

Mathematik-Aufgabenpool

> Geraden, Parabeln I

Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: $y = mx + c$ mit Geradensteigung m und y -Achsenabschnitt c , m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei $x=0$) den y -Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei $m \neq 0, y=0$) die Nullstelle $N(-c/m|0)$ als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan \varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Geraden vom Typ $y = mx$ ($c = 0$) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade $y = x$ ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade $y = -x$ die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x-d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, e , dem Scheitelpunkt $S(d|e)$ und den Nullstellen $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$. Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von $b/2$: $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$ mit Scheitelpunkt $S(-b/2|c-(b/2)^2)$.

Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel $S(0|c)$ (auf der y -Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$, nach unten geöffnet, wenn $a < 0$; für $a = -1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1 < a < 1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a < -1$ oder $a > 1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.

Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der y -Achse: $x=0 \Rightarrow y = c$ (Gerade, Parabel) \rightarrow y -Achsenabschnittspunkt S_y ; b) Schnittpunkte mit der x -Achse als Nullstellen: $y = 0 \rightarrow N(x_0|0)$ (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich), $N(x_1|0), N(x_2|0)$ (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).

Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen: $y = y$. Die Gleichungen sind nach x umzustellen.

Der Abstand zwischen zwei (Scheitel-, Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$ (oder ähnlich) berechnet sich als:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras}).$$

Für lineare Gleichungen vom Typ $ax + b = c$ ergibt sich als Lösung: $x = (c-b)/a$. Für rein quadratische Gleichungen gilt die Umformung: $ax^2 + b = c \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{b-c}{a}}$. Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die b - c -Formel: $x^2 + bx + c = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Aufgabe 1: Zeige, dass der Scheitelpunkt S der Parabel $p: y = x^2 + 6x + 5$ auf der Geraden $g: y = x - 1$ liegt.

Aufgabe 2: Bestimme die Nullstellen N_1, N_2 der Parabel $p: y = (x-4)^2 - 9$.

Aufgabe 3: Die allgemeine Parabel $p: y = ax^2 + c$ besitzt den Scheitelpunkt $S(0|5)$; der Punkt $A(4|3)$ liegt auf der Parabelkurve. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4: Zeige, dass die Gerade $g: y = -\frac{1}{2}x + 4$ und die Parabel $p: y = x^2 - x + 1$ sich im Punkt $P(2|3)$ schneiden. Bestimme den zweiten Schnittpunkt Q von Gerade und Parabel.

Aufgabe 5: Der Punkt A(-2|-5) liegt auf der Parabel $p: y = x^2 + bx + 3$. Bestimme die Funktionsgleichung und den Scheitelpunkt S.

Aufgabe 6: Von den zwei nachstehenden Wertetabellen gehört eine zu einer Geraden g , die andere zu einer Parabel p :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3	4

Bestimme die Geraden- und die Parabelgleichung. Berechne die Schnittpunkte zwischen Gerade und Parabel.

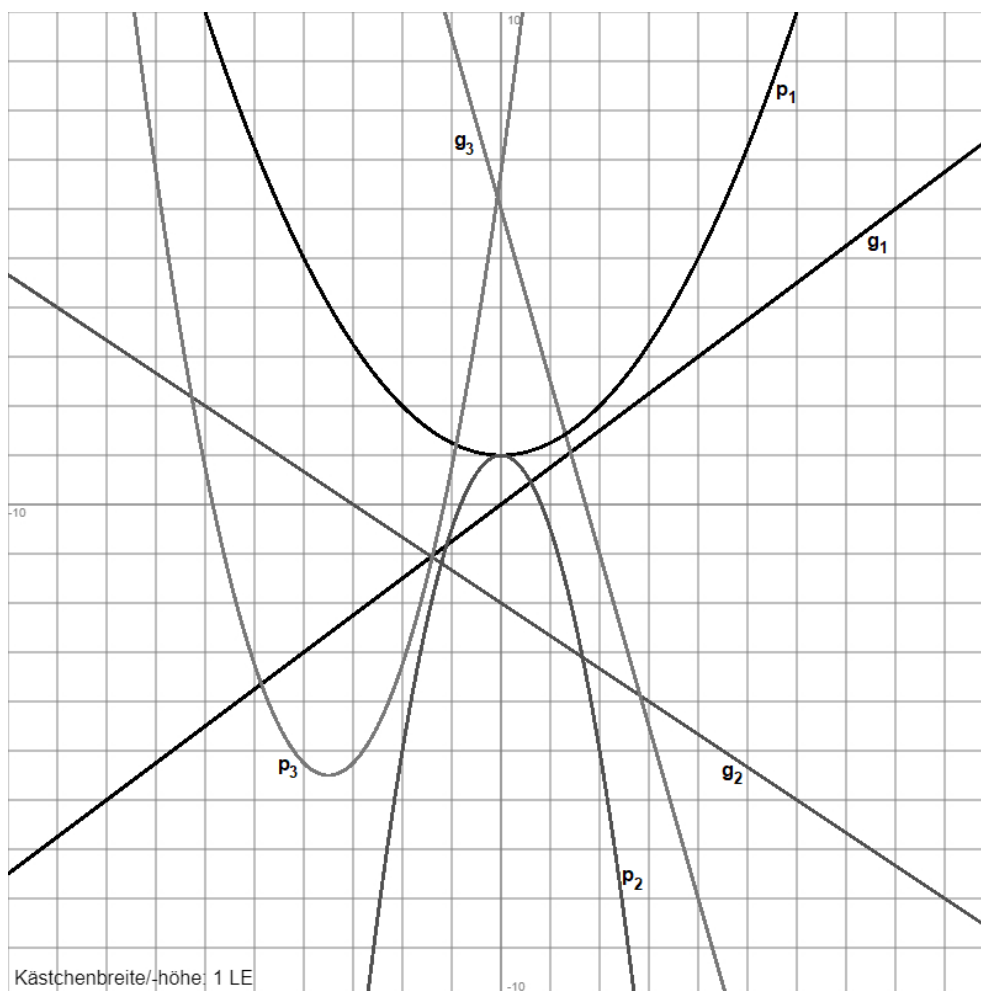
Aufgabe 7: Ergänze die nachstehende Wertetabelle einer verschobenen Normalparabel p :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y			1		-3		1

Aufgabe 8: Bestimme den Abstand zwischen dem Scheitelpunkt und den Nullstellen der verschobenen Normalparabel $p: y = x^2 + 4x - 5$.

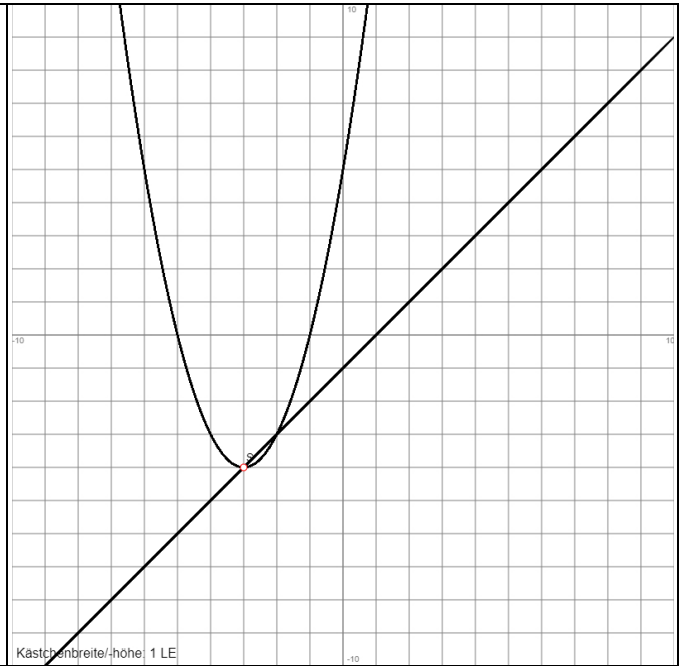
Aufgabe 9: Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_1 mit Scheitelpunkt $S_1(0|4)$ schneidet eine verschobene Normalparabel p_2 mit Scheitelpunkt $S_2(-1|-9)$ in den Schnittpunkten P und Q. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 10: Bestimme die Geraden- und Parabelgleichungen:

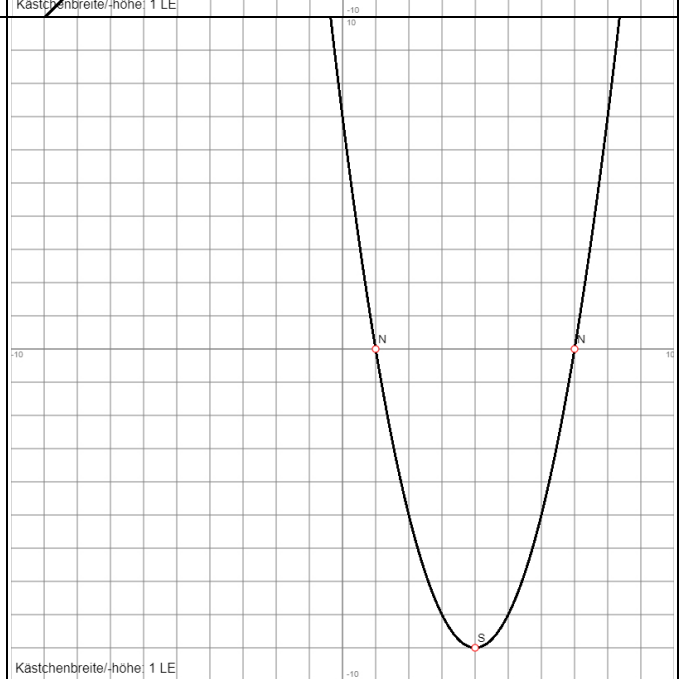


Aufgabe 1: Lösung:

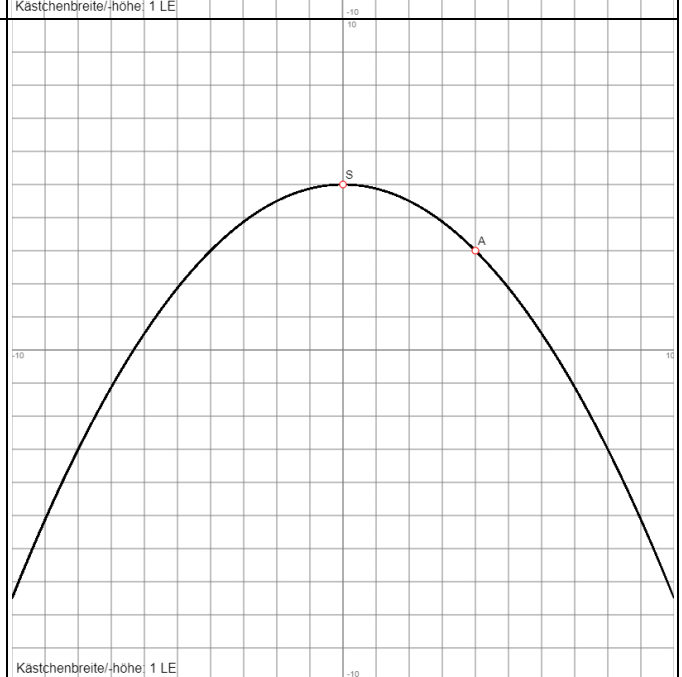
Scheitelpunkt der Parabel: $S(-3|-4)$
 Punktprobe: $g: y = x-1 \rightarrow -4 = -3-1 = -4 \rightarrow$ Scheitelpunkt
 auf Gerade

**Aufgabe 2: Lösung:**

Parabelgleichung: $p: y = x^2 - 8x + 7$
 Nullstellen: $N_1(1|0), N_2(7|0)$

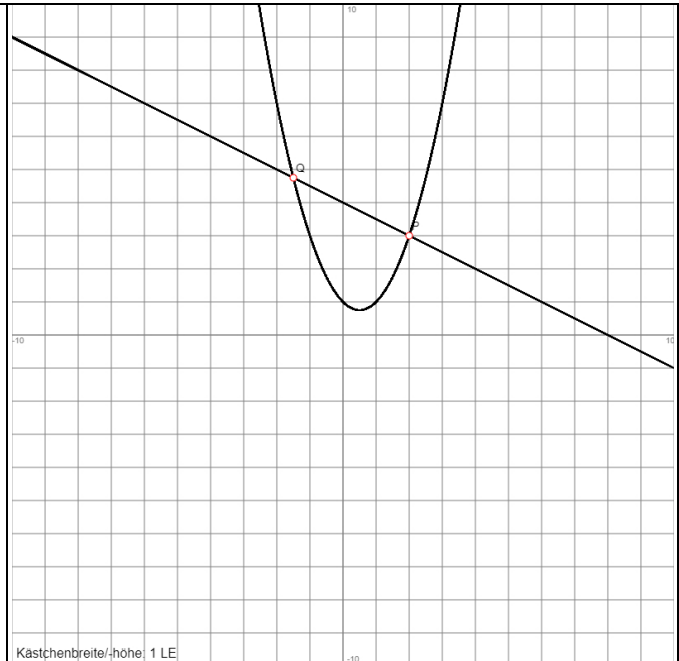
**Aufgabe 3: Lösung:**

Parabelbestimmung: $S(0|5) \rightarrow c = 5, A(4|3) \rightarrow a = -0,125$
 $\rightarrow p: y = -0,125x^2 + 5$



Aufgabe 4: Lösung:

Schnittpunkt Gerade g-Parabel p: P(2|3) <- Punktprobe
Schnittpunkt Gerade g-Parabel p: Q(-1,5|4,75)

**Aufgabe 5: Lösung:**

Parabelbestimmung: A(-2|-5) \rightarrow b = 6 \rightarrow p: $y = x^2 + 6x + 3$
Scheitelpunkt der Parabel: S(-3|-6)

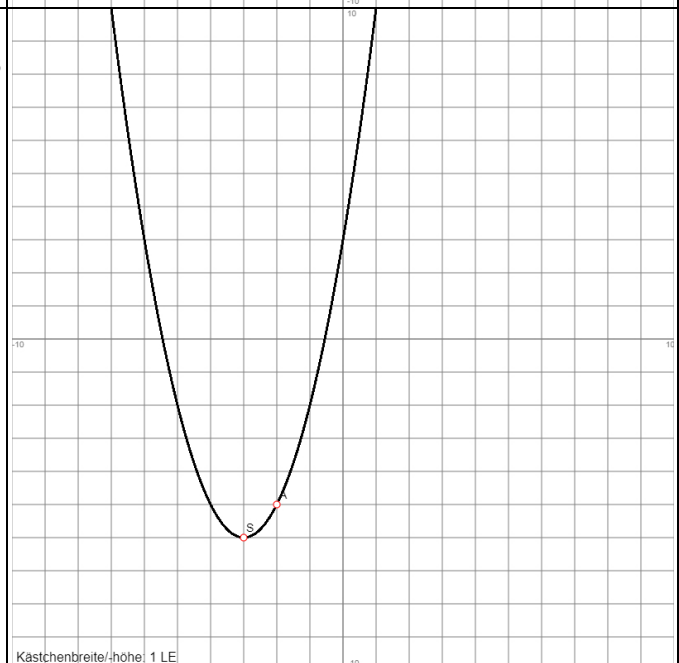
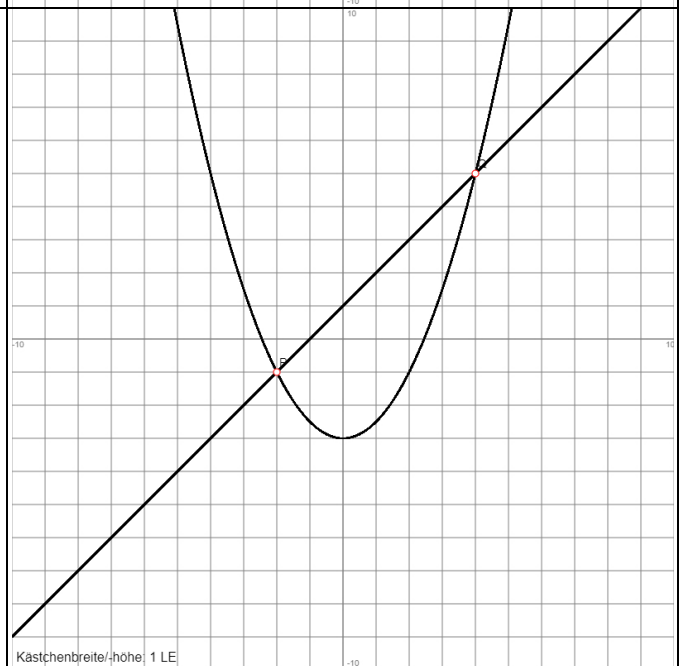
**Aufgabe 6: Lösung:**

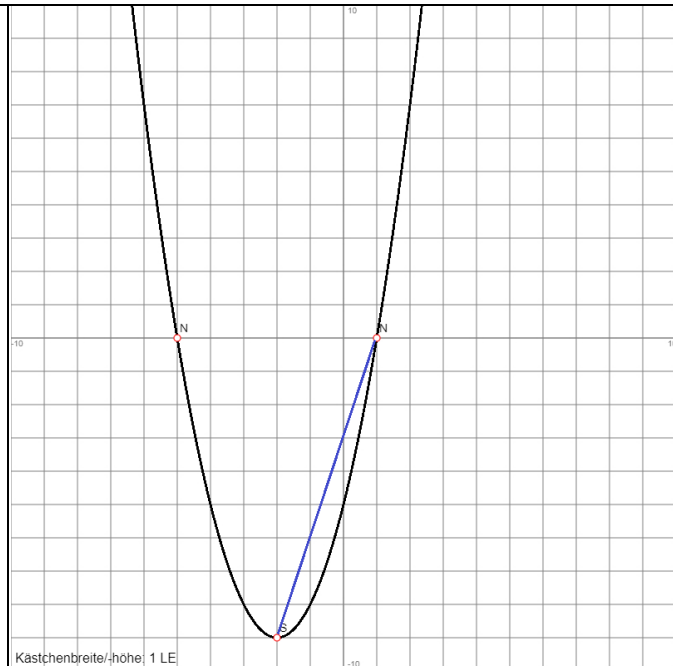
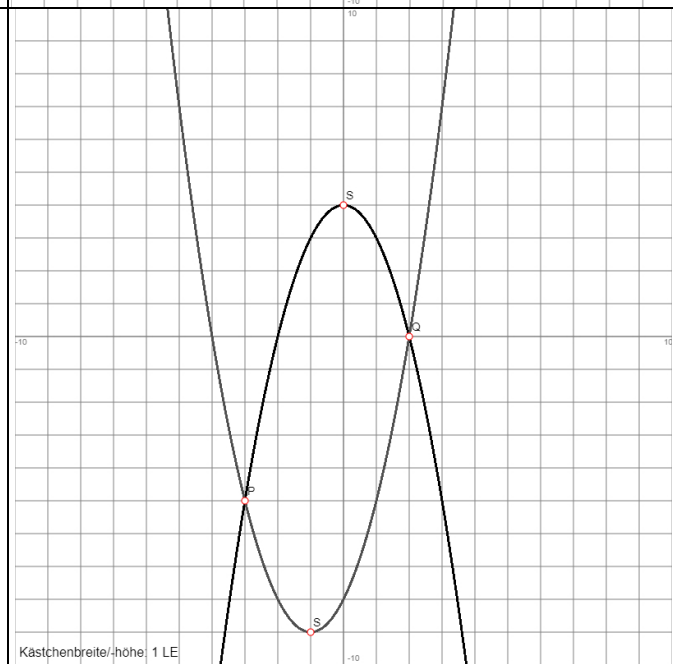
Tabelle 1: Parabel p: $y = 0,5x^2 - 3$
Tabelle 2: Gerade g: $y = x + 1$
Schnittpunkte Gerade g-Parabel p: P(-2|-1), Q(4|5)



Aufgabe 7: Lösung:Scheitelpunkt der Parabel: $S(1|-3) \rightarrow$ Parabelgleichung: $p: y = (x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	13	6	1	-2	-3	-2	1

Aufgabe 8: Lösung:Parabelgleichung: $p: y = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9 \rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-2|-9)$ Nullstellen: $N_1(-5|0), N_2(1|0)$

$$\text{Abstand } \overline{SN_1} = \overline{SN_2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (0 - (-9))^2} = \sqrt{90} = 9,5 \text{ LE (Längeneinheiten)}$$
**Aufgabe 9: Lösung:**Parabelgleichung: $p_1: y = -x^2 + 4$ Parabelgleichung: $p_2: y = x^2 + 2x - 8$ Schnittpunkte Parabel p_1 -Parabel p_2 : $P(-3|-5), Q(2|0)$ **Aufgabe 10: Lösung:**Gerade $g_1: y = 0,75x$, Gerade $g_2: y = -2x/3 - 2$, Gerade $g_3: y = -3,5x + 6$ Parabel $p_1: y = 0,25x^2 + 1$, Parabel $p_2: y = -1,5x^2 + 1$, Parabel $p_3: y = x^2 + 7x + 6,75$

Abkürzung: LE = Längeneinheiten.