

# Mathematik-Aufgabenpool

## > Geraden, Parabeln II

**Einleitung:** Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form:  $y = mx + c$  mit Geradensteigung  $m$  und  $y$ -Achsenabschnitt  $c$ ,  $m, c$  reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei  $x=0$ ) den  $y$ -Achsenabschnittspunkt  $S_y(0|c)$  und (bei  $m \neq 0, y=0$ ) die Nullstelle  $N(-c/m|0)$  als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus:  $\tan \varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$ . Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten  $P(x_1|y_1)$  und  $Q(x_2|y_2)$  mit dem Differenzenquotienten als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Geraden vom Typ  $y = mx$  ( $c = 0$ ) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade  $y = x$  ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade  $y = -x$  die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form:  $y = x^2 + bx + c$  (Normalform),  $y = (x-d)^2 + e$  (Scheitelform) mit reellen Zahlen  $b, c, e$ , dem Scheitelpunkt  $S(d|e)$  und den Nullstellen  $N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$ . Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  bzw.  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von  $b/2$ :  $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$  mit Scheitelpunkt  $S(-b/2|c-(b/2)^2)$ .

Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form  $y = ax^2 + c$  mit Scheitel  $S(0|c)$  (auf der  $y$ -Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn  $a > 0$ , nach unten geöffnet, wenn  $a < 0$ ; für  $a = -1$  ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist  $-1 < a < 1$ , so ist die Parabel gestaucht, ist  $a < -1$  oder  $a > 1$ , so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel  $y = x^2$ .

Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $x=0 \Rightarrow y = c$  (Gerade, Parabel)  $\rightarrow$   $y$ -Achsenabschnittspunkt  $S_y$ ; b) Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse als Nullstellen:  $y = 0 \rightarrow N(x_0|0)$  (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich),  $N(x_1|0), N(x_2|0)$  (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).

Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen:  $y = y$ . Die Gleichungen sind nach  $x$  umzustellen.

Der Abstand zwischen zwei (Scheitel-, Schnitt-) Punkten  $P(x_P|y_P), Q(x_Q|y_Q)$  (oder ähnlich) berechnet sich als:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras}).$$

Für lineare Gleichungen vom Typ  $ax + b = c$  ergibt sich als Lösung:  $x = (c-b)/a$ . Für rein quadratische Gleichungen gilt

die Umformung:  $ax^2 + b = c \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{b-c}{a}}$ . Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die  $b$ - $c$ -Formel:  $x^2 + bx + c \Leftrightarrow$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

**Aufgabe 1:** Bestimme die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden  $g$  durch den Scheitelpunkt der verschobenen Normalparabel  $p$ :  $y = x^2 - 4x + 11$ . Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die  $x$ -Achse des Koordinatensystems? Bestimme den weiteren Schnittpunkt  $P$  zwischen Parabel und Gerade.

**Aufgabe 2:** Die Gerade  $g$  verläuft durch die Scheitelpunkte  $S_1$ , und  $S_2$  der verschobenen Normalparabeln  $p_1: y = (x+4)^2 - 7$  und  $p_2: y = x^2 - 2x + 5$ . Die Gerade  $h$  durch den Punkt  $H(0|3)$  liegt parallel zur Geraden  $g$ . Bestimme die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  zwischen der Geraden  $h$  und der Parabel  $p_1$ . Zeige, dass einer der Schnittpunkte auch auf der Parabel  $p_2$  liegt.

**Aufgabe 3:** Die allgemeine Parabel  $p_1: y = ax^2 + c$  besitzt den Scheitelpunkt  $S_1(0|4)$  und verläuft durch den Punkt  $A(2|3)$ . Bestimme die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  zwischen der Parabel  $p_1$  und der verschobenen Normalparabel  $p_2: y = x^2 - 10x + 4$ . Wie weit liegen die Schnittpunkte auseinander?

**Aufgabe 4:** Die Geraden  $g: y = 2x + 7$  und  $h: y = -\frac{1}{2}x + 2$  schneiden sich im Scheitelpunkt  $S$  einer Parabel  $p$ . Bestimme die Funktionsgleichung  $p: y = x^2 + bx + c$  dieser Parabel. Die Geraden  $g$  und  $h$  umgrenzen zusammen mit der  $x$ -Achse des Koordinatensystems ein Dreieck. Berechne dessen Flächeninhalt.

**Aufgabe 5:** Die Kurve einer verschobenen Normalparabel  $p$  verläuft durch die Punkte  $A(-2|6)$  und  $B(3|-4)$ . Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks aus Scheitelpunkt und Nullstellen der Parabel.

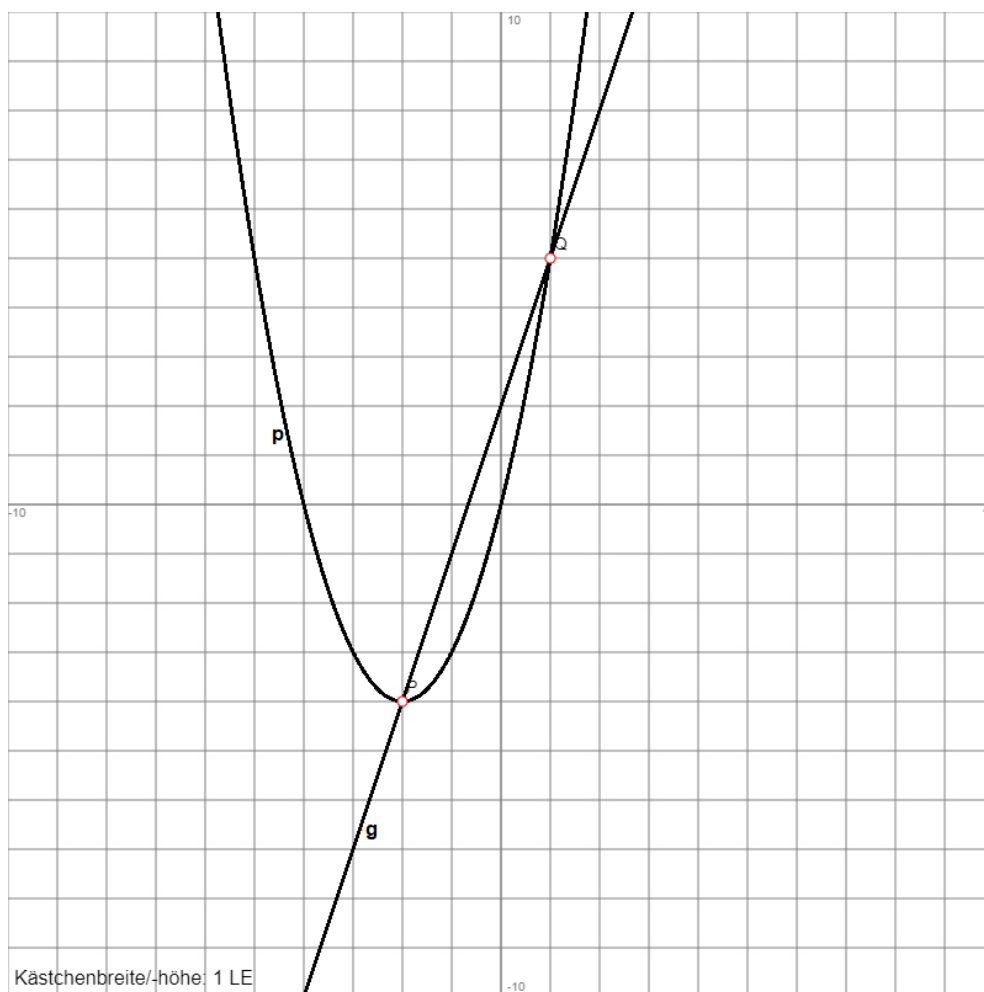
**Aufgabe 6:** Zeige, dass die Gerade  $g: y = 4x + 7$  eine Tangente an die Parabel  $p: y = x^2 + 6x + 8$  ist und berechne den Schnittpunkt  $P$  zwischen Gerade und Parabel. Ermittle den Umfang des Dreiecks, das die Tangente zusammen mit den Achsen des Koordinatensystems bildet.

**Aufgabe 7:** Bestimme die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel  $p$  aus der folgenden Wertetabelle und ergänze diese:

x		-4	-3	-2	-1	0	1
y	7		-5				-5

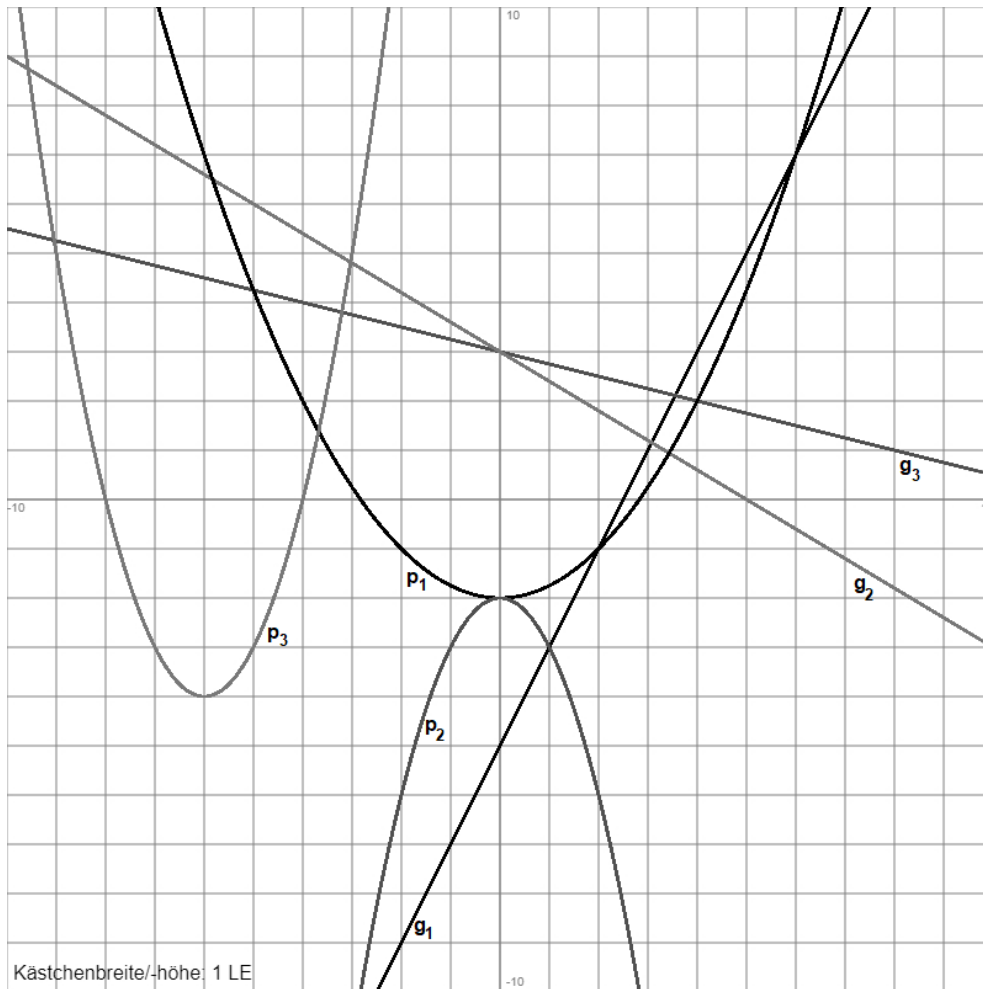
Die Gerade  $g$  verläuft durch den Scheitelpunkt  $S$  der Parabel  $p$  und deren Nullstelle  $N$  mit positiver  $x$ -Koordinate. Bestimme die Geradengleichung.

**Aufgabe 8:** Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  von Gerade  $g$  und verschobener Normalparabel  $p$  und berechne die Funktionsgleichungen von Gerade und Parabel.



**Aufgabe 9:** Ordne die folgenden Geraden- und Parabelgleichungen den entsprechenden Kurven zu:

$$y = 2x - 5; \quad y = -\frac{3}{5}x + 3; \quad y = -x^2 - 2, \quad y = x^2 + 12x + 32.$$

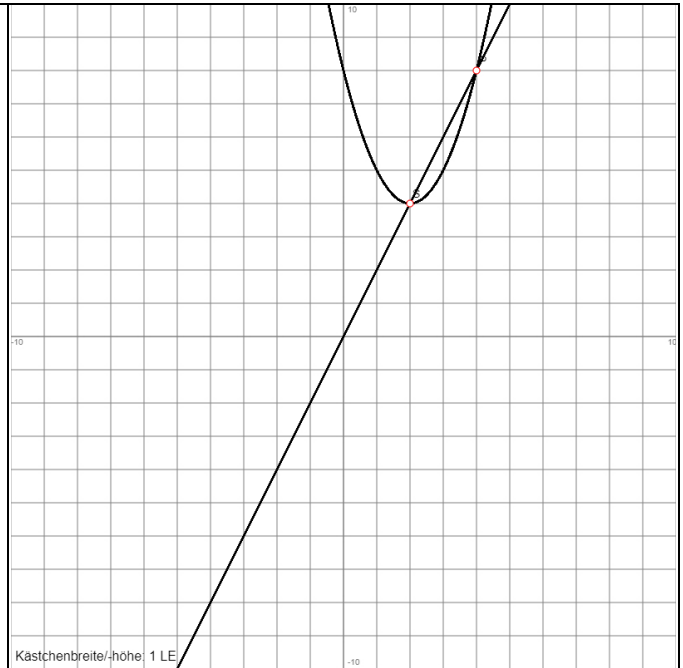


Bestimme die Gleichungen der noch fehlenden Parabel und Geraden.

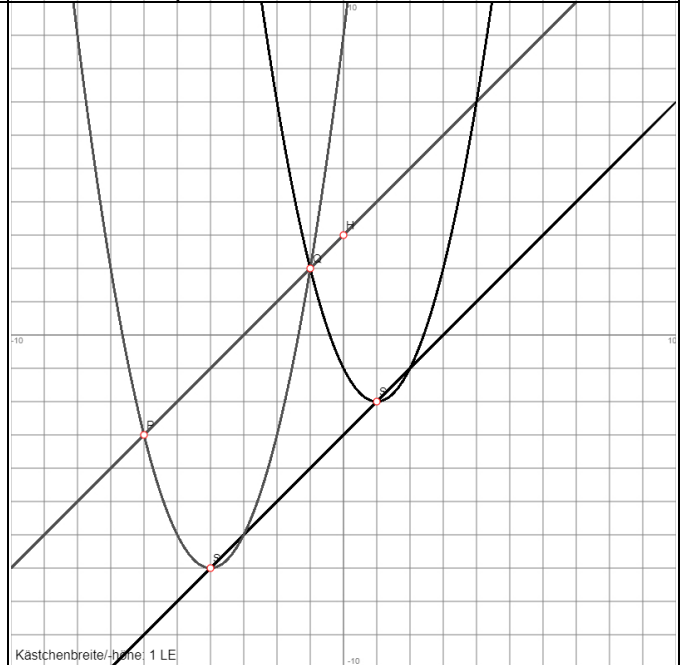
**Aufgabe 10:** Die Parabel  $p_1$  ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt  $S_1(0|6)$ , die Kurve der allgemeinen Parabel  $p_2$  besitzt den Scheitelpunkt  $S_2(0|-7,5)$  und verläuft durch den  $A(-1|7)$ . Bestimme die Parabelgleichungen. Bestimme die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  der beiden Parabeln. Scheitel- und Schnittpunkte bilden ein Viereck  $S_1PS_2Q$ . Gib an, um welche Art von Viereck es sich handelt und berechne dessen Flächeninhalt.

**Aufgabe 1: Lösung:**

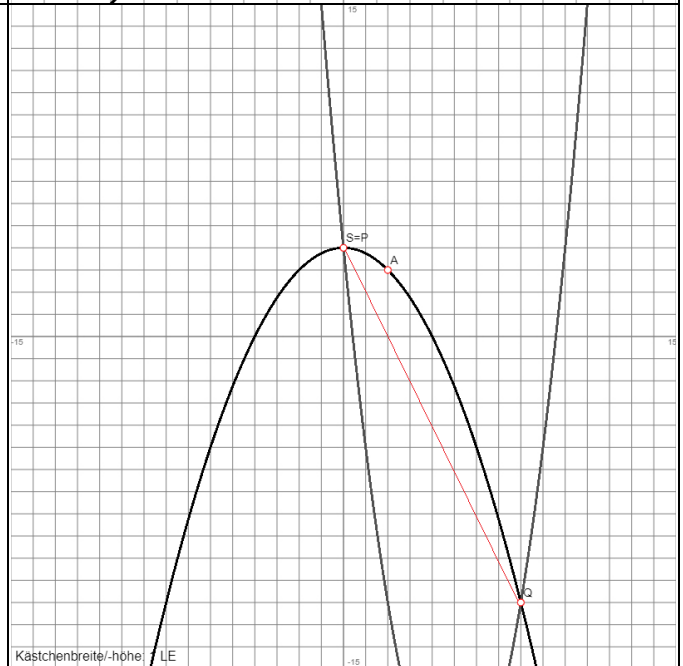
Scheitelpunkt der Parabel:  $S(1|4)$   
 Ursprungsgerade:  $g: y = 2x$   
 Steigungswinkel:  $\varphi = 63,43^\circ$   
 Schnittpunkte Gerade-Parabel:  $[S(1|4)], P(4|8)$

**Aufgabe 2: Lösung:**

Scheitelpunkte der Parabeln:  $S_1(-4|-7), S_2(1|-2)$   
 Gerade:  $g: y = x-1$   
 Parallele Gerade:  $h: y = x+3$   
 Schnittpunkte Gerade h-Parabel  $p_1: P(-6|-3), Q(-1|2)$   
 $Q(-1|2)$  auch auf Parabel  $p_2$

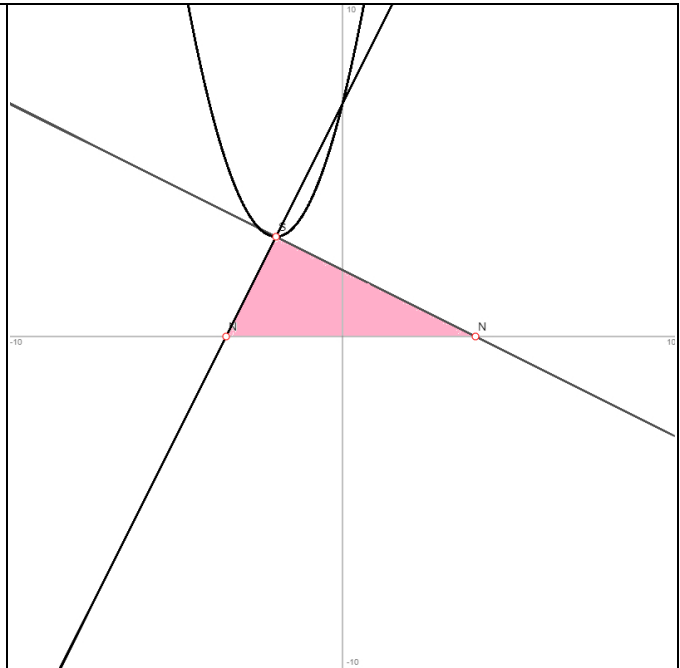
**Aufgabe 3: Lösung:**

Parabelbestimmung:  $S_1(0|4) \rightarrow c = 4, A(2|3) \rightarrow a = -0,25$   
 $\rightarrow p_1: y = -0,25x^2 + 4$   
 Schnittpunkte Parabel  $p_1$ -Parabel  $p_2$ :  $P(0|4) = S_1(0|4), Q(8|-12)$   
 Abstand der Schnittpunkte:  $\overline{PQ} = 17,9 \text{ LE}$

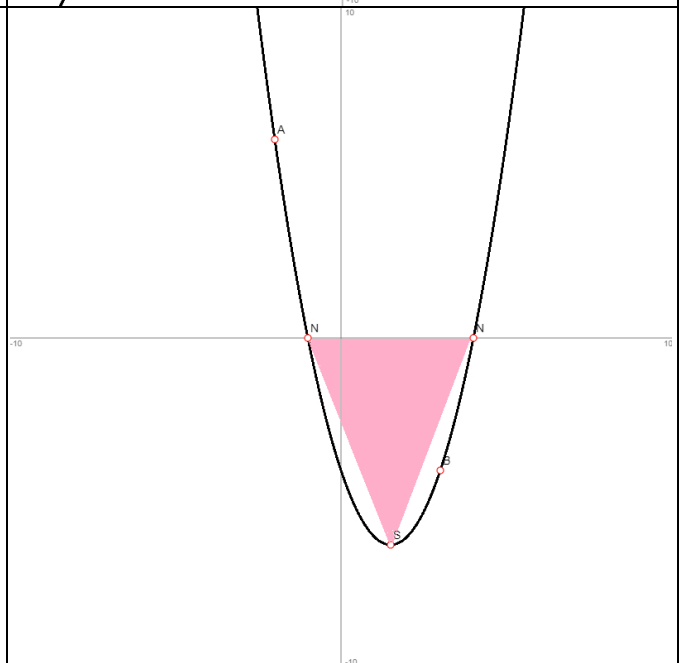


**Aufgabe 4: Lösung:**

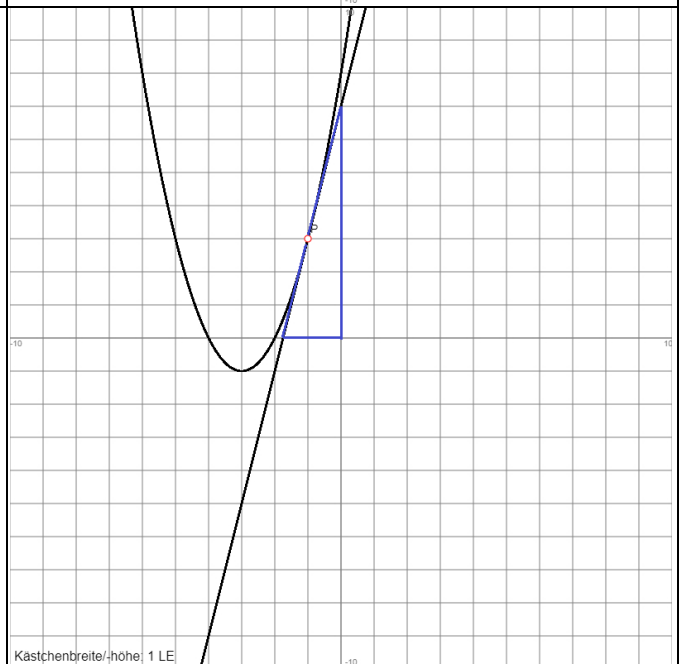
Schnittpunkt Gerade g-Gerade h:  $S(-2|3)$   
 Parabelgleichung:  $p: y = (x+2)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$   
 Nullstelle Gerade g:  $N(-3,5|0)$ , Nullstelle Gerade h:  $N(4|0)$   
 -> Dreieckgrundseite  $g = 7,5$ , Dreieckhöhe = 3 -> Dreieckflächeninhalt:  $A = 11,25$  FE

**Aufgabe 5: Lösung:**

Parabelbestimmung:  $A(-2|6)$ ,  $B(3|-4)$  -> lineares Gleichungssystem ->  $y = x^2 - 3x - 4$   
 Scheitelpunkt der Parabel:  $S(1,5|-6,25)$   
 Nullstellen der Parabel:  $N_1(-1|0)$ ,  $N_2(4|0)$   
 Dreieckgrundseite  $g = 5$ , Dreieckhöhe  $h = 6,25$  -> Dreieckflächeninhalt:  $A = 15,625$  FE

**Aufgabe 6: Lösung:**

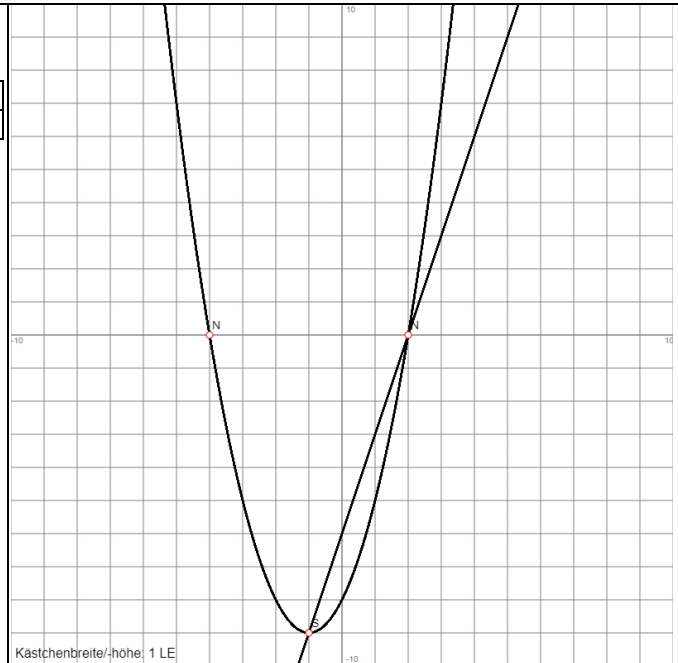
Schnittpunkt Gerade-Parabel:  $P(-1|3)$  -> Tangente  
 Gerade g ->  $S_y(0|7)$ ,  $N(-1,75|0)$   
 Rechtwinkliges Dreieck: Kathete  $a = 1,75$ , Kathete  $b = 7$ ,  
 Hypotenuse  $c = 7,22$  -> Dreieckumfang:  $U = 16$  LE



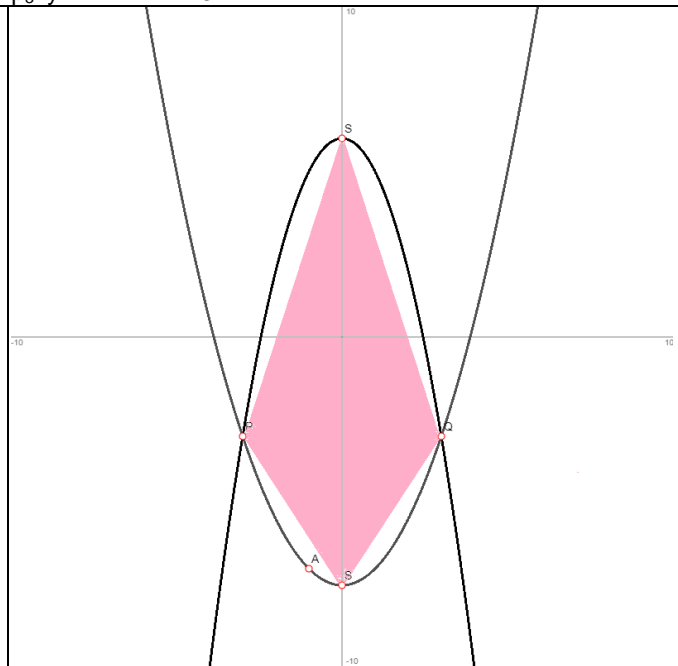
**Aufgabe 7: Lösung:**

Tabelle:

x	-5	-4	-2	-1	0
y	7	0	-8	-9	-8

Parabelgleichung: p:  $y = x^2 + 2x - 8$ Scheitelpunkt der Parabel: S(-1|-9), Nullstelle der Parabel: N(2|0) -> Geradengleichung: g:  $y = 3x - 6$ **Aufgabe 8: Lösung:**Schnittpunkte P(-2|-4), Q(1|5) -> Gerade g:  $y = 3x + 2$ , Parabel p:  $y = x^2 + 4x$ **Aufgabe 9: Lösung:**Gerade g<sub>1</sub>:  $y = 2x - 5$ , Gerade g<sub>2</sub>:  $y = -0,6x + 3$ , Gerade g<sub>3</sub>:  $y = -0,25x + 3$ Parabel p<sub>1</sub>:  $y = 0,25x^2 - 2$ , Parabel p<sub>2</sub>:  $y = -x^2 - 2$ , Parabel p<sub>3</sub>:  $y = x^2 + 12x + 32$ **Aufgabe 10: Lösung:**Parabelgleichung: p<sub>1</sub>:  $y = -x^2 + 6$ Parabelgleichung: p<sub>2</sub>:  $y = 0,5x^2 - 7,5$ Schnittpunkte Parabel p<sub>1</sub>-Parabel p<sub>2</sub>: P(-3|-3), Q(3|-3)Viereck S<sub>1</sub>PS<sub>2</sub>Q als Drache -> Diagonalen e = 6, f = 13,5

-&gt; Viereckflächeninhalt: A = 40,5 FE



Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.