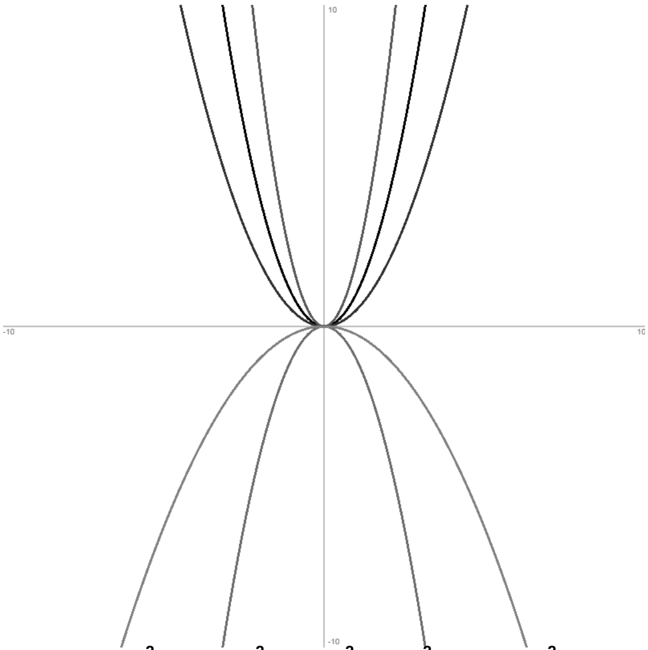
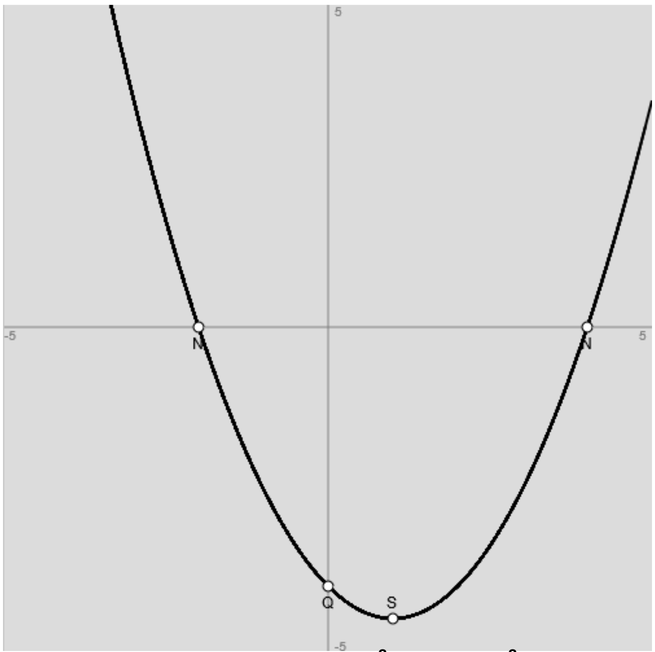
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Allgemeine Parabeln

Einleitung: Allgemeine Parabeln sind (ganz rationale) Funktionen (2. Grades) von der Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Haupt-/ Normalform), $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform), $f(x) = a(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)$ (Produktform) mit reellen Zahlen a, b, c, $a \neq 0$, dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Eine Parabel heißt Normalparabel, wenn $a=\pm 1$ erfüllt ist. Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn $a>0$, nach unten geöffnet, wenn $a<0$; für $a=-1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1<a<1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a<-1$ oder $a>1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten (nicht verschobenen) Normalparabel $y = x^2$.



$y = x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 2x^2$, $y =-x^2$, $y = -025x^2$



$y = 0,5(x+2)(x-4) = 0,5(x-1)^2–4,5 = 0,5x^2–x–4$

Aufgabe 1: Bestimme die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel f(x), wenn die Punkte auf der Parabel liegen.

a) $f(x) = 2x^2–3x+c$, P(2|7)

b) $f(x) = -x^2+bx+7$, P(-1|4)

c) $f(x) = ax^2+x–10$, P(-4|-22)

d) $f(x) = ax^2+bx$, P(-3|42), Q(2|2)

e) $f(x) = x^2 + bx + c$, P(-5|-2), Q(0|-2)

f) $f(x) = ax^2+3x+c$, P(-1|10,5), Q(4|12)

g) $f(x) = ax^2+bx+c$, P(-4|-34), Q(0|6), R(2|8)

h) $f(x) = ax^2+bx+c$, P(0|4), Q(3|0), R(8|0)

i) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 +bx+c$, P(-3|0), Q(1|0)

j) $f(x) = ax^2+bx+c$, P(-1|1,5), Scheitel S(2|-3)

Vorgehensweise: Das Einsetzen der x- und y-Koordinaten der vorgegebenen Punkte P, Q, R, S in die vorgegebene Parabelgleichung mit den Unbekannten a, b, c ergibt eine lineare Gleichung bzw. ein lineares Gleichungssystem, die bzw. das nach den Parabelkoeffizienten a, b, c aufgelöst werden kann. Für lineare Gleichungssysteme ist dabei die Anwendung von Gleichsetzungs-, Additions- oder Einsetzungsverfahren geboten.

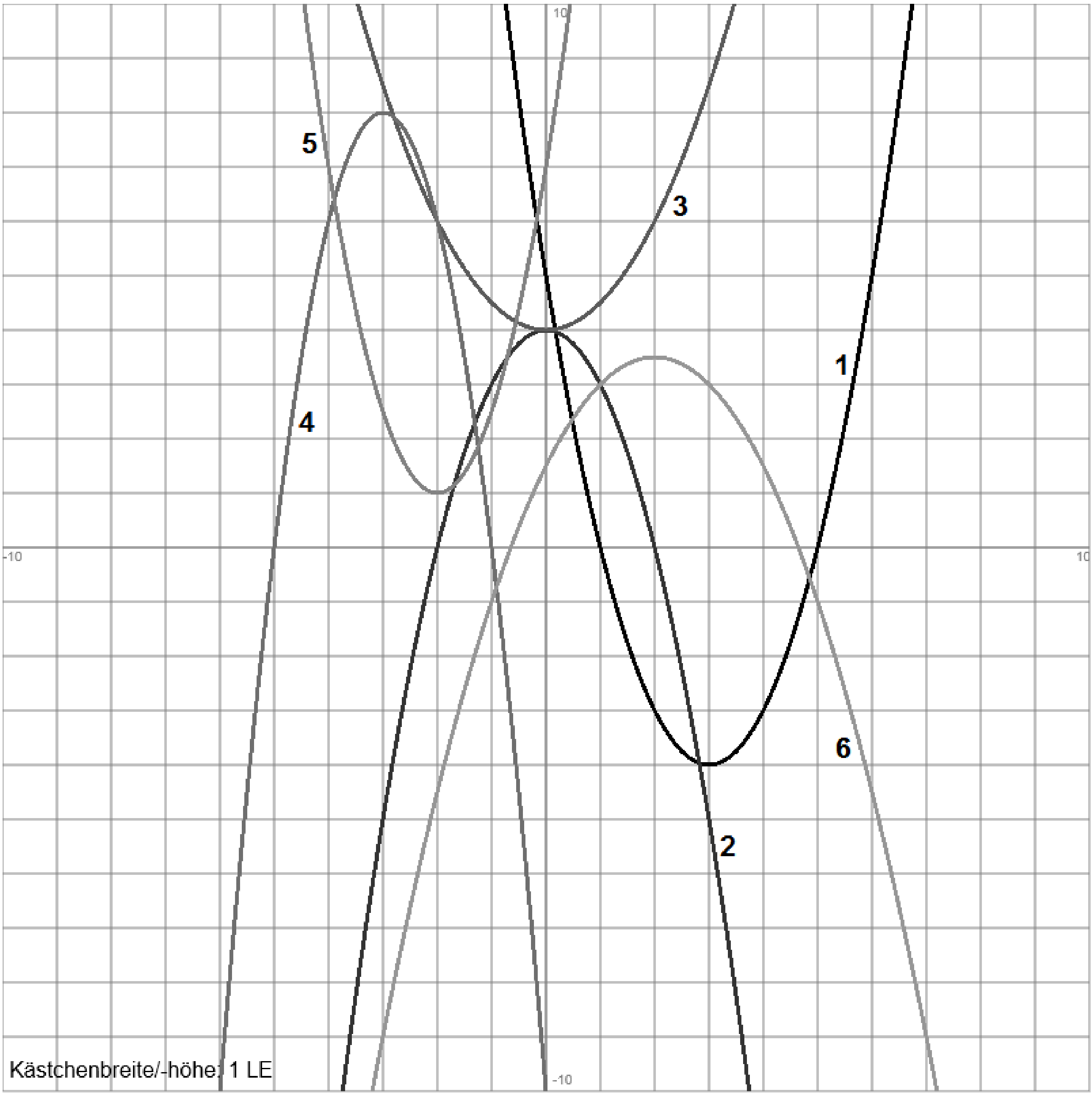
Lösungen: a) $7 = 2\cdot 2^2–3\cdot 2+c$ => c=5 -> $f(x) = 2x^2–3x+5$; b) $-(-1)^2+b(-1)+7 = 4$ => b= 2 -> $f(x) = -x^2+2x+7$;
c) $a(-4)^2+(-4)–10 = -22$ => a=-0,5 -> $f(x) = -0,5x^2+x–10$; d) $a(-3)^2+b(-3) = 42$, $a\cdot 2^2+b\cdot 2 = 2$ => a=-3, b=-5 -> $f(x) = 3x^2–5x$;
e) 25–5b+c = -2, 0+c = -2 -> b=5, c=-2 -> $f(x) = x^2+5x–2$; f) a–3+c = 10,5, 16a+12+c = 12 => a=0,5, c=-8 -> $f(x) = 0,5x^2+3x–8$; g) 0+c = 6 => c=6, 16a–4b+6 = -34, 4a+3b+6 = 8 => a=-1,5, b=4 -> $f(x) = -1,5x^2+4x+6$;

h) Nullstellen Q, R -> f(x) = a(x-3)(x-8), P -> 4 = a(0-3)(0-8) => a=1/6 -> f(x) = $\frac{1}{6}(x-3)(x-8) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 4$;

i) Nullstellen P,Q -> f(x) = a(x+3)(x-1) => f(x) = $-\frac{1}{4}(x+3)(x-1) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$;

j) Scheitel S(2|-3) -> $f(x) = a(x-2)^2–3$, P -> $1,5 = a(-3)^2–3$ => a=0,5 -> $f(x) = 0,5(x-2)^2–3 = 0,5x^2–2x–1$.

Aufgabe 2: Bestimme die Funktionsgleichungen der allgemeinen Parabeln f(x) aus den Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Parabelfunktion $f(x) = ax^2+bx+c$ ist der Scheitelpunkt $S(x_s|y_S)$ sowie der Koeffizient $a = f(x_S+1)–f(x_S)$ zu ermitteln; es ergibt sich die Scheitelform $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$. Auch die Nullstellen der Parabel können wegen $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ helfen, ebenfalls der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$.

Lösungen: 1) S(3|-4) -> $f(x) = x^2–6x+5$; 2) S(0|4), a=-1 ->$f(x) = -x^2+4$; 3) S(0|4), a=0,5 -> $f(x) = 0{,}5x^2+4$;
4) S(-3|8), a=-2 -> $f(x) = -2(x+3)^2+8 = -2x^2–12x–10$; 5) S(-2|1), a=1,5 -> $f(x) = 1{,}5(x+2)^2+1 = 1{,}5x^2+6x+7$;
6) $N_1(-1|0)$, $N_2(5|0)$, a=-0,5 -> $f(x) = -0{,}5(x+1)(x-5) = -0{,}5x^2+2x+2{,}5$.

Aufgabe 3: Bestimme die Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ der allgemeinen Parabel, wenn der Scheitelpunkt, ein weiterer Parabelpunkt oder die Zahl a gegeben ist.

a) S(-4|3), $a = -\frac{1}{3}$	b) S(0|-5), a = 2
c) S(0|1), P(-2|5)	d) S(-2|1), P(0|6)
e) S(2|-10), P(4|-8)	f) S(-1|-1), a = -1
g) S(2|-9), $a = \frac{3}{4}$	h) S(1|3), P(5|5)

Vorgehensweise: I. Ermittlung der Scheitelform: Aus dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ergibt sich der Term $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ als Scheitelform, wobei a einzusetzen oder zu bestimmen ist auf Grund des Parabelpunktes $P(x_P|y_P)$ und: $y_P = f(x_P)$. II. Umwandlung von Scheitel- in Normalform: Das Auflösen der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ mit den ersten beiden binomischen Formeln ($(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$) ergibt die Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$.

Lösungen: a) S, a -> $f(x) = -\frac{1}{3}(x+4)^2+3 = -\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{7}{3}$; b) S, a -> $f(x) = 2x^2-5$; c) S -> $f(x) = ax^2+1$, P -> $5 = a(-2)^2+1$ => a=1 -> $f(x) = x^2+1$; d) S -> $f(x) = a(x+2)^2+1$, P -> $6 = a\cdot(0+2)^2+1$ => a=1,25 -> $f(x) = 1,25(x+2)^2+1 = 1,25x^2+5x+6$; e) S -> $f(x) = a(x-2)^2-10$, P -> $-8 = a\cdot 2^2-10$ => a=0,5 -> $f(x) = 0,5(x-2)^2-10 = 0,5x^2-2x-8$; f) S, a -> $f(x) = -(x+1)^2-1 = -x^2-2x-2$; g) S, a -> $f(x) = \frac{3}{4}(x-2)^2-9 = \frac{3}{4}x^2-3x-6$; h) S -> $f(x) = a(x-1)^2+3$, P -> $5 = a\cdot 4^2+3$ => $a=\frac{1}{8}$ -> $f(x) = \frac{1}{8}(x-1)^2+3 = \frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+3\frac{1}{8}$.

Aufgabe 4: Bestimme den Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel f(x).

a) $f(x) = 0,5(x-3,5)^2+5,5$

b) $f(x) = -\frac{7}{4}x^2++\frac{5}{2}$

c) $f(x) = x^2-5x+13$

d) $f(x) = -\frac{3}{2}x(x-8)$

e) $f(x) = 2x^2+4x-9$

f) $f(x) = -0,5x^2+x+4$

g) $f(x) = 1,8\cdot(x-8,5)(2x+5)$

h) $f(x) = -\frac{5}{8}(x-4)^2+\frac{3}{10}$

Vorgehensweise: a) Aus der Scheitelform der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$. b) Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung:
$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$
auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a}|\frac{4ac-b^2}{4a})$. c) Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $x_S = -\frac{b}{2a}$, so dass mit $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$ als y-Koordinate der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ergibt. d) Besitzt die Parabel f(x) zwei Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, so ist: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$ und Scheitel $S(x_S|y_S)$.

Lösungen: a) S(3,5|5,5); b) S(0|2,5); c) $x_S = -\frac{-5}{2\cdot 1} = 2,5$ -> S(2,5|6,75); d) $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$ -> $x_S=4$ -> S(4|24); e) $x_S = -\frac{4}{2\cdot 2} = -1$ -> S(-1|-11); f) $x_S = -\frac{1}{2\cdot(-0,5)} = 1$ -> S(1|4,5); g) $N_1(-2,5|0)$, $N_2(8,5|0)$ -> $x_S=3$ -> S(3|-108,9); h) S(4|0,3).

Aufgabe 5: Wandle die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel f(x) von der Scheitel- in die Normalform bzw. von der Normal- in die Scheitelform um.

a) $f(x) = 0,5(x-5)^2$

b) $f(x) = -\frac{5}{2}(x+2)^2-3$

c) $f(x) = x^2+3x-10$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2+6x+22$

e) $f(x) = 4x^2-5x+6$

f) $f(x) = -x^2+2x-1$

g) $f(x) = 2x^2-2x+11$

h) $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2+\frac{28}{9}$

Vorgehensweise: a) Umwandlung von Scheitel- in Normalform: Das Auflösen der Scheitelform $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ mit den ersten beiden binomischen Formeln ($(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$) ergibt die Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$. b) Umwandlung von Normalform in Scheitelform: Die Umformung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, weiter über die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(x_s|y_S)$ vermöge $x_S = -\frac{b}{2a}$ und $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$.

Lösungen: a) $f(x) = 0,5(x-5)^2 = 0,5x^2–5x+12,5$; b) $f(x) = -2,5(x+2)^2–3 = -2,5x^2–10x–13$; c) $f(x) = x^2+3x–10 = x^2+3x+2,25–10–2,25 = (x+1,5)^2–12,25$; d) $x_S = 12$ -> $f(x) = -0,25(x-12)^2+58$; e) $x_S = 0,625$ -> $f(x) = 4(x-0,625)^2+4,4375$; f) $x_S=1$ -> $f(x) =-(x-1)^2$; g) $x_S=0,5$ -> $f(x) = 2(x-0,5)^2+10,5$; h) $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{28}{9} = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{55}{9}$.

Aufgabe 6: Zeichne die allgemeine Parabel f(x) in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 7$

b) $f(x) = -2(x+2,5)^2$

c) $f(x) = \frac{7}{5}x(2x-10)$

d) $f(x) = x^2–5x+4$

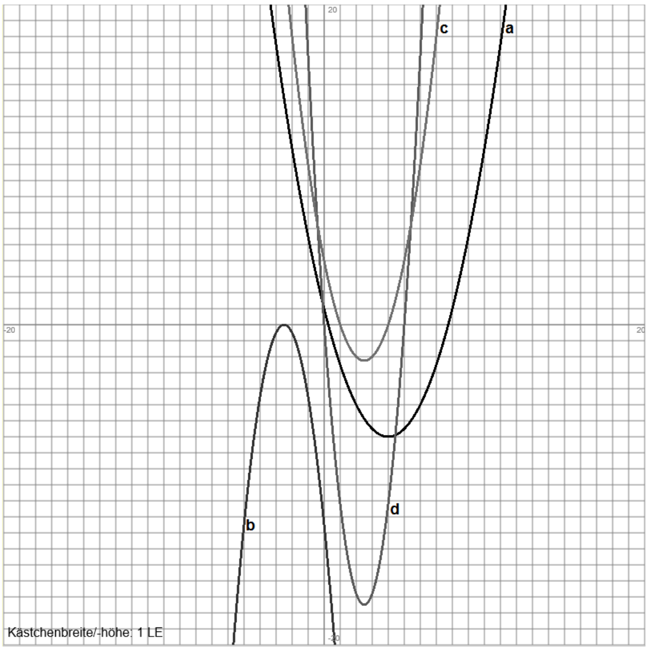
e) $f(x) = 2x^2–4x–9$

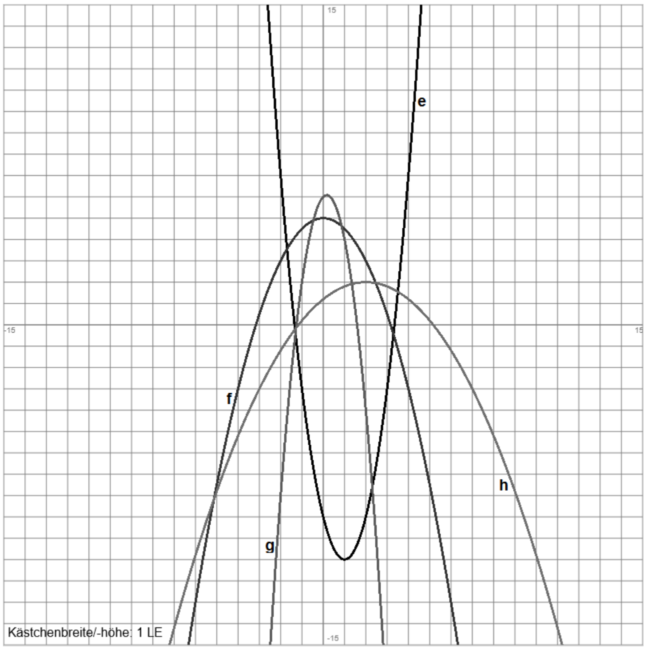
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+5$

g) $f(x) = -3x^2+x+6$

h) $f(x) = -0,2x^2+0,8x+1,2$

Vorgehensweise: I. Liegt die Scheitelform $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ vor, so ergibt sich sofort der Scheitelpunkt $S(x_s|y_S)$; im Fall der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(x_s|y_S)$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ oder vermöge $x_S = -\frac{b}{2a}$ mit: $f(x_S) = y_S$; im Fall der Produktform $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mit den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$ gilt schließlich: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$. II. Eine x-y-Wertetabelle ergänzt die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(x_s|y_S)$, wobei wegen der Symmetrie der links und rechts vom Scheitel liegenden Parabelpunkte gilt: $f(x_S+1) = f(x_S-1)$, $f(x_S+2) = f(x_S-2)$ usw. (besonders bei ganzzahligen x-Werten in der Tabelle); ansonsten können vom gegebenen Scheitelpunkt bzw. von einem vorhergehenden Parabelpunkt aus im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1·a, 3·a, 5·a, 7·a, … (ungerade Zahlen aufsteigend) Längeneinheiten nach oben (a>0) bzw. unten (a<0) zum nächsten Parabelpunkt abgemessen werden.

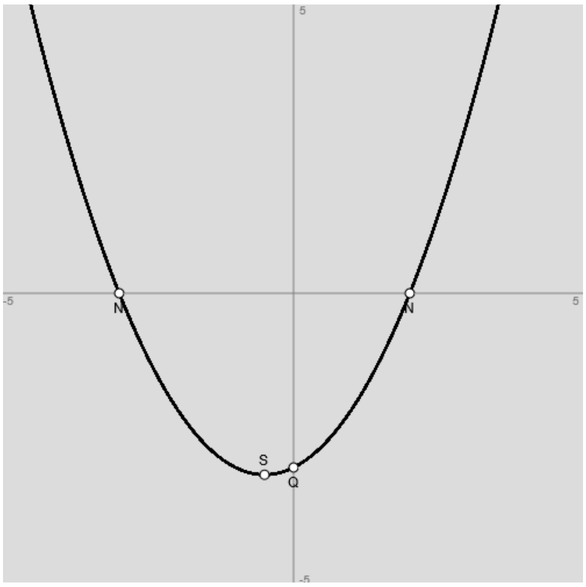




Lösungen: a) S(4|-7), a=0,5; b) S(-2,5|0), a=-2; c) $N_1(0|0)$, $N_2(5|0)$ -> x_S=2,5 -> f(x) = $\frac{14}{5}(x-2{,}5)^2-17{,}5$ -> S(2,5|-17,5), a=1,4; d) x_S=2,5 -> S(2,5|-2,25), a=1; e) x_S=1 -> S(1|-11), a=2; f) S(0|5), a=-0,5; g) $x_S=\frac{1}{3}$ -> S($\frac{1}{3}$|5$\frac{1}{3}$), a=-3; h) x_S=2 -> S(2|2), a=-0,2.

Aufgabe 7: Bestimme die Nullstellen der allgemeinen Parabel f(x).

a) f(x) = x^2+8x–9 | b) f(x) = $2x^2$+5x–7
c) f(x) = $4x^2$–5x | d) f(x) = $-\frac{1}{2}x^2$+5x–8
e) f(x) = $\frac{1}{4}(x-1)^2-16$ | f) f(x) = (x-3)(x-6)/8
g) f(x) = $-\frac{1}{6}x^2$+1 | h) f(x) = $8x^2$–15x–2
i) f(x) = $-2x^2$+9x–11 | j) f(x) = $-\frac{1}{12}(x+10)^2+3$
k) f(x) = $-x^2$+11x+26 | l) f(x) = $-1{,}5x^2$+12x–24



Vorgehensweise: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel f(x) = $a(x-x_S)^2+y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2-c=0$ => $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ => $x=x_1$, $x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q=0$ => $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c=0$ => $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

y=0,5x²+0,5x–3: S(-0,5|-3,125), Q=S_y(0|-3), N_1(-3|0), N_2(2|0)

Lösungen: a) N_1(-9|0), N_2(1|0); b) N_1(-3,5|0), N_2(1|0); c) N_1(-1,25|0), N_2(0|0); d) N_1(2|0), N_2(8|0); e) N_1(-7|0), N_2(9|0); f) N_1(3|0), N_2(6|0); g) $N_1(-\sqrt{6}|0)$, $N_2(\sqrt{6}|0)$; h) $N_1(\frac{1}{8}|0)$, N_2(2|0); i) keine Nullstellen; j) N_1(-16|0), N_2(-4|0); k) N_1(-2|0), N_2(13|0); l) N(4|0) = S(4|0).

Aufgabe 8: Bestimme die Schnittpunkte der allgemeinen Parabel f(x) mit den Achsen des Koordinatensystems.

a) f(x) = x^2–4x+4 | b) f(x) = 2(x-5)(x+3)
c) f(x) = $-\frac{1}{2}x^2$+5x+12 | d) f(x) = $2x^2$+5
e) f(x) = $\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{8}x$-1 | f) f(x) = $-4(x-3{,}2)^2$
g) f(x) = $7x^2$–12x+5 | h) f(x) = $-2x^2$+10x

Vorgehensweise: I. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für f(x) = ax^2+bx+c mit f(0) = c der y-Achsenabschnittspunkt Q=S_y(0|c). II. Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel

$f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2–c = 0$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ => $x=x_1$, $x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q = 0$ => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c = 0$ => $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) $S_y(0|4)$, $N(2|0) = S(2|0)$; b) $S_y(0|-30)$, $N_1(-3|0)$, $N_2(3|0)$; c) $S_y(0|12)$, $N_1(-2|0)$, $N_2(12|0)$; d) $S_y(0|5)$, keine Nullstellen; e) $S_y(0|-1)$, $N_1(-8|0)$, $N_2(2|0)$; f) $S_y(0|-40{,}96)$, $N(3{,}2|0) = S(3{,}2|0)$; g) $S_y(0|5)$, $N_1(\frac{5}{7}|0)$, $N_2(1|0)$; h) $S_y(0|0) = N_1(0|0)$, $N_2(5|0)$.

Aufgabe 9: Für die gegebenen allgemeinen Parabeln f(x) sind der Scheitelpunkt, die Nullstellen und der Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen.

a) f(x) = $-\frac{1}{5}(x+3)^2 + 20$

b) f(x) = $\frac{3}{10}x(x+3)$

c) f(x) = $x^2–20x+36$

d) f(x) = $-\frac{5}{11}x^2$

e) f(x) = $\frac{11}{2}x^2–\frac{5}{4}x–\frac{39}{2}$

f) f(x) = $4x^2–17x+13$

Vorgehensweise: I. Scheitelpunkt der Parabel: Aus der Scheitelform der Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $f(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a}|\frac{4ac-b^2}{4a})$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $x_S = -\frac{b}{2a}$, so dass mit $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$ als y-Koordinate der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ergibt. d) Besitzt die Parabel f(x) zwei Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, so ist: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$ und Scheitel $S(x_S|y_S)$. II. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $f(x) = ax^2+bx+c$ mit f(0) = c der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. III. Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2–c = 0$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ => $x=x_1$, $x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q = 0$ => $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c = 0$ => $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Lösungen: a) $S(-3|10)$, $S_y(0|18{,}2)$, $N_1(-13|0)$, $N_2(7|0)$; b) $S(-1{,}5|-0{,}675)$, $S_y(0|0) = N_2(0|0)$, $N_1(-3|0)$; c) $S(10|-64)$, $S_y(0|36)$, $N_1(2|0)$, $N_2(18|0)$; d) $S(0|0) = S_y(0|0) = N(0|0)$; e) $S(\frac{5}{44}|-19{,}57)$, $S_y(0|-19{,}5)$, $N_1(-\frac{39}{22}|0)$, $N_2(2|0)$; f) $S(2{,}125|-5{,}0625)$, $S_y(0|13)$, $N_1(1|0)$, $N_2(3{,}25|0)$.

Aufgabe 10: a) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem Scheitel und Nullstellen der Parabel $f(x) = x^2–2x–8$ als Ecken hat.

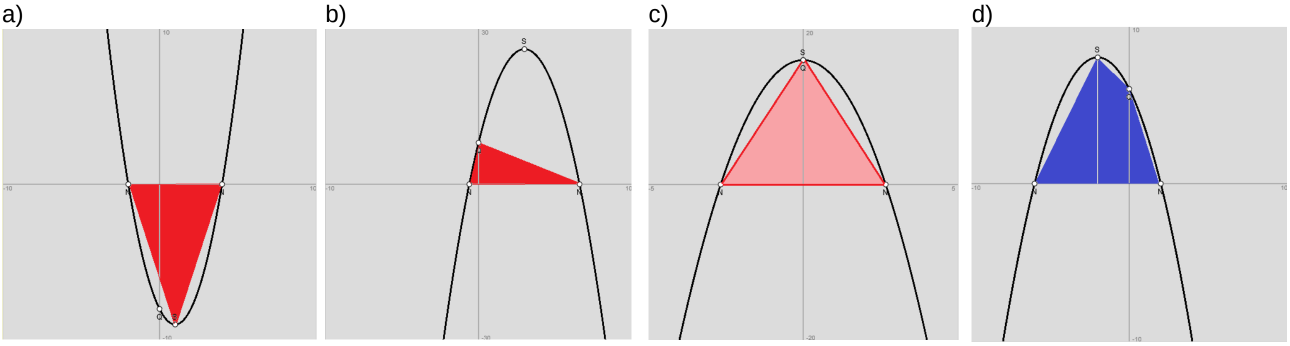
b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks, das im x-y-Koordinatensystem y-Achsenabschnittspunkt und Nullstellen der Parabel $f(x) = -2x^2+10x+12$ als Ecken hat.

c) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks, dessen Ecken Scheitel und Nullstellen der Parabel $f(x) = 16–2{,}25x^2$ sind?

d) Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks, das vom y-Achsenabschnittspunkt, dem Scheitel und den beiden Nullstellen der Parabel f(x) = $-\frac{1}{2}$(x-2)(x+6) gebildet wird?

Vorgehensweise: I. Scheitelpunkt der Parabel: Aus der Scheitelform der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $f(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a}|\frac{4ac-b^2}{4a})$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $x_S = -\frac{b}{2a}$, so dass mit $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$ als y-Koordinate der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ergibt. d) Besitzt die Parabel f(x) zwei Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, so ist: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$ und Scheitel $S(x_S|y_S)$. II. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $f(x) = ax^2+bx+c$ mit f(0) = c der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. III. Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2-c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \Rightarrow x=x_1, x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. IV. Es gilt für ein Dreieck ΔABC zwischen Scheitel, y-Achsenabschnitt und/oder Nullstellen einer allgemeinen Parabel: Fläche A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe); Umfang u = $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ mit: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$ für Punkte $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$. Für ein Trapez ABCD gilt: Fläche A = (a+c)h/2, Umfang u = $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$.

a) b) c) d)



Lösungen: a) S(1|-9), $S_y(0|-8)$, $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ -> g=6, h=9 -> A=27 FE; b) S(2,5|24,5), $S_y(0|12)$, $N_1(-1|0)$, $N_2(6|0)$ -> g=7, h=12 -> A=42 FE; c) S(0|16) = $S_y(0|16)$, $N_1(-\frac{8}{3}|0)$, $N_2(\frac{8}{3}|0)$ -> $\overline{N_1N_2} = \frac{16}{3}$, $\overline{SN_1} = \overline{SN_2} = 16{,}22$ -> u = 37,77 LE; d) S(-2|8), $S_y(0|6)$, $N_1(-6|0)$, $N_2(2|0)$ -> $g_1=4$, $h_1=8$, $a_2=8$, $c_2=6$, $h_2=2$, $g_3=2$, $h_3=6$ -> A = $g_1h_1/2 + (a_2+c_2)h_2/2 + g_3h_3/2$ = 16 + 14 + 6 = 36 FE.

Aufgabe 11: a) Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Scheitel und den y-Achsenabschnittspunkt der Parabel $f(x) = -x^2+8x$?

b) Bestimme die Gleichung der Geraden durch den Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = 3x^2-6x-1$, wenn die Geradensteigung $\frac{3}{2}$ beträgt.

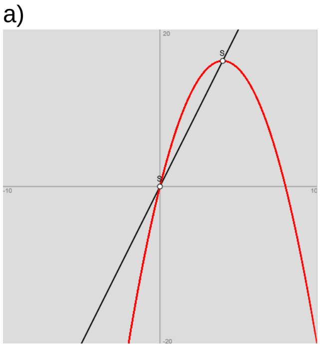
c) Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den y-Achsenabschnittspunkt der allgemeinen Parabel $f(x) = 3x^2-6x-45$ und durch deren Nullstelle mit positiver x-Koordinate verläuft.

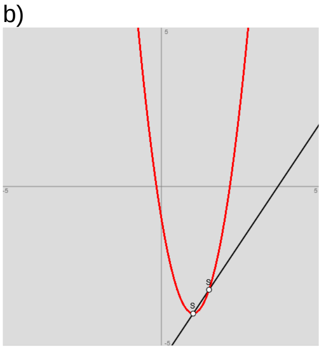
d) Wie heißt die nach oben geöffnete Normalparabel, die die beiden Nullstellen der allgemeinen Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{4}{5}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{24}{5}$ schneidet?

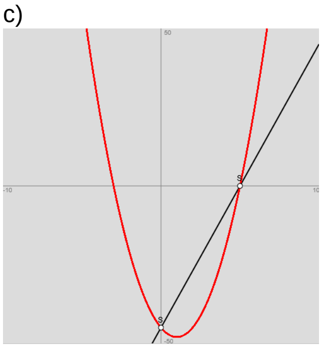
e) Wie heißt die Funktionsgleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die den Scheitelpunkt und den y-Achsenabschnittspunkt der allgemeinen Parabel f(x) = $\frac{1}{2}x^2+5x+8$ schneidet?

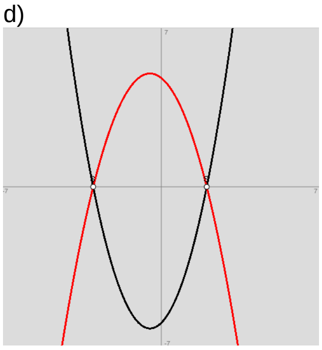
f) Wie lautet die Funktionsgleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die durch den Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel f(x) = $-\frac{1}{2}x^2+2{,}5x+\frac{7}{8}$ verläuft?

Vorgehensweise: I. Scheitelpunkt der Parabel: Aus der Scheitelform der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_S)$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a}|\frac{4ac-b^2}{4a})$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $x_S = -\frac{b}{2a}$, so dass mit $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$ als y-Koordinate der Scheitelpunkt $S(x_s|y_S)$ ergibt. d) Besitzt die Parabel f(x) zwei Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, so ist: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$ und Scheitel $S(x_s|y_S)$. II. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $f(x) = ax^2+bx+c$ mit f(0) = c der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. III. Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2-c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \Rightarrow x=x_1, x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q = 0 \Rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. IV. Aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ lässt sich eine Gerade der Form $y = mx+b_g$ bestimmen mit: $m = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$ und $b_g = y_P-mx_P$. Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ und die Steigung m vor, so lässt sich $b_g = y_P-mx_P$ direkt bestimmen. V. Für eine nach oben geöffnete Normalparabel $y = x^2+px+q$ bestimmen sich aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ die Koeffizienten p, q mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additions-, Gleichsetzungsverfahren).

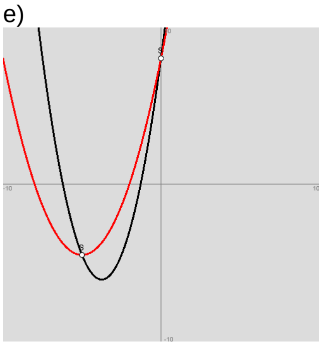
a)


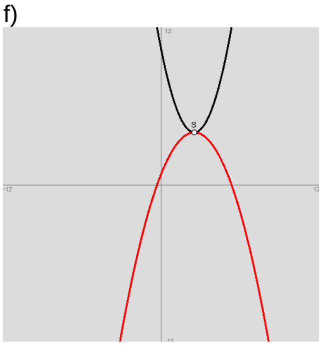
b)


c)


d)


Lösungen: a) S(4|16), $S_y(0|0) = N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$ -> y = 4x; b) S(1|-4), m -> y = 0,5x–4,5; c) S(1|-48), $S_y(0|-45)$, $N_1(-3|0)$, $N_2(5|0)$ -> m=9, b_g=-45 -> y = 9x–45; d) $N_1(-3|0)$, $N_2(2|0)$ -> y = (x+3)(x-2) = x^2+x–6; e) S(-5|-4,5), $S_y(0|8)$ -> p=7,5, q=8 -> y = x^2+7,5x+8; f) S(2,5|4) -> y = $(x-2{,}5)^2$+4 = x^2–5x+10,25.

e)


f)


Aufgabe 12: Charakterisiere die folgenden allgemeinen Parabeln f(x) durch die Art der Parabelöffnung, die Symmetrie sowie die Nennung von Scheitelpunkt und Achsenschnittpunkten.

a) $f(x) = x^2–9x+8$

b) $f(x) = -\frac{9}{16}x^2+4$

c) $f(x) = \frac{2}{3}(x+2)^2+3$

d) $f(x) = 2x^2+5x+3$

e) $f(x) = -4x^2+12x–5$

f) $f(x) = 0{,}5x^2–\frac{9}{8}$

g) $f(x) = -(x+5)^2$

h) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-3)(x+5)$

i) $f(x) = -x^2+12x–11$

j) $f(x) = -1{,}5x^2+12x–24$

Vorgehensweise: I. Parabelöffnung: Die allgemeine Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist nach oben geöffnet, wenn a>0 gilt, nach unten geöffnet, wenn a<0 erfüllt ist. Die Parabel f(x) ist schmaler als die (nicht verschobene) Normalparabel $y = x^2$, wenn a>1 oder a<-1 gilt (gestreckte Parabel); sie ist breiter als die (nicht verschobene) Normalparabel $y = x^2$, wenn -1<a<1 gilt (gestauchte Parabel). II. Symmetrie: Alle allgemeinen Parabeln $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ sind achsensymmetrisch zur senkrechten Gerade $x=x_S$ als Symmetrieachse (Parabeln als gerade Funktionen). III. Scheitelpunkt der Parabel: Aus der Scheitelform der Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ folgen sofort die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_S)$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so führt die quadratische Ergänzung: $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ auf die Scheitelform und den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a}|\frac{4ac-b^2}{4a})$. Ist die Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ gegeben, so bestimmt sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts als: $x_S = -\frac{b}{2a}$, so dass mit $f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) = y_S$ als y-Koordinate der Scheitelpunkt $S(x_s|y_S)$ ergibt. d) Besitzt die Parabel f(x) zwei Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, so ist: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $y_S = f(x_S)$ und Scheitel $S(x_s|y_S)$. IV. Schnittpunkt mit der y-Achse: Aus x=0 folgt für $f(x) = ax^2+bx+c$ mit f(0) = c der y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$. V. Schnittpunkte mit der x-Achse: Zur Bestimmung der Nullstellen der Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ ist die Gleichung: f(x) = 0 zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: a) $ax^2–c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung); b) $a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \Rightarrow x=x_1, x=x_2$ (Satz vom Nullprodukt); c) $x^2+px+q = 0 \Rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel); d) $ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Lösungen:

f(x) =	Parabelöffnung	Symmetrieachse	Scheitelpunkt	y-Achsenabschnittspunkt	Nullstellen
$x^2–9x+8$	Normalparabel, nach oben geöffnet	x=4,5	S(4,5|-12,25)	$S_y(0\|8)$	$N_1(1\|0)$, $N_2(8\|0)$
$-9x^2/16+4$	breitere Parabel als Normalparabel, nach unten geöffnet	x=0 (y-Achse)	S(0|3)	$S_y(0\|4)$	$N_1(-8/3\|0)$, $N_2(8/3\|0)$
$2(x+2)^2/3+3$	breitere Parabel als Normalparabel, nach oben geöffnet	x=-2	S(-2|3)	$S_y(0\|17/3)$	-
$2x^2+5x+3$	schmalere Parabel als Normalparabel, nach oben geöffnet	x=-1,25	S(-1,25|-0,25)	$S_y(0\|3)$	$N_1(-1{,}5\|0)$, $N_2(-1\|0)$
$-4x^2+12x–5$	schmalere Parabel als Normalparabel, nach unten geöffnet	x=1,5	S(1,5|4)	$S_y(0\|-5)$	$N_1(0{,}5\|0)$, $N_2(2{,}5\|0)$
$0{,}5x^2–9/8$	breitere Parabel als Normalparabel, nach oben geöffnet	x=0 (y-Achse)	S(0|-9/8)	$S_y(0\|-9/8)$	$N_1(-3/2\|0)$, $N_2(3/2\|0)$
$-(x+5)^2$	Normalparabel, nach unten geöffnet	x=-5	S(-5|0)	$S_y(0\|-25)$	N(-5|0)
-0,25(x-3)(x+5)	breitere Parabel als Normalparabel, nach unten geöffnet	x=1	S(-1|4)	$S_y(0\|3{,}75)$	$N_1(-5\|0)$, $N_2(3\|0)$
$-x^2+12x–11$	Normalparabel, nach unten geöffnet	x=6	S(6|25)	$S_y(0\|-11)$	$N_1(1\|0)$, $N_2(11\|0)$
$-1{,}5x^2+12x–24$	schmalere Parabel als Normalparabel, nach unten geöffnet	x=4	S(4|0)	$S_y(0\|-24)$	N(4|0)

Aufgabe 13: Die allgemeine Parabel f(x) soll um x_V Längeneinheiten (LE) nach rechts bzw. links und um y_V Längeneinheiten nach oben bzw. unten verschoben werden. Wie lautet die Funktionsgleichung der verschobenen allgemeinen Parabel g(x) in Normalform?

a) $f(x) = (x+3)^2+5$; 4 LE nach rechts, 3 LE nach unten

b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-10)^2-4$; 6,5 LE nach links, 5 LE nach oben

c) $f(x) = x^2–7$; 4 LE nach rechts, 5,5 LE nach oben

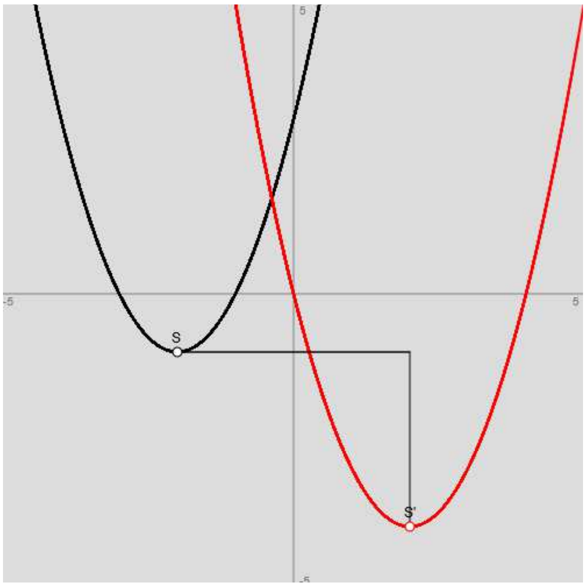
d) $f(x) = x^2–7x–13$; 5 LE nach links, 25,25 LE nach oben

e) $f(x) = 10x^2–7x+5$; 2 LE nach rechts, 8 LE nach unten

f) $f(x) = -\frac{5}{6}x^2$; 7,5 LE nach links, 2,5 LE nach unten

g) $f(x) = -x^2+3,5x+12$; 2,5 LE nach links, 1,75 LE nach oben

h) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x+10)$; 6 LE nach rechts, 5 LE nach unten



Vorgehensweise: I. $x_V>0$ bedeutet eine Verschiebung (um x_V Längeneinheiten) nach rechts, $x_V<0$ nach links; $y_V>0$ bedeutet eine Verschiebung nach oben, $y_V<0$ nach unten. Mit der Funktionsgleichung f(x) ist $g(x) = f(x-x_V)+y_V$ die Gleichung der verschobenen Funktion. II. a) Ist die Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ in Scheitelform gegeben, so wird aus dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ durch Verschiebung um x_V bzw. y_V der Scheitelpunkt $S‘(x_S-x_V|y_S+y_V)$ und damit $g(x) = a(x-x_S-x_V)^2 + y_S + y_V$. b) Mit der Parabelgleichung $f(x) = ax^2+bx+c$ ergibt sich die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel als: $g(x) = a(x-x_V)^2 +b(x-x_V)+c+y_V$. III. Das Auflösen der Scheitelform $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ mit den ersten beiden binomischen Formeln ($(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$) ergibt die Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$.

$\mathbf{y=x^2+4x+3=(x+2)^2–1}$ -> S(-2|-1) -> 4 LE nach rechts, 3 LE nach unten -> S‘(2|-4) -> $\mathbf{y=(x-2)^2–4=x^2–4x}$

Lösungen: a) $g(x) = (x-1)^2+2 = x^2–2x+3$; b) $g(x) = -\frac{1}{4}(x-3,5)^2+1 = -\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{33}{16}$; c) $g(x) = (x-4)^2–1,5 = x^2–8x+14,5$; d) $f(x) = (x-3,5)^2–25,25$ -> $g(x) = (x+1,5)^2+0 = x^2+3x+2,25$; e) $f(x) = 10(x-0,35)^2+3,775$ -> $g(x) = 10(x-2,35)^2–4,225 = 10x^2–47x+51$; f) $g(x) = -\frac{5}{6}(x+7,5)^2–2,5 = -\frac{5}{6}x^2–\frac{75}{6}x–\frac{395}{8}$; g) $f(x) = -(x-2,5)^2+18,25$ -> $g(x) = -x^2+20$; h) $f(x) =-0,5(x+7)^2+4,5$ -> $g(x) = -0,5(x+1)^2–0,5 = -0,5x^2–x–1$.

Aufgabe 14: a) Die Normalparabel $y = x^2$ wird um den Faktor 2 entlang der y-Achse gestreckt, um 3 Längeneinheiten nach links und um 4 Längeneinheiten nach unten verschoben. Wie lautet die entstandene allgemeine Parabel g(x) in Normalform?

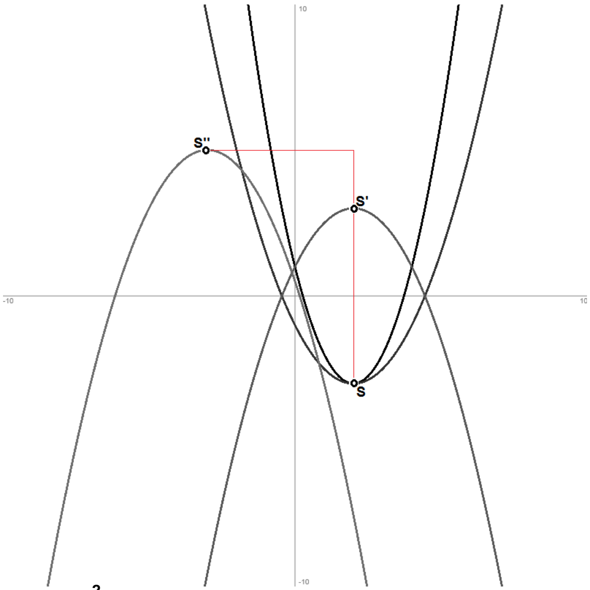
b) Die allgemeine Parabel $f(x) = -3x^2+5x+16$ wird zunächst an der x-Achse gespiegelt, dann an der y-Achse. Wie heißt die Funktionsgleichung der so entstandenen Parabel g(x)?

c) Die Normalparabel $f(x) = (x-5)^2–3$ wird um 3 Längeneinheiten nach rechts und um 5 Längeneinheiten nach oben verschoben, dann an der x-Achse gespiegelt. Gib den Scheitelpunkt der entstandenen Parabel g(x) an. Warum besitzt diese Parabel keine Nullstellen?

d) Wie ist die allgemeine Parabel $g(x) = -0,4x^2+8x$ aus der Normalparabel $y = x^2$ entstanden?

e) Wie entsteht die Parabel $g(x) = \frac{3}{2}x(x-2)$ aus der Parabel $f(x) = -2x^2+8$?

f) Die allgemeine Parabel $f(x) = -2x^2+2x+3$ wird um 3,5 Längeneinheiten nach rechts und um 1,5 Längeneinheiten nach unten verschoben und dann an der y-Achse gespiegelt. Wie lauten Scheitelpunkt, y-Achsenabschnittspunkt und Nullstellen der so entstandenen allgemeinen Parabel g(x)?



$y=(x-2)^2-3$: S(2|-3) -> Stauchung um Faktor k=0,5 -> **$y=0{,}5(x-2)^2-3$**: S(2|-3) -> Spiegelung an der x-Achse -> **$y=-0{,}5(x-2)^2+3$**: S'(2|3) -> 5 LE nach links, 2 LE nach oben -> S''(-3|5) -> **$y=-0{,}5(x+3)^2+5$**

Vorgehensweise: I. Ist k≠0, ≠1 der Streckfaktor einer nicht verschobenen Parabel $f(x) = ax^2$, so bedeutet dies, dass für 0<k<1 eine Stauchung der Parabel, für k>1 eine Streckung vorliegt, für -1<k<0 eine Stauchung bei Spiegelung an der x-Achse, für k<-1 eine Streckung bei Spiegelung an der x-Achse. Es gilt für die gestreckte Parabel die Funktionsgleichung: $g(x) = kax^2$. II. a) Eine Spiegelung einer Parabel f(x) an der x-Achse führt auf die Funktionsgleichung g(x) = -f(x), also bei der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ zu: $g(x) = -a(x-x_S)^2 - y_S$, bei der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ zu: $g(x) = -ax^2-bx-c$. Der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ wird hier zu $S'(x_S|-y_S)$. b) Eine Spiegelung einer Parabel f(x) an der y-Achse führt auf die Funktionsgleichung g(x) = f(-x), also bei der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ zu: $g(x) = a(x+x_S)^2 - y_S$, bei der Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$ zu: $g(x) = ax^2-bx+c$. Der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ wird hier zu $S'(-x_S|y_S)$. III. $x_V>0$ bedeutet eine Verschiebung (um x_V Längeneinheiten) nach rechts, $x_V<0$ nach links; $y_V>0$ bedeutet eine Verschiebung nach oben, $y_V<0$ nach unten. Mit der Funktionsgleichung f(x) ist $g(x) = f(x-x_V)+y_V$ die Gleichung der verschobenen Funktion. D.h.: a) Ist die Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ in Scheitelform gegeben, so wird aus dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ durch Verschiebung um x_V bzw. y_V der Scheitelpunkt $S'(x_S-x_V|y_S+y_V)$ und damit $g(x) = a(x-x_S-x_V)^2 + y_S + y_V$. b) Mit der Parabelgleichung $f(x) = ax^2+bx+c$ ergibt sich die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel als: $g(x) = a(x-x_V)^2 +b(x-x_V)+c+y_V$. III. Das Auflösen der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ mit den ersten beiden binomischen Formeln $((a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2)$ ergibt die Normalform $f(x) = ax^2+bx+c$.

Lösungen: a) $y = x^2$ -> Streckung -> $y = 2x^2$ -> Verschiebung -> $g(x) = 2(x+3)^2-4 = 2x^2+12x+14$; b) $f(x) = -3x^2+5x+16$ -> Spiegelung -> $y = 3x^2-5x-16$ -> Spiegelung -> $g(x) = 3x^2+5x-16$; c) $f(x) = (x-5)^2-3$ -> S(5|-3) -> S'(8|2) -> $y = (x-8)^2+2$ -> $g(x) = -(x-8)^2-2$ -> S''(8|-2); eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse besitzt keine Nullstellen; d) $y = x^2$ -> Stauchung -> $y = 0{,}4x^2$ -> Spiegelung -> $y = -0{,}4x^2$ -> S(0|0) -> Verschiebung -> S'(10|40) -> $g(x) = -0{,}4(x-10)^2+40 = -0{,}4x^2+8x$; e) $f(x) = -2x^2+8$ -> S(0|8) -> Spiegelung -> $y = 2x^2-8$ -> S'(0|-8) -> Stauchung -> $y = 1{,}5x^2+8$ -> S'(0|-8) -> Verschiebung -> $g(x) = 1{,}5(x-1)^2-1{,}5 = 1{,}5x^2-3x = 1{,}5x(x-3)$ -> S''(1|-1,5); f) $f(x) = -2x^2+2x+3$ -> S(0,5|3,5) -> Verschiebung -> S'(4|2) -> $y = -2(x-4)^2+2$ -> Spiegelung -> $y = -2(x+4)^2+2$ -> S''(-4|2), $S_y(0|-30)$, $N_1(-5|0)$, $N_2(-3|0)$.

Aufgabe 15: Berechne die Schnittpunkte zwischen allgemeiner Parabel f(x) und Gerade y.

a) $f(x) = x^2+2x-3$, $y = 4x-3$

b) $f(x) = 3x^2-7x+12$, $y = -x+9$

c) $f(x) = -2x^2+5x$, $y = 2$

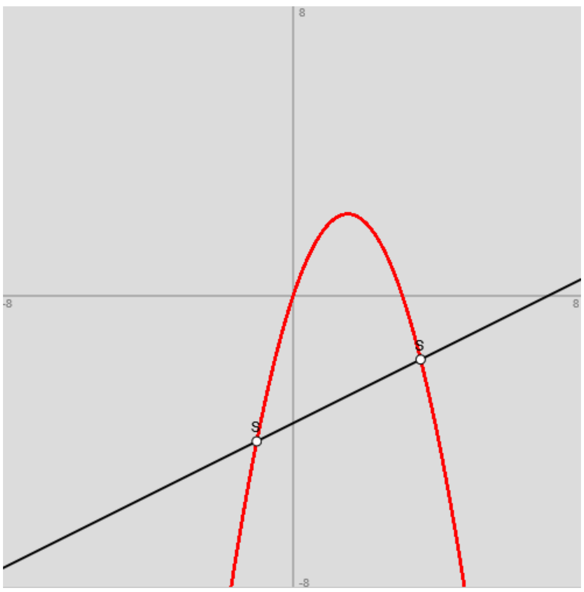
d) $f(x) = -0{,}5x^2+4x+3$, $y = x-5$

e) $f(x) = 0{,}5(x-2)^2-4{,}5$, $y = 10-2x$

f) $f(x) = -x^2+3x+5$, $y = -0{,}5x+12$

g) $f(x) = 0{,}25x(x+5)$, $y = x$

h) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2+8$, $y = 2{,}5x-10$



Vorgehensweise: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ und der Geraden $y = mx+b_g$ ist die Gleichung: f(x) = y zu lösen, d.h. es ergibt sich eine quadratische Gleichung (*) der Form: $ax^2+bx+c = mx+b_g$, die z.B. nach der a-b-c-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-(b-b_g) \pm \sqrt{(b-m)^2 - 4a(c-b_g)}}{2a}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2} + b_g = ax_{1,2}^2 + bx_{1,2} + c$ ergeben sich die Schnittpunkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$. Hat die Gleichung (*) zwei Lösungen, ist die Gerade y eine Sekante zur Parabel f(x), hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante.

$y=-x^2+3x$, **$y=0{,}5x-3{,}5$**: $P_1(-1|-4)$, $P_2(3{,}5|-1{,}75)$

Lösungen: a) $P_1(0|-3)$, $P_2(2|5)$; b) $P(1|8)$; Gerade y ist Tangente an der Parabel f(x); c) $P_1(0{,}5|2)$, $P_2(2|2)$; d) $P_1(-2|-7)$, $P_2(8|3)$; e) $P_1(-5|20)$, $P_2(5|0)$; f) keine Schnittpunkte; Gerade ist Passante; g) y = x ist die 1. Winkelhalbierende; $P_1(-1|-1)$, $P_2(0|0)$; h) $P_1(-12|-40)$, $P_2(4{,}5|1{,}25)$.

Aufgabe 16: a) Wo schneiden sich die allgemeine Parabel f(x) = $\frac{1}{4}x^2-2x+1$ und die Gerade y = -1,5x+3? Bestimme den Abstand der Schnittpunkte voneinander.

b) Der Koeffizient c der Parabel f(x) = $-x^2+3x+c$ soll so bestimmt werden, dass sich die Parabel und die Gerade y = 0,5x im Punkt $P_2(5{,}5|2{,}75)$ schneiden. Wie heißt der zweite Schnittpunkt zwischen Parabel und Gerade?

c) Die Gerade y = 3(x–1) soll so an die Parabel f(x) = x^2+5x-8 verschoben werden, dass sie Tangente an der Parabel ist. Wie lautet der Berührpunkt zwischen Parabel und Tangente, wie heißt die neue Geradengleichung?

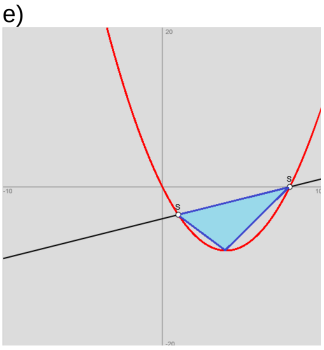
d) Eine nach oben geöffnete Normalparabel f(x) schneidet die Gerade y = $-\frac{2}{3}x+4$ an den Stellen $x_1=-3$ und $x_2=9$. Wie lautet die Gleichung der Normalparabel?

e) Die Schnittpunkte der Parabel f(x) = $\frac{1}{2}x(x-8)$ und der Geraden y = 0,5x–4 bilden zusammen mit dem Scheitelpunkt der Parabel ein Dreieck. Berechne den Umfang des Dreiecks.

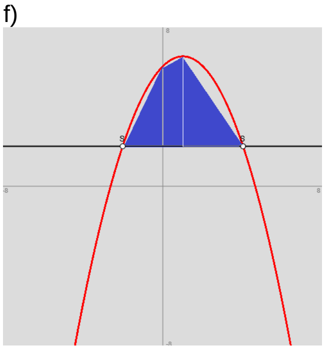
f) Die Schnittpunkte der Parabel f(x) = $-0{,}5x^2+x+6$ und der Geraden y = 2 bilden zusammen mit dem Scheitelpunkt und dem y-Achsenabschnittspunkt der Parabel ein Viereck. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.

Vorgehensweise: I. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen der Parabel f(x) = $a(x-x_S)^2 + y_S = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ und der Geraden y = $mx+b_g$ ist die Gleichung: f(x) = y zu lösen, d.h. es ergibt sich eine quadratische Gleichung (*) der Form: $ax^2+bx+c = mx+b_g$, die z.B. nach der a-b-c-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-(b-b_g)\pm\sqrt{(b-m)^2-4a(c-b_g)}}{2a}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = mx_{1,2}+b_g = ax_{1,2}^2+bx_{1,2}+c$ ergeben sich die Schnittpunkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$. Hat die Gleichung (*) zwei Lösungen, ist die Gerade y eine Sekante zur Parabel f(x), hat die Gleichung (*) eine Lösung, eine Tangente, hat die Gleichung (*) keine Lösung, eine Passante. b) Der Abstand zwischen den Schnittpunkten berechnet sich als: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. II. Damit die Gerade y = $mx+b_g$ Tangente an die Parabel f(x) ist, muss die folgende Bedingung gelten: $(b-m)^2-4a(c-b_g)=0$; die Bedingung ist nach der jeweils gesuchten Variablen umzuformen. III. Bei der Bestimmung einer Parabelgleichung ist zu beachten: Das Einsetzen der x- und y-Koordinaten der vorgegebenen Punkte P, Q in die vorgegebene Parabelgleichung mit den Unbekannten a, b, c ergibt ein lineares Gleichungssystem, das nach den Parabelkoeffizienten a, b, c aufgelöst werden kann. Für lineare Gleichungssysteme ist dabei die Anwendung von Gleichsetzungs-, Additions- oder Einsetzungsverfahren geboten. IV. Für ein Dreieck ΔABC gilt: Fläche A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe); Umfang u = $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$. Für ein Trapez ABCD gilt noch: Fläche A = (a+c)h/2, Umfang u = $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$.

e)



f)



Lösungen: a) $P_1(-2|6)$, $P_2(4|-3)$ -> $\overline{P_1P_2}=10{,}82$ LE; b) f(5,5) = 2,75 => c=16,5 -> f(x) = $-x^2+3x+16{,}5$ -> $P_1(-3|-1{,}5)$; c) y = 3x +b_g, f(x) = y => b_g = -9 (Verschiebung um 6 LE nach unten), P(-1|-12) (Berührpunkt) -> y = 3x–9; der Berührpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Parabel und Tangente; d) y -> $P_1(-3|6)$, $P_2(9|-2)$ -> a=1, b=$-\frac{20}{3}$, c=-23 -> f(x) = $x^2-\frac{20}{3}x-23$; e) f(x) -> S(4|-8), f(x) = y -> $P_1(1|-3{,}5)$, $P_2(8|0)$ -> Dreieck ΔSP_1P_2 -> u = 23.04 LE; f) f(x) -> S(1|6,5), $S_y(0|6)$, f(x) = y -> $P_1(2|2)$, $P_2(4|2)$ -> Viereck $SS_yP_1P_2$ -> $g_1=2$, $h_1=4$, $a_2=4{,}5$, $c_2=4$, $h_2=1$, $g_3=3$, $h_3=4{,}5$ -> A = $g_1h_1/2 + (a_2+c_2)h_2/2 + g_3h_3/2$ = 15 FE.

Aufgabe 17: Berechne die Schnittpunkte zwischen den allgemeinen Parabeln f(x) und g(x).

a) f(x) = $-2x^2+5$, g(x) = $\frac{1}{2}x^2-35$

b) f(x) = x^2+3x+3, g(x) = $x^2-4x+10$

c) f(x) = x(x+5), g(x) = $0,5x^2-2,5x$

d) f(x) = $2x^2-5x+3$, g(x) = $-0.5x^2+5x-7$

e) f(x) = $1,5x^2-6x+9$, g(x) = $-2x^2-4x+3$

f) f(x) = $\frac{1}{5}(x-4)^2-3$, g(x) = x^2+1

g) f(x) = $(x+2)^2-5$, g(x) = $2x^2-4x$

h) f(x) = $0,1x^2+3,9x-9$, g(x) = $-0,8x^2+0,8x-5$

Vorgehensweise: Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen den Parabel f(x) = $a_1x^2+b_1x+c_1$ und g(x) = $a_2x^2 + b_2x + c_2$ ist die Gleichung: f(x) = g(x) zu lösen, d.h. es ergibt sich eine quadratische Gleichung (*) der Form: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, die z.B. nach der a-b-c-Formel die (eventuellen) Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-(b_1-b_2)\pm\sqrt{(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)}}{2(a_1-a_2)}$ besitzt. Mit den y-Werten $y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + b_1x_{1,2} + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + b_2x_{1,2} + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$. Die Gleichung (*) kann zwei Lösungen, eine Lösung, oder keine Lösung haben.

y=-x²–4x–8,5, y=-0,5x²–4x+5: P_1(-3|12,5), P_2(3|-11,5)

Lösungen: a) P_1(-4|-27), P_2(4|-27); b) P(1|7) (Schnittpunkt); c) P_1(-15|150), P_2(0|0); d) P(2|1) (Berührpunkt); im Berührpunkt berühren sich die beiden Parabeln; e) keine Schnittpunkte; f) P(-1|2) (Berührpunkt); g) P_1(-1|6), P_2(9|126); h) P_1(-40/9|-24,358), P_2(1|-5).

Aufgabe 18: a) Bestimme den Abstand zwischen den Schnittpunkten der allgemeinen Parabeln f(x) = $\frac{1}{6}$(x-2)(x+3) und g(x) = $-x^2+\frac{25}{3}x-\frac{38}{3}$.

b) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch die Schnittpunkte der allgemeinen Parabeln f(x) = $10-0,5x^2$ und g(x) = $0,2x^2+1,4x+4,4$ läuft?

c) Die Parabel f(x) = $0,25x^2-2x-1$ wird um 7 Längeneinheiten nach links und um 7 Längeneinheiten nach oben zur Parabel g(x) verschoben. Wo schneiden sie die beiden Parabeln?

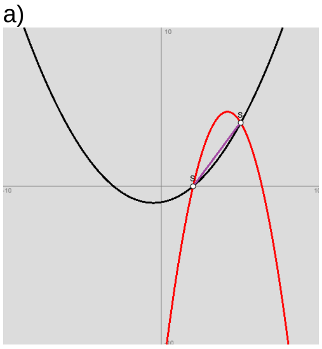
d) Zeige, dass für die beiden Parabeln f(x) = $-0,5x^2-2x-2$ und g(x) = $-0,5(x-3)^2$ die Scheitelpunkte auf der x-Achse liegen, und berechne den gemeinsamen Schnittpunkt der Parabeln. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Scheitelpunkte und der Schnittpunkt sind?

e) Gegeben sind die Parabeln f(x) = $-\frac{1}{5}x^2+8$ und g(x) = $\frac{3}{10}x^2$. Die Scheitelpunkte bilden zusammen mit den Schnittpunkten der beiden Parabeln ein Viereck. Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

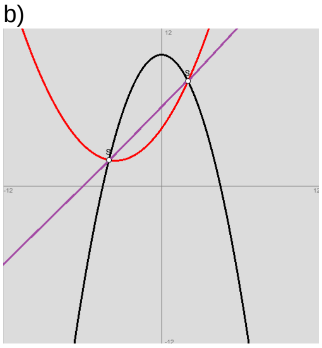
f) Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel f(x) = $2x^2+bx+c$, die die Parabel g(x) = x^2+x-8 an der Stelle x=2 berührt? Zu bestimmen sind mithin die Koeffizienten b und c.

Vorgehensweise: I. a) Zur Bestimmung der Schnittpunkte zwischen den Parabel f(x) = $a_1x^2+b_1x+c_1$ und g(x) = $a_2x^2 + b_2x + c_2$ ist die Gleichung: f(x) = g(x) zu lösen, d.h. es ergibt sich eine quadratische Gleichung (*) der Form: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, die z.B. nach der a-b-c-Formel die Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-(b_1-b_2)\pm\sqrt{(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)}}{2(a_1-a_2)}$ besitzt. Mit den durch Einsetzen der x-Werte zu errechnenden y-Werten $y_{1,2} = a_1x_{1,2}^2 + b_1x_{1,2} + c_1 = a_2x_{1,2}^2 + b_2x_{1,2} + c_2$ ergeben sich die Schnittpunkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$. Die Gleichung (*) kann zwei Lösungen, eine Lösung, oder keine Lösung haben. Bei einer Lösung gilt: $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)=0$. b) Der Abstand zwischen den Schnittpunkten berechnet sich als: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. II. Aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ lässt sich eine Gerade der Form $y = mx+b_g$ bestimmen mit Steigung: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ und y-Achsenabschnitt: $b_g = y_P–mx_P$. III. $x_V>0$ bedeutet eine Verschiebung (um x_V Längeneinheiten) nach rechts, $x_V<0$ nach links; $y_V>0$ bedeutet eine Verschiebung nach oben, $y_v<0$ nach unten. Mit der Funktionsgleichung f(x) ist $g(x) = f(x-x_V)+y_V$ die Gleichung der verschobenen Funktion. D.h.: a) Ist die Parabel $f(x) = a(x–x_S)^2 + y_S$ in Scheitelform gegeben, so wird aus dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ durch Verschiebung um x_V bzw. y_V der Scheitelpunkt $S‘(x_S-x_V|y_S+y_V)$ und damit $g(x) = a(x-x_S-x_V)^2 + y_S + y_V$. b) Mit der Parabelgleichung $f(x) = ax^2+bx+c$ ergibt sich die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel als: $g(x) = a(x-x_V)^2 +b(x-x_V)+c+y_v$. IV. Für ein Dreieck ΔABC gilt: Fläche A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe), für eine Drachen ABCD: Fläche A = ef/2 (e, f als Diagonalen). V. Bei der Bestimmung einer Parabelgleichung ist zu beachten: Es ergibt sich ein Gleichungssystem, das nach den Parabelkoeffizienten a, b, c aufgelöst werden kann. Für Gleichungssysteme allgemein ist dabei die Anwendung des Einsetzungsverfahrens geboten.

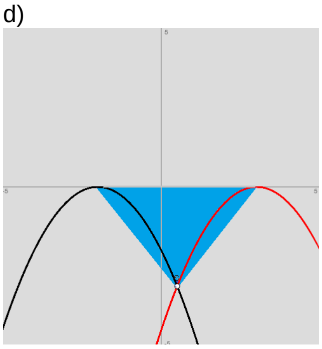
a)



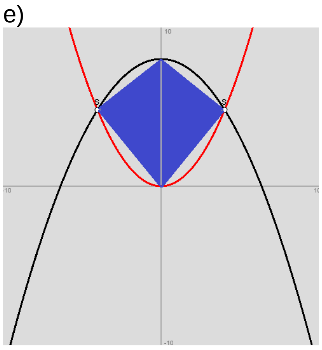
b)



d)



e)



Lösungen: a) $P_1(2|0)$, $P_2(5|4)$, $\overline{P_1P_2} = 5$ LE; b) f(x) = g(x) -> $P_1(-4|2)$, $P_2(2|8)$ -> m=1, b_g=6 -> y = x+6; c) f(x) -> S(4|-5) -> Verschiebung -> S‘(-3|2) -> $g(x) = 0{,}25(x+3)^2+2 = 0{,}25x^2+1{,}5x+4{,}25$ -> P(-1,5|2,5625); d) f(x) -> $S_1(-2|0)$, g(x) -> $S_2(3|0)$; P(0,5|-3,125) -> Dreieck $ΔS_1S_2P$ -> g=5, h=3,125 -> A = gh/2 = 7,8125 FE; e) f(x) -> $S_1(0|8)$, g(x) -> $S_2(0|0)$, f(x) = g(x) -> $P_1(-4|4{,}8)$, $P_2(4|4{,}8)$ -> Drache ABCD -> e=9,6, f=8 -> A = ef/2 = 38,4 FE; g) g(2)=-2 -> Berührpunkt P(2|-2) -> $-2 = 2\cdot 2^2+b\cdot 2+c$, $(b-1)^2-4\cdot 1\cdot (c+8) = 0$ => b=-3, c=-4 -> $f(x) = 2x^2–3x–4$.

Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Allgemeine Parabeln / Aufgaben 348-366