\sqrt{6}|0), N_2(\sqrt{6}|0)$; h) $N_1\left(\frac{1}{3}|0\right), N_2(3|0)$.

Aufgabe 12: Bestimme die Schnittpunkte der allgemeinen Parabel y mit den Achsen des Koordinatensystems.

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| a) $y = x^2 - 4x + 4$ | b) $y = -1,5x^2 + 6$ |
| c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 12$ | d) $y = x^2 + 5x - 14$ |
| e) $y = (x-2)^2 + 5$ | f) $y = x^2 - 0,5x - 18$ |
| g) $y = x^2 + 2x + 15$ | h) $y = x^2 + 10x$ |

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = x^2 + px + q$ mit $y = q$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. b) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c = x^2 + px + q$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: 1) (Scheitelform:) $(x-d)^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = ax^2 + c$ mit $y = c$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. b) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ist die Gleichung:

$y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der

Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) $S_y(0|4), N(2|0) = S(2|0)$; b) $S_y(0|6) = S(0|6), N_1(-2|0), N_2(2|0)$; c) $S_y(0|12) = S(0|12)$, keine Nullstellen; d) $S_y(0|-14), N_1(-7|0), N_2(2|0)$; e) $S_y(0|9)$, keine Nullstellen; f) $S_y(0|-40,96), N_1(-4|0), N_2(4,5|0)$; g) $S_y(0|15)$, keine Nullstellen; h) $S_y(0|0) = N_1(0|0), N_2(-10|0)$.

Aufgabe 13: Für die gegebenen Parabeln y sind der Scheitelpunkt, die Nullstellen und der Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen.

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| a) $y = x^2 - 10,24$ | b) $y = -0,5x^2 + 8$ |
| c) $y = (x+2,5)^2 + 2$ | d) $y = (x-3)^2 - 4$ |
| e) $y = x^2 - 5x + 6$ | f) $y = x^2 + 0,5x - 5$ |
| g) $y = \frac{8}{5}x^2 + 2$ | h) $y = x^2 + 4x + 6$ |
| i) $y = x^2 - 2x - 80$ | j) $y = (x+4,5)^2 - 25$ |

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(d|c)$; im Fall der Normalform $y = x^2 + px + q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|c)$ mit Hilfe

der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

oder vermöge $d = -\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt

für $y = x^2 + px + q$ mit $y = q$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c = x^2 + px + q$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von:

1) (Scheitelform:) $(x-d)^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2 + px + q = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = ax^2 + c$ mit $y = c$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ist die Gleichung:

$y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) $S(0|-10,24), N(-3,2|0), N(3,2|0), S_y(0|-10,24)$; b) $S(0|8), N(-4|0), N(4|0), S_y(0|8)$; c) $S(-2,5|2), S_y(0|8,25)$; d) $S(3|-4), N(1|0), N(5|0), S_y(0|5)$; e) $S(2,5|-0,25), N(2|0), N(3|0), S_y(0|6)$; f) $S(-0,25|-5,0625), N(-2,5|0), N(2|0), S_y(0|-5)$; g) $S(0|2), S_y(0|2)$; h) $S(-2|2), S_y(0|6)$; i) $S(1|-81), N(-8|0), N(10|0), S_y(0|-80)$; j) $S(-4,5|-25), N(-9,5|0), N(0,5|0), S_y(0|-4,75)$.

Aufgabe 14: Berechne die Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.

a) $y = x^2 + x - 12, y = -3x - 7$

b) $y = 2x^2 + 5, y = 4x + 11$

c) $y = (x+1)^2 - 3, y = -4$

d) $y = x^2 + 3x + 1, y = -x - 3$

e) $y = \frac{2}{5}x^2 + 7, y = 0,5x - 3$

f) $y = x^2 - 5x + 8,25, y = 2$

g) $y = x^2 - 3x - 5, y = 2x - 11$

h) $y = (x+0,5)^2 - 5, y = -\frac{2}{3}x$

i) $y = (x-2)^2 + 1, y = 6x - 20$

j) $y = x^2 + 10x + 10, y = 5x + 6$

k) $y = x^2 - 13x + 1, y = -10,1x$

l) $y = -3x^2 + 16, y = 3x + 10$



Vorgehensweise: I. Normalparabeln: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = x^2 + px + q$ und der Geraden $y = mx + b$ ist die Gleichung: $x^2 + px + q = mx + b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (*) der Form: $x^2 + (b-m)x + q-b = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{m-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m-b}{2}\right)^2 + b-q}$$

besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. II. Allgemeine Parabeln: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = ax^2 + c$ und der Geraden $y = mx + b$ ist die Gleichung: $ax^2 + c = mx + b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (**) der Form: $ax^2 - mx + c-b = 0$ bzw.: $x^2 - mx/a + (c-b)/a = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen)

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{m}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \frac{b-c}{a}}$ besitzt. Mit den y-Werten

$y_{1,2} = mx_{1,2} + b = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. III. Hat die Gleichung (*) bzw. (**) zwei Lösungen, ist die Gerade eine Sekante zur Parabel, hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante.

Lösungen: a) $S_1(-5|8)$, $S_2(1|-10)$; b) $S_1(-1|7)$, $S_2(3|23)$; c) keine Schnittpunkte; d) $S_1(-2|-1)$; e) keine Schnittpunkte; f) $S_1(2,5|2)$, g) $S_1(2|-7)$, $S_2(3|-5)$; h) $S_1(-19/6|19/9)$, $S_2(1,5|-1)$; i) $S_1(5|10)$; j) $S_1(-4|-14)$, $S_2(-1|1)$; k) $S_1(0,4|4,04)$, $S_2(2,5|25,25)$; l) $S_1(-2|4)$, $S_2(1|13)$.

Aufgabe 15: Berechne die Schnittpunkte zwischen den Parabeln.

a) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

c) $y = x^2 + 4x - 3$, $y = x^2 + 2x + 11$

e) $y = x^2 - 7x + 21$, $y = x^2 + 3,5x$

g) $y = (x+5,5)^2$, $y = (x-4)^2 + 52,25$

i) $y = x^2 + 11x - 2$, $y = 3x^2 + 12$

k) $y = (x-4)^2 - 10$, $y = x^2 - 8x + 24$

b) $y = x^2 - 4$, $y = 0,5x^2 - 3,5$

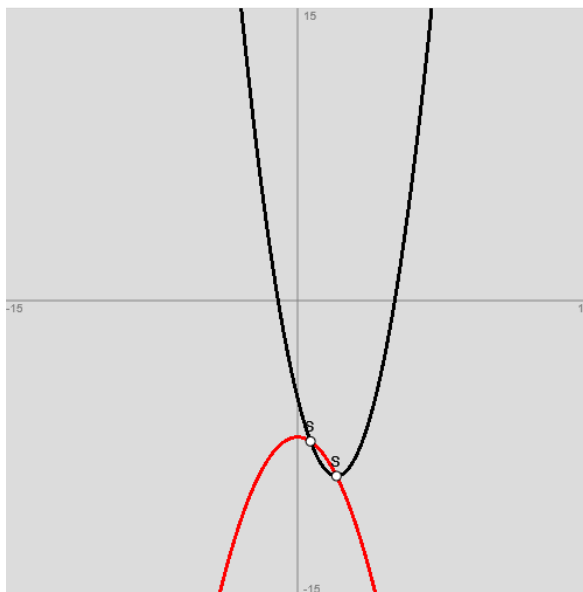
d) $y = x^2 - x + 5$, $y = x^2 + 2x + 5$

f) $y = (x-1)^2 + 6$, $y = x^2 + 5x - 10,5$

h) $y = x^2 + 6x - 10$, $y = -x^2 + 10$

j) $y = (x+2)^2 + 3$, $y = \frac{1}{5}x^2 + 47$

l) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $y = (x-5)^2 + 3,5$



$y = x^2 - 4x - 5$, $y = -0,5x^2 - 7$: $S_1(\frac{2}{3} | -\frac{65}{9})$, $S_2(2|-9)$

Vorgehensweise: I. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln $y = x^2 + p_1x + q_1$ und $y = x^2 + p_2x + q_2$ ist die Gleichung: $x^2 + p_1x + q_1 = x^2 + p_2x + q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form: $(p_1 - p_2)x = q_2 - q_1$, die als

Lösung: $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ besitzt ($p_1 \neq p_2$). Mit dem y-Wert

$y_1 = x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2x_1 + q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. II. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel $y = x^2 + px + q$ und einer allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2 + px + q = ax^2 + c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (**) von der Form: $(a-1)x^2 - px + c - q = 0$ bzw.: $x^2 - px/(a-1) + (c-q)/(a-1) = 0$ mit den (eventuellen) Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{p}{2(a-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2 + \frac{q-c}{a-1}} \quad (a \neq 1). \text{ Mit den y-}$$

Werten $y_{1,2} = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. III. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2 + c_1$ und $y = a_2x^2 + c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2 + c_1 = a_2x^2 + c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form: $(a_1 - a_2)x^2 = c_2 - c_1$ mit den (eventuellen) Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2}} \quad (a_1 \neq a_2). \text{ Mit den y-Werten}$$

$y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$. IV. Die quadratischen Gleichungen (**) und (***) können zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung haben, die lineare Gleichung (*) eine oder keine Lösung.

Lösungen: a) $S_1(-2|6)$, $S_2(2|6)$; b) $S_1(-1|-3)$, $S_2(1|-3)$; c) $S_1(7|74)$; d) $S_1(0|5)$; e) $S_1(2|11)$; f) $S_1(2,5|8,25)$; g) $S_1(2|56,25)$; h) $S_1(-5|-15)$, $S_2(2|6)$; i) $S_1(2|24)$, $S_2(3,5|48,75)$; j) $S_1(-10|67)$, $S_2(5|52)$; k) keine Schnittpunkte; l) $S_1(3|7,5)$, $S_2(17|147,5)$.

Aufgabe 16: a) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem Scheitel und Nullstellen der Parabel $y = x^2 - 2x - 8$ als Ecken hat.

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem y-Achsenabschnittspunkt und Nullstellen der Parabel $y = x^2 - 7x + 6$ als Ecken hat.

c) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks, dessen Ecken Scheitel und Nullstellen der Parabel $y = 16 - 2,25x^2$ sind?

d) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem Scheitel, y-Achsenabschnittspunkt und positive Nullstelle der Parabel $y = x^2 - 5x - 6$ als Ecken hat?

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(d|c)$; im Fall der Normalform $y = x^2 + px + q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|c)$ mit Hilfe

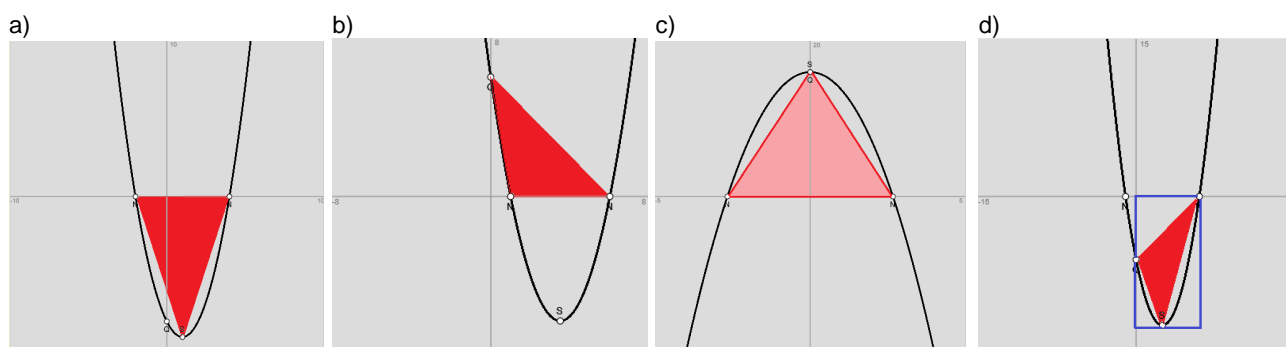
der quadratischen Ergänzung erfolgen: $y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

oder vermöge $d = -\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = x^2+px+q$ mit $y = q$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von:

1) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = ax^2+c$ mit $y = c$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ist die Gleichung:

$y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. III. Es gilt für ein Dreieck ΔABC zwischen Scheitel, y-Achsenabschnitt und/oder Nullstellen einer allgemeinen Parabel: Fläche $A = gh/2$ (g als Grundseite, h als Höhe); Umfang $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ mit: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$ für Punkte $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$ als Abstand. Für ein Dreieck ΔABC lässt sich die Fläche auch als Fläche eines das Dreieck umfassenden Rechtecks minus der Flächen an das Dreieck angrenzender rechtwinkliger Dreiecke berechnen.



Lösungen: a) $S(1|-9), S_y(0|-8), N_1(-2|0), N_2(4|0) \rightarrow g=6, h=9 \rightarrow A=27$ FE; b) $S_y(0|6), N_1(1|0), N_2(6|0) \rightarrow g=5, h=6 \rightarrow A=15$ FE; c) $S(0|16) = S_y(0|16), N_1(-\frac{8}{3}|0), N_2(\frac{8}{3}|0) \rightarrow \overline{N_1N_2} = \frac{16}{3}, \overline{SN_1} = \overline{SN_2} = 16,22 \rightarrow u = 37,77$ LE; d) $S(2,5|-12,25), S_y(0|-6), [N_1(-1|0)], N_2(6|0) \rightarrow$ Rechteckfläche A_R , Flächen rechtwinkliger Dreiecke $A_1, A_2, A_3 \rightarrow A = A_R - A_1 - A_2 - A_3 = 6 \cdot 12,25 - 3,5 \cdot 12,25/2 - 6 \cdot 6/2 - 2,5 \cdot 6,25/2 = 26,25$ FE.

Aufgabe 17: a) Bestimme den Abstand zwischen den Schnittpunkten der Parabel $y = -\frac{1}{3}x^2+12$ und der Geraden $y = 2x+3$.

b) Die Parabel $p_1: y = x^2-8x+13$ wird um 5 Längeneinheiten nach links und um 6 Längeneinheiten nach oben zur Parabel p_2 verschoben. Wo schneiden sie die beiden Parabeln?

c) Gegeben sind die Parabeln $p_1: y = -\frac{1}{5}x^2+8$ und $p_2: y = \frac{3}{10}x^2$. Die Scheitelpunkte bilden zusammen mit den Schnittpunkten der beiden Parabeln ein Viereck. Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks. Um welche Art von Viereck handelt es sich?

d) Die Schnittpunkte von Parabel $y = x^2+8x$ und Geraden $y = -4x+20$ bilden zusammen mit dem Scheitelpunkt der Parabel ein Dreieck. Berechne dessen Umfang.

Vorgehensweise: I. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln $y = x^2+p_1x+q_1$ und $y = x^2+p_2x+q_2$ ist die Gleichung: $x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form: $(p_1-p_2)x = q_2 - q_1$, die als Lösung: $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ besitzt ($p_1 \neq p_2$). Mit dem y-Wert $y_1 = x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2x_1 + q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. II. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel $y = x^2+px+q$ und einer allge-

meinen Parabel $y = ax^2+c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2+px+q = ax^2+c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (***) der Form: $(a-1)x^2-px+c-q = 0$ bzw.: $x^2-px/(a-1)+(c-q)/(a-1)$ mit den (eventuellen) Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{p}{2(a-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2 + \frac{q-c}{a-1}} \quad (a \neq 1). \text{ Mit den y-Werten } y_{1,2} = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q = ax_{1,2}^2 + c \text{ ergeben sich die}$$

Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. III. Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2+c_1$ und $y = a_2x^2+c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2+c_1 = a_2x^2+c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form:

$$(a_1-a_2)x^2 = c_2-c_1 \text{ mit den (eventuellen) Lösungen: } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}} \quad (a_1 \neq a_2). \text{ Mit den y-Werten}$$

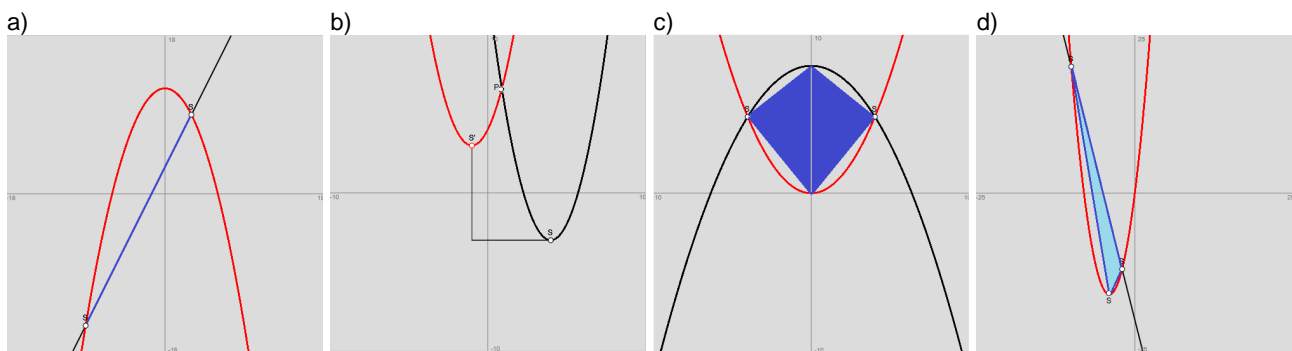
$y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. IV. Der Abstand zwischen zwei

(Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$ berechnet sich als: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$. V. $x_V > 0$ bedeutet eine

Verschiebung (um x_V Längeneinheiten) nach rechts, $x_V < 0$ nach links; $y_V > 0$ bedeutet eine Verschiebung nach oben, $y_V < 0$ nach unten. Mit der Scheitelform $y = (x-d)^2+c$ ist die Gleichung der verschobenen Parabel $y = (x-d-x_V)^2+c+y_V$, aus dem Scheitelpunkt $S(d|c)$ wird durch Verschiebung um x_V bzw. y_V der Scheitelpunkt $S'(d-x_V|c+y_V)$. VI. Für einen Drachen

ABCD gilt: Fläche $A = ef/2$ (e, f als Diagonalen). VII. Es gilt für ein Dreieck $\triangle ABC$: Umfang $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ mit:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \text{ für Punkte } P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q) \text{ als Abstand.}$$



Lösungen: a) $S_1(-9|-15), S_2(3|9), \overline{S_1S_2} = 26,83$ LE; b) $y = x^2-8x+13 \rightarrow S(4|-3) \rightarrow$ Verschiebung $\rightarrow S'(-1|3) \rightarrow y = x^2+2x+4 \rightarrow$ Schnittpunkt $P(0,9|6,61)$; c) $p_1 \rightarrow S_1(0|8), p_2 \rightarrow S_2(0|0)$, Schnittpunkte $P_1(-4|4,8), P_2(4|4,8) \rightarrow$ Drache $S_1P_2S_2P_1 \rightarrow e=9,6, f=8 \rightarrow A = ef/2 = 38,4$ FE; d) Schnittpunkte $P(-10|20), Q(-2|-12)$, Scheitel $S(-4|-16) \rightarrow u = \overline{PQ} + \overline{PS} + \overline{QS} = 33+36,5+4,47 = 73,97$ LE.

Aufgabe 18: a) Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Scheitel und den y-Achsenabschnittspunkt der Parabel $y = x^2-7x+10$?

b) Die Parabeln $p_1: y = x^2+4x+4$ und $p_2: y = -3x^2+28$ schneiden sich in zwei Schnittpunkten. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch diese Schnittpunkte?

c) Eine Normalparabel schneidet die Gerade $y = 2x+7$ an den Stellen $x=-2$ und $x=3$. Bestimme die Gleichung der Parabel.

d) Wie heißt Gleichung der Geraden $y = mx+3$, die Tangente an die Parabel $y = x^2-6x+4$ ist? Bestimme die Geradensteigung m. Wie lautet der Schnittpunkt von Tangente und Parabel?

Vorgehensweise: I. Normalparabeln: a) Liegt die Scheitelform der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(d|c)$; im Fall der Normalform $y = x^2+px+q$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|c)$ mit Hilfe

$$\text{der quadratischen Ergänzung erfolgen: } y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

oder vermöge $d = -\frac{p}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errech-

nen der y-Koordinaten $y = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$ der Scheitelpunkt $S(d|c)$ ergibt. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt

für $y = x^2+px+q$ mit $y = q$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|q)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Normalparabel $y = (x-d)^2 + c = x^2+px+q$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von:

1) (Scheitelform:) $(x-d)^2+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = d \pm \sqrt{-c}$ (rein quadratische Gleichung) sowie: 2) (Normalform:) $x^2+px+q = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$.

II. Allgemeine Parabeln: a) Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. b) Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus $x=0$ folgt für $y = ax^2+c$ mit $y = c$ der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. c) Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ist die Gleichung:

$y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $ax^2+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Im Fall der

Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. III. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = x^2+px+q$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $x^2+px+q = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (*) der Form: $x^2+(b-m)x+q-b = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen:

$x_{1,2} = \frac{m-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m-b}{2}\right)^2 + b-q}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q$ ergeben sich die

Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. b) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $y = ax^2+c$ und der Geraden $y = mx+b$ ist die Gleichung: $ax^2+c = mx+b$ zu lösen, d.h. eine quadratische Gleichung (**) der Form: $ax^2-mx+c-b = 0$

bzw.: $x^2-mx/a+(c-b)/a = 0$, die nach der p-q-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{m}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \frac{b-c}{a}}$ besitzt. Mit

den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. c) Hat die Gleichung (*) bzw. (**) zwei Lösungen, ist die Gerade eine Sekante zur Parabel, hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante. Im Fall der Tangente müssen die Diskriminanten der Wurzeln in den

Lösungen gleich 0 sein, also: (*) $\rightarrow \left(\frac{m-b}{2}\right)^2 + b-q = 0$, (**) $\rightarrow \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \frac{b-c}{a} = 0$, woraus m bzw. b der Tangenten

zu bestimmen sind. IV. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei Normalparabeln $y = x^2+p_1x+q_1$ und $y = x^2+p_2x+q_2$ ist die Gleichung: $x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$ zu lösen, d.h. es ergibt sich eine lineare Gleichung (*) der Form:

$(p_1-p_2)x = q_2-q_1$, die als Lösung: $x_1 = \frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$ besitzt ($p_1 \neq p_2$). Mit dem y-Wert

$y_1 = x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2x_1 + q_2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S_1(x_1|y_1)$. b) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen einer Normalparabel $y = x^2+px+q$ und einer allgemeinen Parabel $y = ax^2+c$ ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2+px+q = ax^2+c$, d.h. es ergibt sich die quadratische Gleichung (**) der Form: $(a-1)x^2-px+c-q = 0$ bzw.:

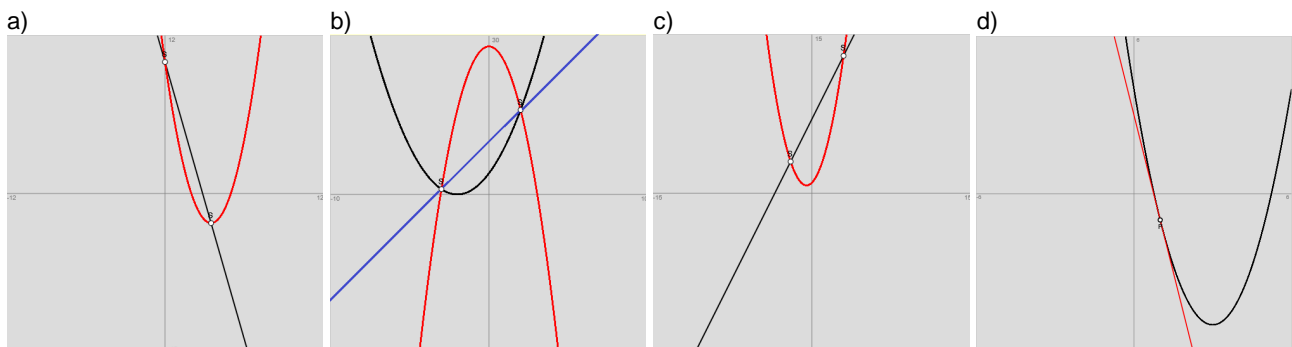
$x^2-px/(a-1)+(c-q)/(a-1)$ mit den (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{p}{2(a-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2(a-1)}\right)^2 + \frac{q-c}{a-1}}$ ($a \neq 1$). Mit den y-

Werten $y_{1,2} = x_{1,2}^2 + px_{1,2} + q = ax_{1,2}^2 + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$. c) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen zwei allgemeinen Parabeln $y = a_1x^2+c_1$ und $y = a_2x^2+c_2$ ist die Gleichung $a_1x^2+c_1 = a_2x^2+c_2$, d.h. es ergibt sich die rein quadratische Gleichung (***) der Form: $(a_1-a_2)x^2 = c_2-c_1$ mit den (eventuellen) Lösungen:

$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}}$ ($a_1 \neq a_2$). Mit den y-Werten $y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1),$

$S_2(x_2|y_2)$. V. Aus zwei Punkten $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$ lässt sich eine Gerade der Form $y = mx+b$ bestimmen mit: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ und $b = y_P - mx_P$. Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ und die Steigung m vor, so lässt sich $b = y_P - mx_P$ direkt bestimmen.

VI. Für eine nach oben geöffnete Normalparabel $y = x^2+px+q$ bestimmen sich aus zwei Punkten $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$ die Koeffizienten p, q mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additions-, Gleichsetzungsverfahren).



Lösungen: a) Parabel $\rightarrow S(3,5|-2,25), S_y(0|10) \rightarrow$ Gerade $y = -3,5x+10$; b) Schnittpunkte $S_1(-3|1), S_2(2|16) \rightarrow$ Gerade $y = 3x+10$; c) Schnittpunkte $S_1(-2|3), S_2(3|13) \rightarrow$ Normalparabel $y = x^2+x+1$; d) $m=-4 \rightarrow$ Tangente $y = -4x+3 \rightarrow$ Schnittpunkt $P(1|-1)$.

Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Normalparabeln, spezielle allgemeine Parabeln / Aufgaben 517-534