Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Geraden, Parabeln II

Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: y = mx + c mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt c, m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei x=0) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei m≠0, y=0) die Nullstelle N(-c/m|0) als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Geraden vom Typ y = mx (c = 0) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade y = x ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade y = -x die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, e, dem Scheitelpunkt S(d|e) und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von b/2 : $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$ mit Scheitelpunkt $S(-b/2|c-(b/2)^2)$. Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel S(0|c) (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; für a=-1 ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist -1<a<1, so ist die Parabel gestaucht, ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.

Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: x=0 => y = c (Gerade, Parabel) -> y-Achsenabschnittspunkt S_y; b) Schnittpunkte mit der x-Achse als Nullstellen: y = 0 -> $N(x_0|0)$ (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich), $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$ (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).
Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen: y = y. Die Gleichungen sind nach x umzustellen.

Der Abstand zwischen zwei (Scheitel-, Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ (oder ähnlich) berechnet sich als: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$ (Satz des Pythagoras).

Für lineare Gleichungen vom Typ ax + b = c ergibt sich als Lösung: x = (c-b)/a. Für rein quadratische Gleichungen gilt die Umformung: $ax^2 + b = c \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$. Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die b-c-Formel: $x^2 + bx + c = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Aufgabe 1: Bestimme die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden g durch den Scheitelpunkt der verschobenen Normalparabel p: $y = x^2 – 4x + 8$. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die x-Achse des Koordinatensystems? Bestimme den weiteren Schnittpunkt P zwischen Parabel und Gerade.

Aufgabe 2: Die Gerade g verläuft durch die Scheitelpunkte S_1, und S_2 der verschobenen Normalparabeln p_1: $y= (x+4)^2 – 7$ und p_2: $y = x^2 – 2x – 1$. Die Gerade h durch den Punkt H(0|3) liegt parallel zur Geraden g. Bestimme die Schnittpunkte P und Q zwischen der Geraden h und der Parabel p_1. Zeige, dass einer der Schnittpunkte auch auf der Parabel p_2 liegt.

Aufgabe 3: Die allgemeine Parabel p_1: $y = ax^2 + c$ besitzt den Scheitelpunkt $S_1(0|4)$ und verläuft durch den Punkt A(2|3). Bestimme die Schnittpunkte P und Q zwischen der Parabel p_1 und der verschobenen Normalparabel p_2: $y = x^2 – 10x + 4$. Wie weit liegen die Schnittpunkte auseinander?

Aufgabe 4: Die Geraden g: $y = 2x + 7$ und h: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ schneiden sich im Scheitelpunkt S einer Parabel p. Bestimme die Funktionsgleichung p: $y = x^2 + bx + c$ dieser Parabel. Die Geraden g und h umgrenzen zusammen mit der x-Achse des Koordinatensystems ein Dreieck. Berechne dessen Flächeninhalt.

Aufgabe 5: Die Kurve einer verschobenen Normalparabel p verläuft durch die Punkte A(-2|6) und B(3|-4). Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks aus Scheitelpunkt und Nullstellen der Parabel.

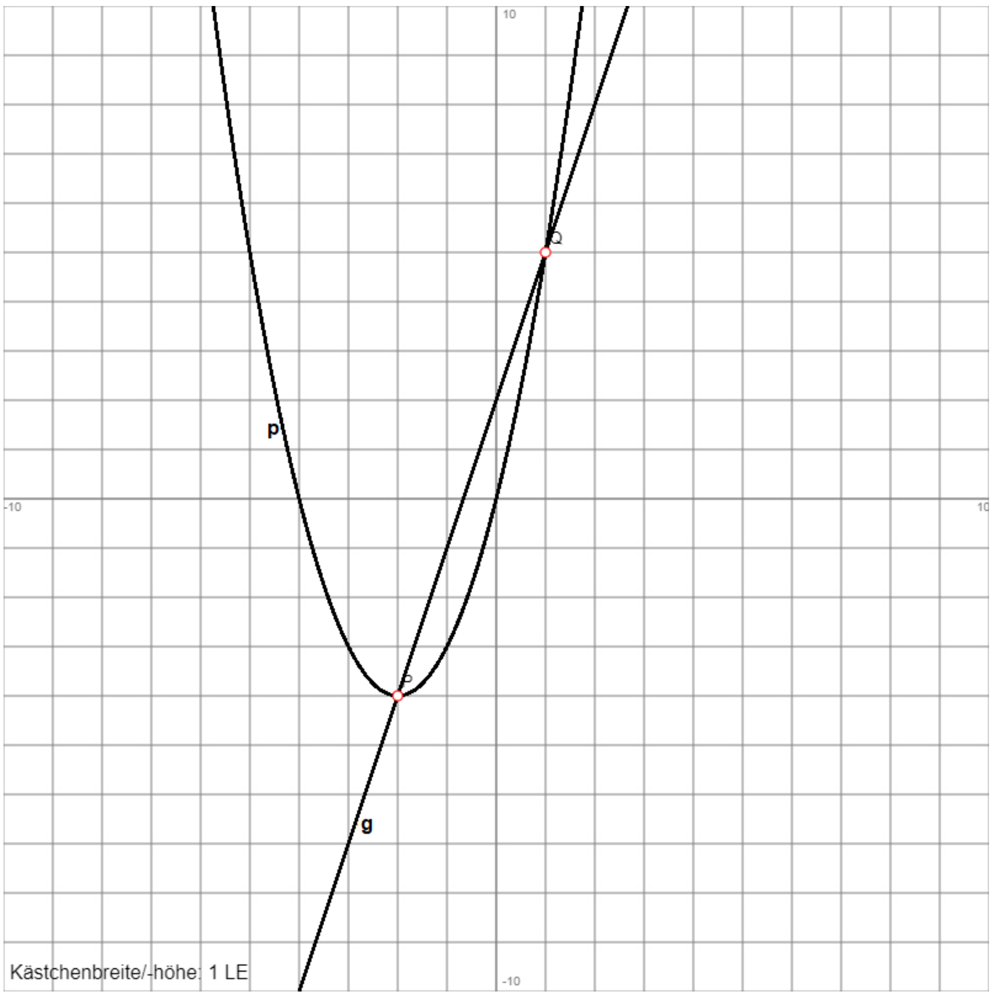
Aufgabe 6: Zeige, dass die Gerade g: $y = 4x + 7$ eine Tangente an die Parabel p: $y = x^2 + 6x + 8$ ist und berechne den Schnittpunkt P zwischen Gerade und Parabel. Ermittle den Umfang des Dreiecks, das die Tangente zusammen mit den Achsen des Koordinatensystems bildet.

Aufgabe 7: Bestimme die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel p aus der folgenden Wertetabelle und ergänze diese:

x		-4	-3	-2	-1	0	1
y	7		-5				-5

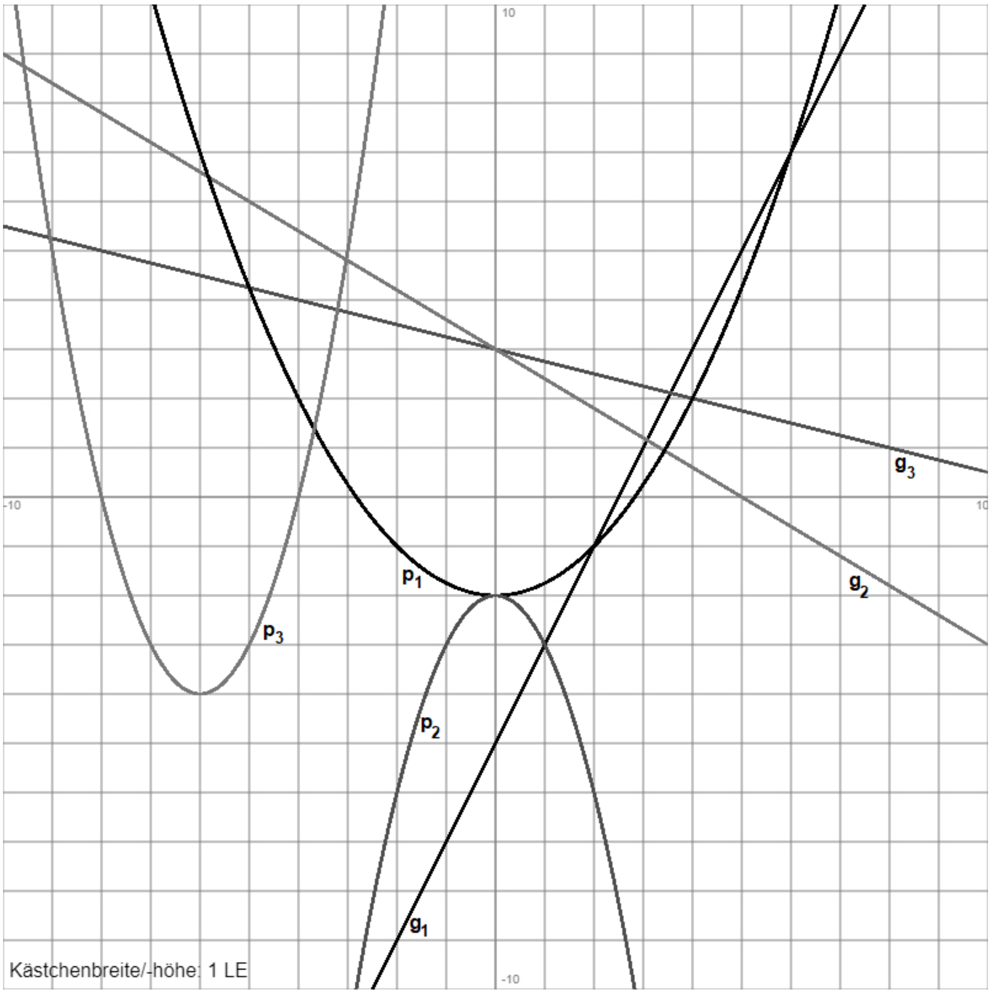
Die Gerade g verläuft durch den Scheitelpunkt S der Parabel p und deren Nullstelle N mit positiver x-Koordinate. Bestimme die Geradengleichung.

Aufgabe 8: Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von Gerade g und verschobener Normalparabel p und berechne die Funktionsgleichungen von Gerade und Parabel.



Aufgabe 9: Ordne die folgenden Geraden- und Parabelgleichungen den entsprechenden Kurven zu:

$y = 2x - 5$; $y = -\frac{3}{5}x + 3$; $y = -x^2 - 2$, $y = x^2 + 12x + 32$.

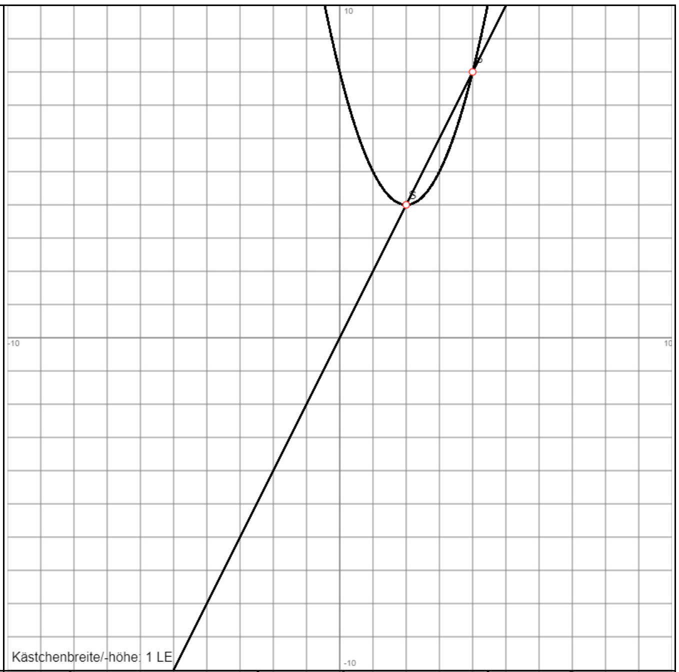


Bestimme die Gleichungen der noch fehlenden Parabel und Geraden.

Aufgabe 10: Die Parabel p_1 ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S_1(0|6)$, die Kurve der allgemeinen Parabel p_2 besitzt den Scheitelpunkt $S_2(0|-7{,}5)$ und verläuft durch den $A(-1|7)$. Bestimme die Parabelgleichungen. Bestimme die Schnittpunkte P und Q der beiden Parabeln. Scheitel- und Schnittpunkte bilden ein Viereck S_1PS_2Q. Gib an, um welche Art von Viereck es sich handelt und berechne dessen Flächeninhalt.

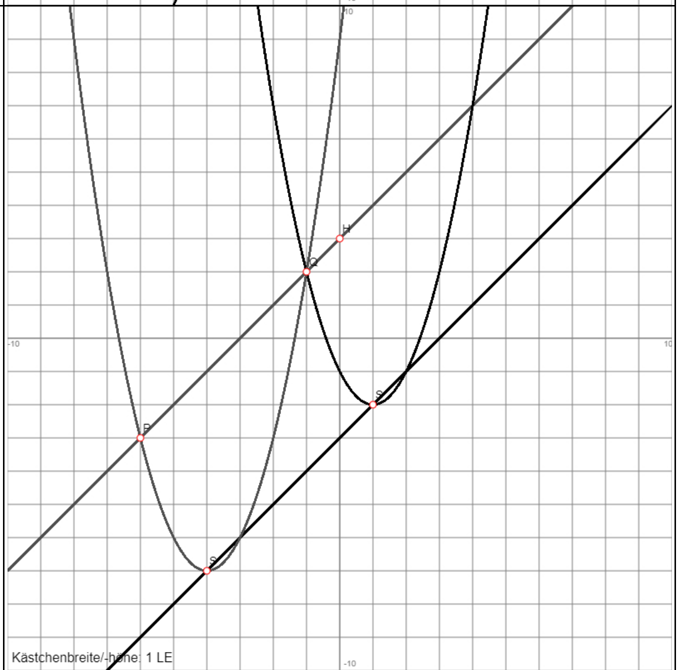
Aufgabe 1: Lösung:

Scheitelpunkt der Parabel: S(2|4)
Ursprungsgerade: g: y = 2x
Steigungswinkel: φ = 63,43°
Schnittpunkte Gerade-Parabel: [S(2|4)], P(4|8)



Aufgabe 2: Lösung:

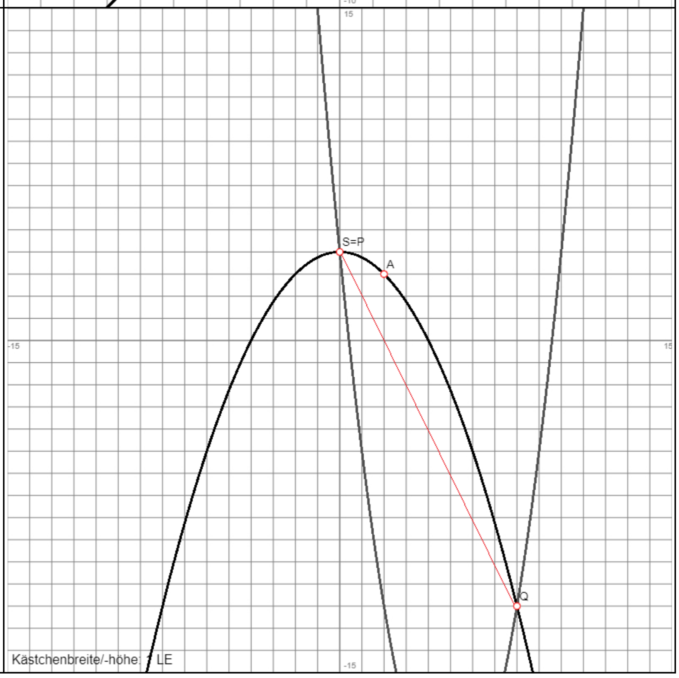
Scheitelpunkte der Parabeln: S_1(-4|-7), S_2(1|-2)
Gerade: g: y = x–3
Parallele Gerade: h: y = x+3
Schnittpunkte Gerade h-Parabel p_1: P(-6|-3), Q(-1|2)
Q(-1|2) auch auf Parabel p_2



Aufgabe 3: Lösung:

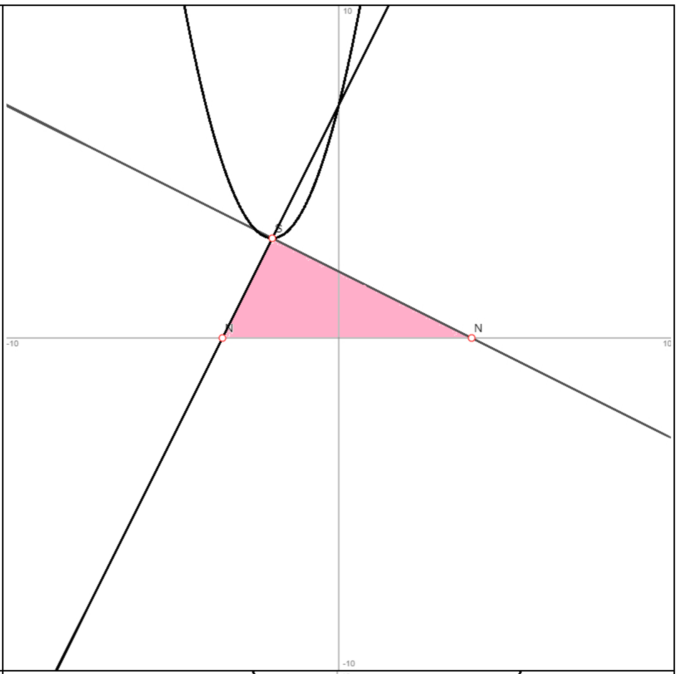
Parabelbestimmung: S_1(0|4) -> c = 4, A(2|3) -> a = -0,25 -> p_1: y = -0,25x^2 + 4
Schnittpunkte Parabel p_1-Parabel p_2: P(0|4) = S_1(0|4), Q(8|-12)

Abstand der Schnittpunkte: $\overline{PQ}$ = 17,9 LE



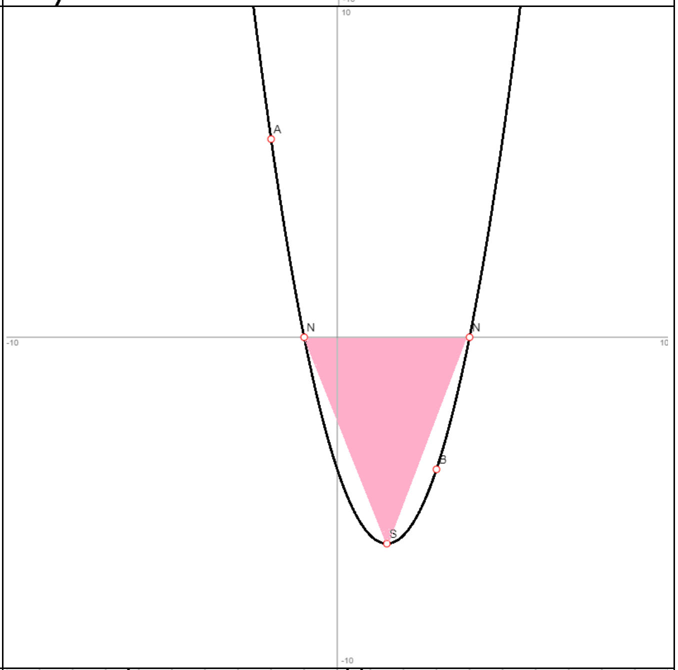
Aufgabe 4: Lösung:

Schnittpunkt Gerade g-Gerade h: S(-2|3)
Parabelgleichung: p: $y = (x+2)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$
Nullstelle Gerade g: N(-3,5|0), Nullstelle Gerade h: N(4|0)
-> Dreieckgrundseite g = 7,5, Dreieckhöhe = 3 ->
Dreieckflächeninhalt: A = 11,25 FE



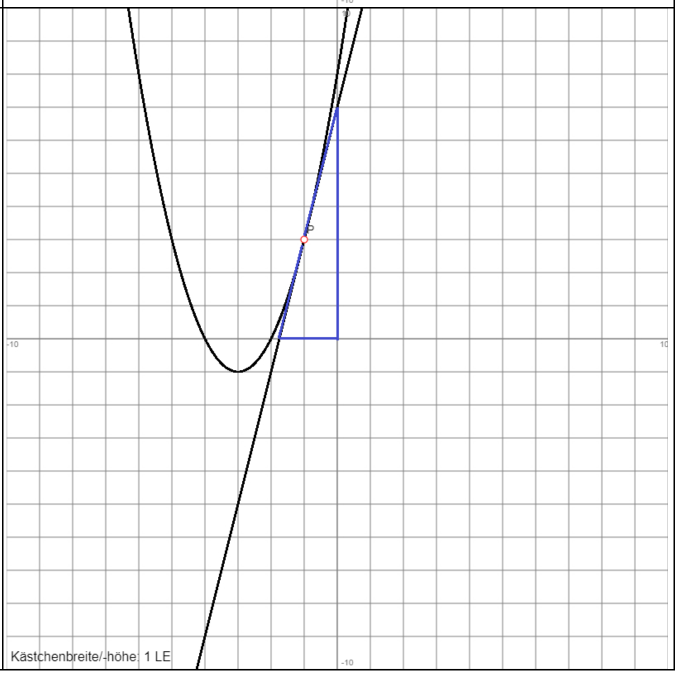
Aufgabe 5: Lösung:

Parabelbestimmung: A(-2|6), B(3|-4) -> lineares Gleichungssystem -> $y = x^2 – 3x – 4$
Scheitelpunkt der Parabel: S(1,5|-6,25)
Nullstellen der Parabel: $N_1(-1|0)$, $N_2(4|0)$
Dreieckgrundseite g = 5, Dreieckhöhe h = 6,25 ->
Dreieckflächeninhalt: A = 15,625 FE



Aufgabe 6: Lösung:

Schnittpunkt Gerade-Parabel: P(-1|3) -> Tangente
Gerade g -> $S_y(0|7)$, N(-1,75|0)
Rechtwinkliges Dreieck: Kathete a = 1,75, Kathete b = 7,
Hypotenuse c = 7,22 -> Dreieckumfang: U = 16 LE

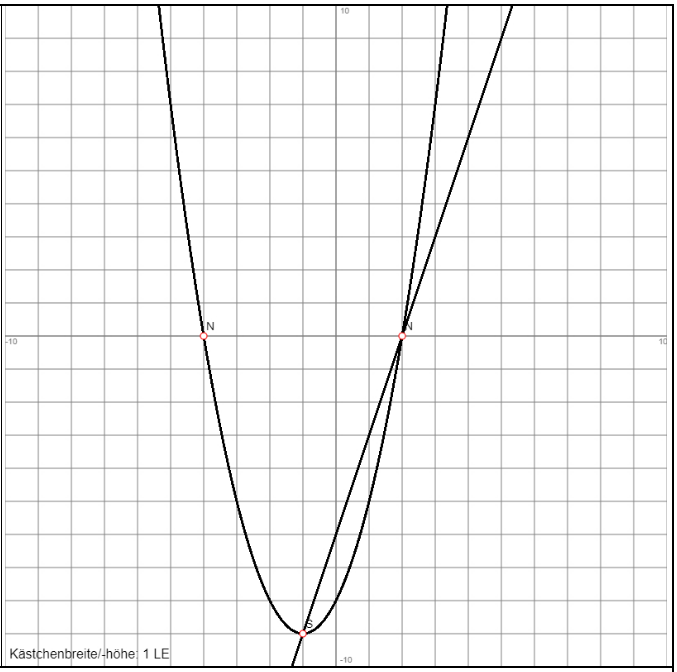


Aufgabe 7: Lösung:

Tabelle:

x	-5	-4	-2	-1	0
y	7	0	-8	-9	-8

Parabelgleichung: p: $y = x^2 + 2x – 8$
Scheitelpunkt der Parabel: S(-1|-9), Nullstelle der Parabel: N(2|0) -> Geradengleichung: g: $y = 3x–6$



Aufgabe 8: Lösung:

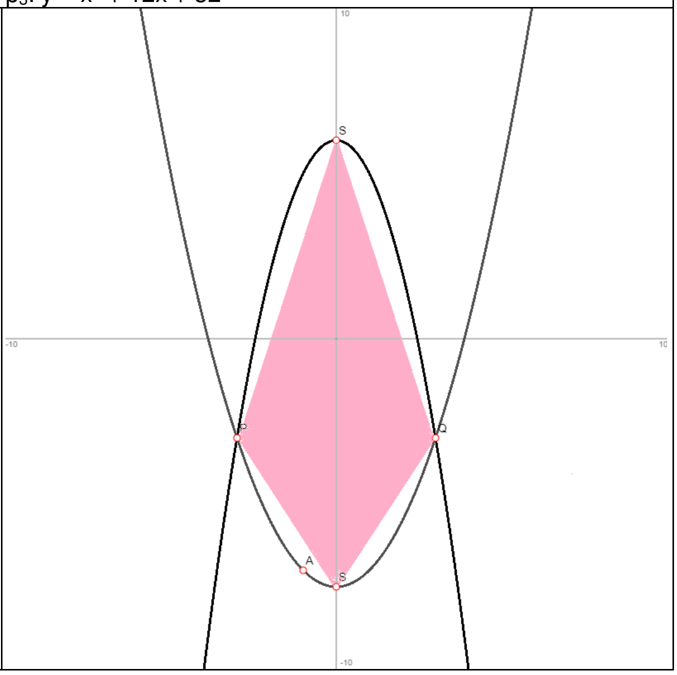
Schnittpunkte P(-2|-4), Q(1|5) -> Gerade g: $y = 3x+2$, Parabel p: $y = x^2 + 4x$

Aufgabe 9: Lösung:

Gerade g_1: $y = 2x–5$, Gerade g_2: $y = -0,6x + 3$, Gerade g_3: $y = -0,25x + 3$
Parabel p_1: $y = 0,25x^2 – 2$, Parabel p_2: $y = -x^2 – 2$, Parabel p_3: $y = x^2 + 12x + 32$

Aufgabe 10: Lösung:

Parabelgleichung: p_1: $y = -x^2 + 6$
Parabelgleichung: p_2: $y = 0,5x^2 – 7,5$
Schnittpunkte Parabel p_1-Parabel p_2: P(-3|-3), Q(3|-3)
Viereck S_1PS_2Q als Drache -> Diagonalen e = 6, f = 13,5
-> Viereckflächeninhalt: A = 40,5 FE



Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Mathematik-Aufgabenpool: Geraden, Parabeln II / Aufgaben 1375-1384