Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Geraden, Parabeln III

Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: y = mx + c mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt c, m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei x=0) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei m≠0, y=0) die Nullstelle N(-c/m|0) als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Geraden vom Typ y = mx (c = 0) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade y = x ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade y = -x die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, e, dem Scheitelpunkt S(d|e) und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von b/2 : $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$ mit Scheitelpunkt $S(-b/2|c-(b/2)^2)$.
Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel S(0|c) (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; für a=-1 ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist -1<a<1, so ist die Parabel gestaucht, ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.

Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: x=0 => y = c (Gerade, Parabel) -> y-Achsenabschnittspunkt S_y; b) Schnittpunkte mit der x-Achse als Nullstellen: y = 0 -> $N(x_0|0)$ (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich), $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$ (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).
Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen: y = y. Die Gleichungen sind nach x umzustellen.

Der Abstand zwischen zwei (Scheitel-, Schnitt-) Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ (oder ähnlich) berechnet sich als: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$ (Satz des Pythagoras).

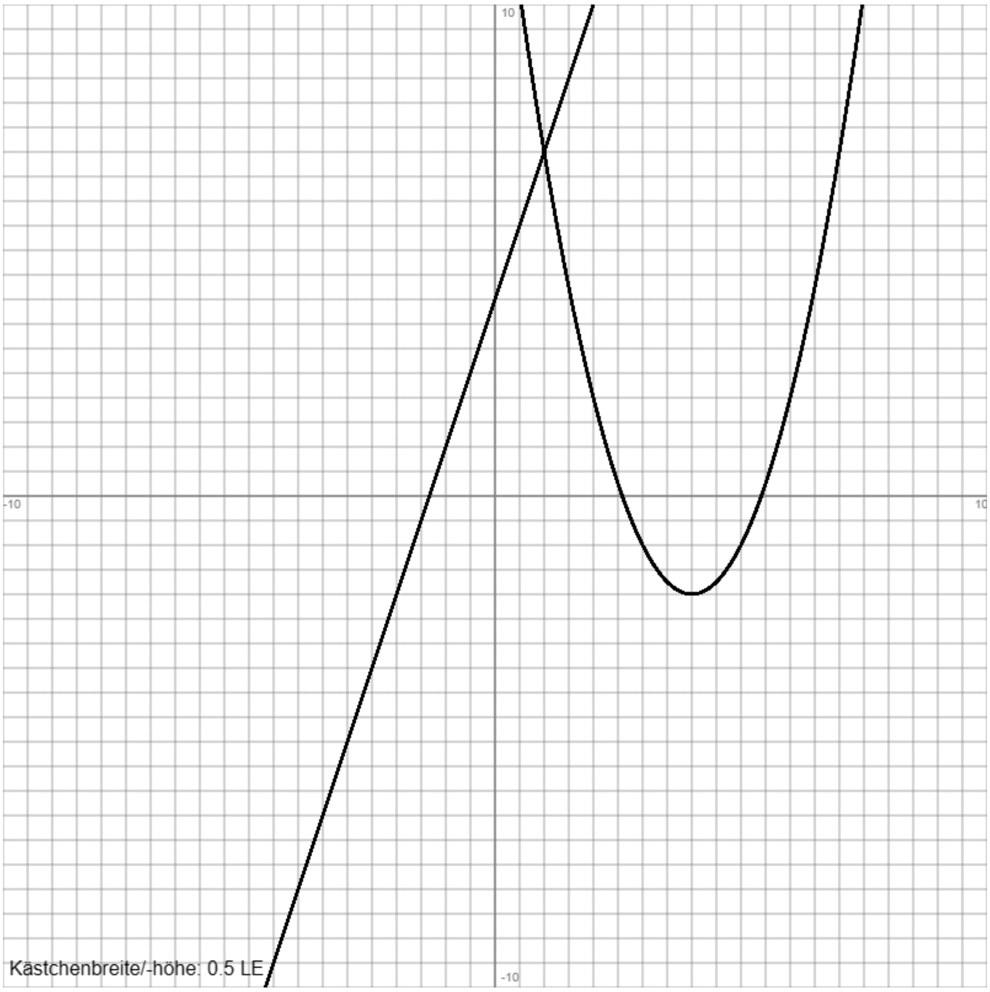
Für lineare Gleichungen vom Typ ax + b = c ergibt sich als Lösung: x = (c-b)/a. Für rein quadratische Gleichungen gilt die Umformung: $ax^2 + b = c \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$. Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die b-c-Formel: $x^2 + bx + c = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Aufgabe 1: Die Gerade g verläuft durch den Punkt P(0|-3) und besitzt die Steigung m = 2, die Gerade h verläuft durch die Punkte Q(-2|8) und R(6|4). Bestimme die Geradengleichungen von g und h, den Schnittpunkt der Geraden und die Lage der Geraden zueinander.

Aufgabe 2: Zeichne den Graphen der allgemeinen Parabel p: $y = -0{,}5x^2 + 8$ und bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit den Achsen des x-y-Koordinatensystems. Die Schnittpunkte sind die Ecken eines Dreiecks, dessen Umfang zu berechnen ist.

Aufgabe 3: Eine nach unten geöffnete Normalparabel p hat den Scheitelpunkt S(0|5), eine Gerade g verläuft durch den Punkt P(1|-1) und hat die Steigung m = 2. Bestimme die Geradengleichung von g und die Parabelgleichung von P. Berechne die Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden g und der nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel p aus der Zeichnung:



Berechne die Schnittpunkte P, Q von Gerade und Parabel.

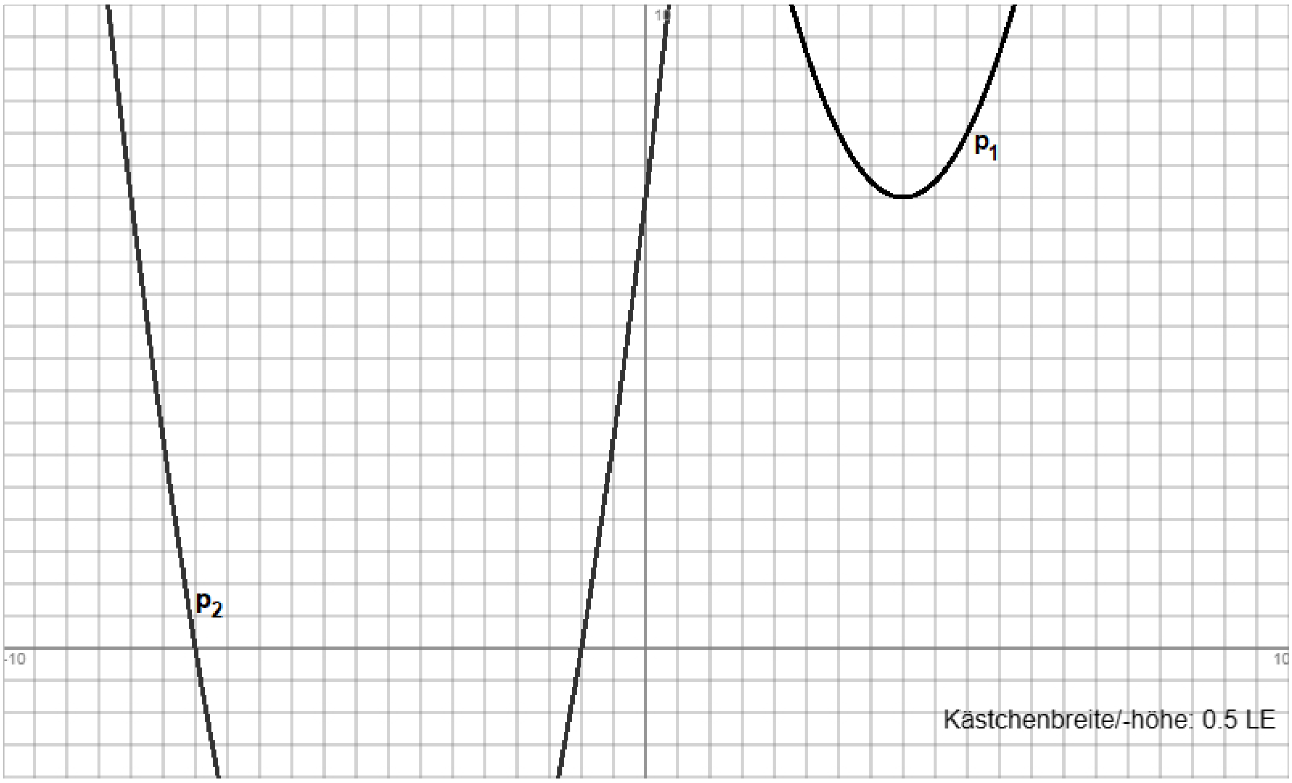
Aufgabe 5: Eine allgemeine Parabel p: $y = ax^2 + c$ und eine Gerade g: $y = mx + c$ schneiden sich in den Punkten P(-2|1) und Q(4|-5). Bestimme die Parabel- und die Geradengleichung.

Aufgabe 6: Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 besitzt den Scheitelpunkt $S_1(-2|3)$. Die Parabel p_1 wird im x-y-Koordinatensystem um 4 nach rechts und um 4 nach unten zur Parabel p_2 verschoben. Wo schneiden sich die Parabeln p_1 und p_2?

Aufgabe 7: Gegeben sind die allgemeine Parabel p_1: $y = -\frac{1}{5}x^2 + 5$ und die nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel p_2: $y = x^2 + 4x - 4$. Berechne die Gleichung der Geraden g durch die Scheitelpunkte der beiden Parabeln.

Aufgabe 8: Die allgemeine Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$, die nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel ist p_2: $y = x^2 + 5x + 3$. Berechne die Gleichung der Geraden g durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln.

Aufgabe 9: Abgebildet sind die zwei nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabeln p_1, p_2:



Berechne den Schnittpunkt beider Parabeln.

Aufgabe 10: Gegeben sind die Geraden g: $y = 4$ und h: $y = 4x + 12$ sowie die nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel p: $y = (x-1)^2 – 5$. Die Geraden schneiden die Parabel in den Punkten P, Q, R, die ein Dreieck bilden. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

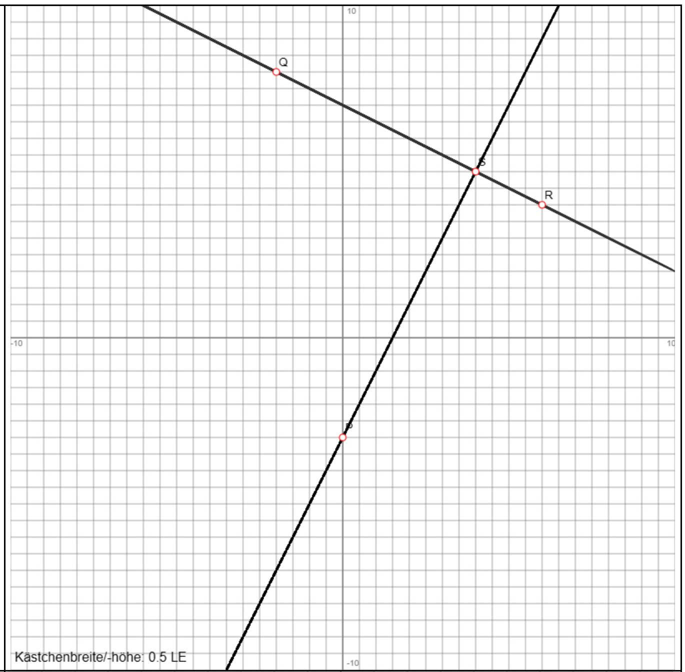
Aufgabe 11: Eine nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel p verläuft durch die Punkte A(0|4) und B(8|20). Bestimme die Funktionsgleichung einer Geraden h, die senkrecht auf der durch die Punkte A und B verlaufenden Geraden g steht und auf der der Scheitelpunkt der Parabel P liegt. Wo schneiden sich die beiden Geraden?

Aufgabe 12: Auf einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel p_1 liegen die Punkte A(-6|5) und B(1|12), eine weitere nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel p_2 besitzt den Scheitelpunkt S_2(2|-4). Bestimme den Schnittpunkt P beider Parabeln sowie die Nullstellen der Parabel p_1 und der Parabel p_2. Zeige, dass das Dreieck mit den Nullstellen der Parabel p_1 und dem Schnittpunkt P als Ecken und das Dreieck mit den Nullstellen der Parabel p_2 und dem Schnittpunkt P als Ecken denselben Flächeninhalt haben.

Aufgabe 13: Die Gerade g: $y = -5x + 7$ schneidet eine nach oben geöffnete, verschobene Normalparabel p in den Punkten $P(-1|y_P)$ und $Q(2|y_Q)$. Bestimme die Parabelgleichung und die Nullstellen der Parabel. Schnittpunkte und Nullstellen sind die Ecken eines Vierecks. Berechne dessen Flächeninhalt.

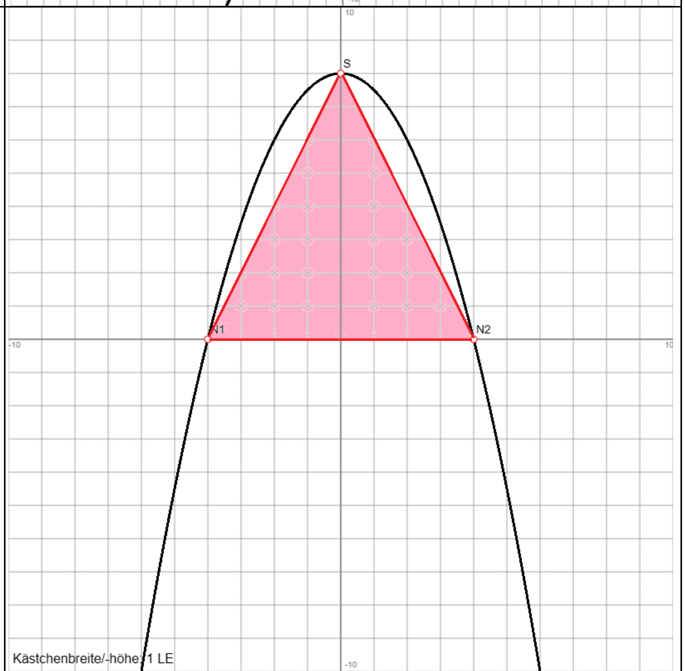
Aufgabe 1: Lösung:

Gerade g: $y = 2x-3$
Gerade h: $y = -0{,}5x+7$
Schnittpunkt der Geraden: S(4|5)
Lagebeziehung: $g \perp h$ (Orthogonalität)



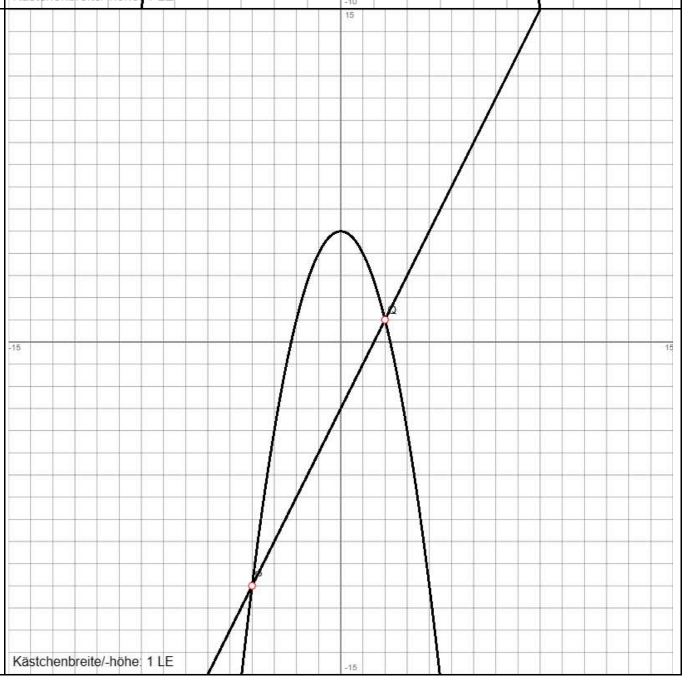
Aufgabe 2: Lösung:

Schnittpunkt mit y-Achse = Scheitelpunkt: S(0|8)
Schnittpunkte mit x-Achse = Nullstellen: N_1(-4|0), N_2(4|0)
-> Dreieck ΔN_1N_2S
-> Dreiecksumfang: $U = 8 + 2\cdot 8{,}94 = 25{,}9$ LE



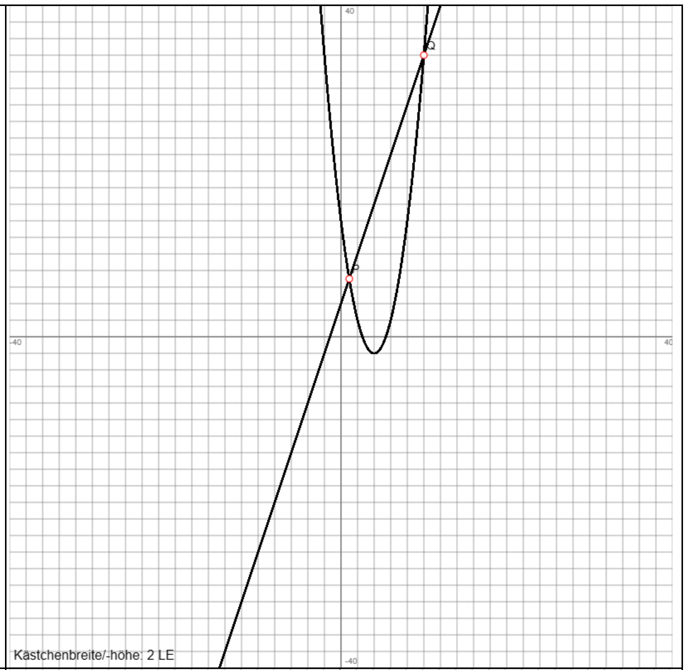
Aufgabe 3: Lösung:

Parabelbestimmung: S(0|5) -> p: $y = -x^2 + 5$
Geradenbestimmung: P(1|-1), m = 2 -> g: $y = 2x-3$
Schnittpunkte Gerade g-Parabel p: P(-4|-11), Q(2|1)



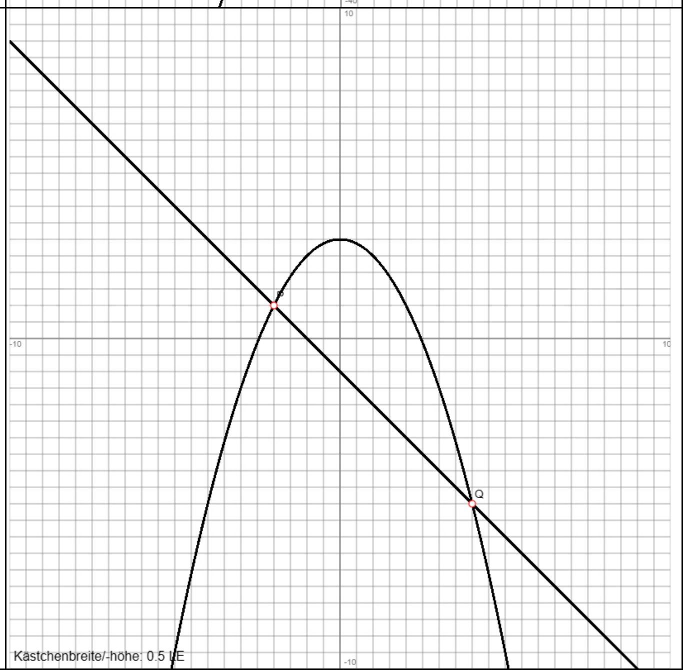
Aufgabe 4: Lösung:

Gerade g: $y = 3x+4$
Parabelgleichung: Scheitelpunkt S(-4|-2) ->
p: $y = (x-4)^2 - 2 = x^2 - 8x + 14$
Schnittpunkte Gerade g-Parabel p: P(1|7), Q(10|34)



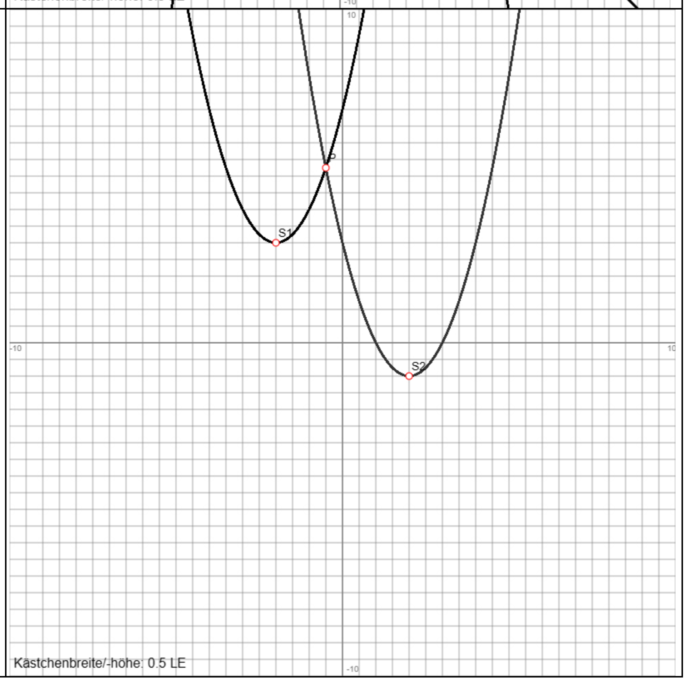
Aufgabe 5: Lösung:

Parabelbestimmung: P(-2|1), Q(4|-5) -> lineares Gleichungssystem -> p: $y = -0{,}5x^2 + 3$
Geradenbestimmung: P(-2|1), Q(4|-5) -> m = -1, c = -1 ->
g: $y = -x-1$



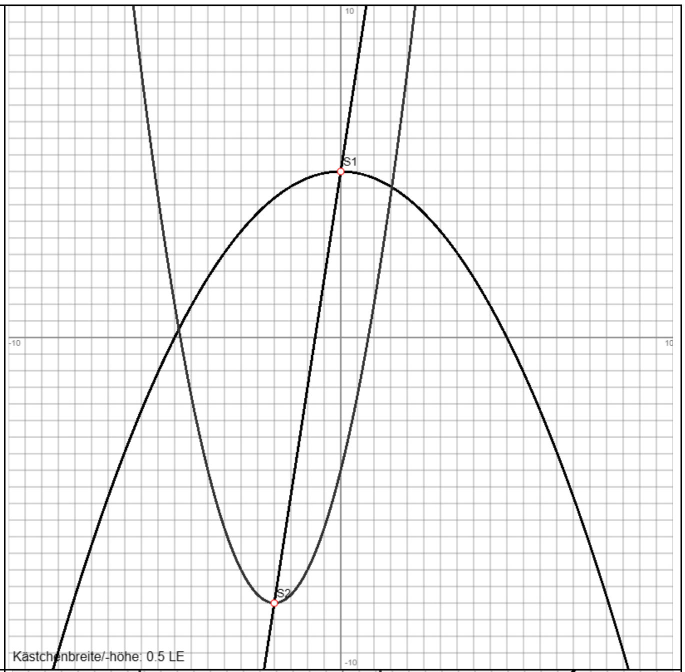
Aufgabe 6: Lösung:

Parabel: $S_1(-2|3)$ -> p_1: $y = (x+2)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$
Verschobene Parabel: $S_2(2|-1)$ ->
p_2: $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$
Schnittpunkt: P(-0,5|5,25)



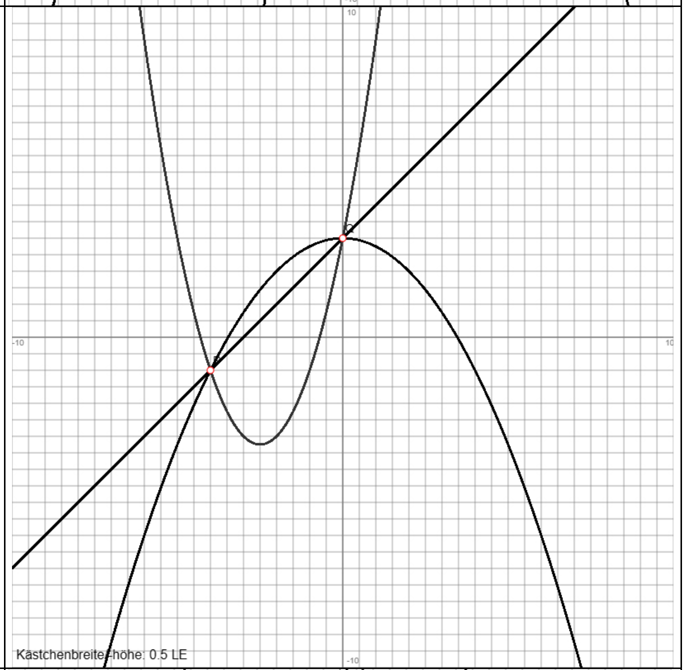
Aufgabe 7: Lösung:

Scheitelpunkt der Parabel p_1: $S_1(0|5)$
Scheitelpunkt der Parabel p_2 (quadratische Ergänzung):
$y = x^2 + 4x - 4 = x^2 + 4x + 2^2 - 4 - 2^2 = (x+2)^2 - 8$ -> $S_2(-2|-8)$
Geradengleichung $y = mx+c$: $S_1(0|5)$ -> $c = 5$,
$S_1(0|5)$, $S_2(-2|-8)$ -> $m = 6{,}5$ -> g: $y = 6{,}5x+5$



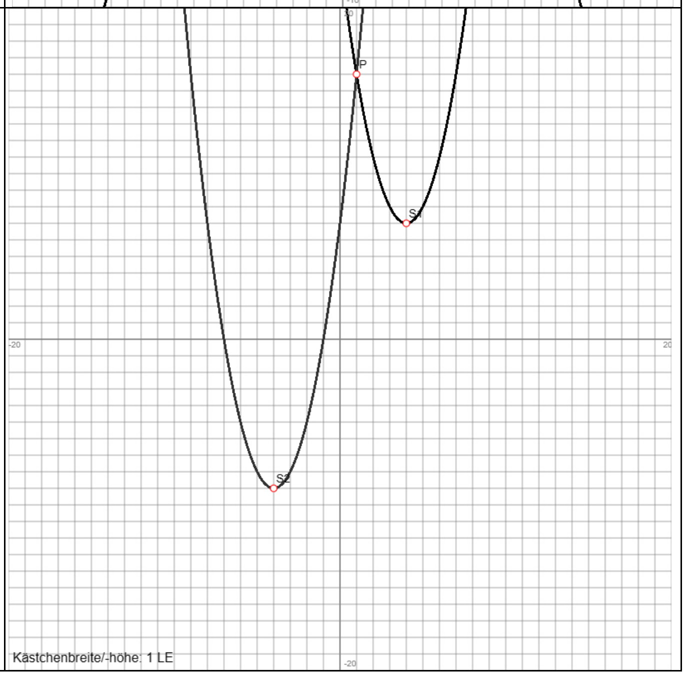
Aufgabe 8: Lösung:

Schnittpunkte Parabel p_1-Parabel p_2: $P(-4|-1)$, $Q(0|3)$
Geradengleichung $y = mx+c$: $Q(0|3)$ -> $c = 3$,
$P(-4|-1)$, $Q(0|3)$ -> $m = 1$ -> g: $y = x+3$



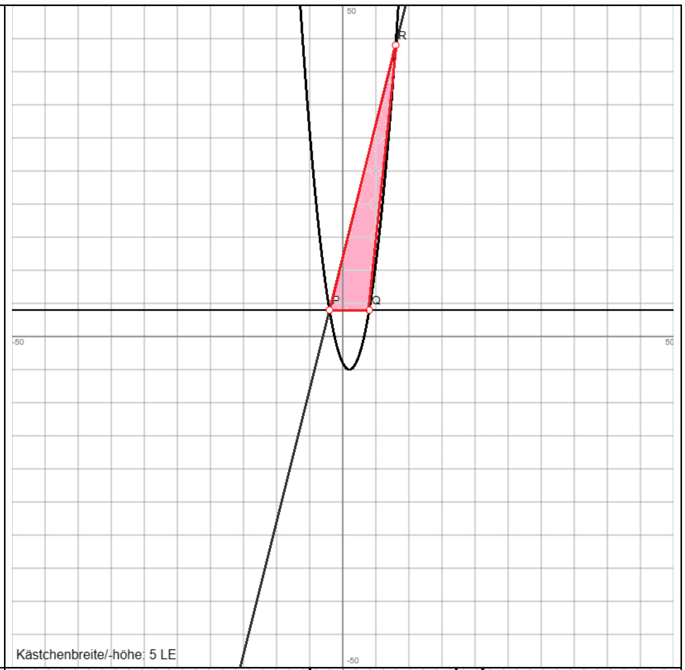
Aufgabe 9: Lösung:

Parabelgleichung p_1: Scheitel $S_1(4|7)$ ->
p_1: $y = (x-4)^2 + 7 = x^2 - 8x + 23$
Parabelgleichung p_2: Nullstellen $N_1(-7|0)$, $N_2(-1|0)$ ->
Scheitel $S_2(-4|-9)$ -> p_2: $y = (x+4)^2 - 9 = x^2 + 8x +7$
Schnittpunkt Parabel p_1-Parabel p_2: $P(1|16)$



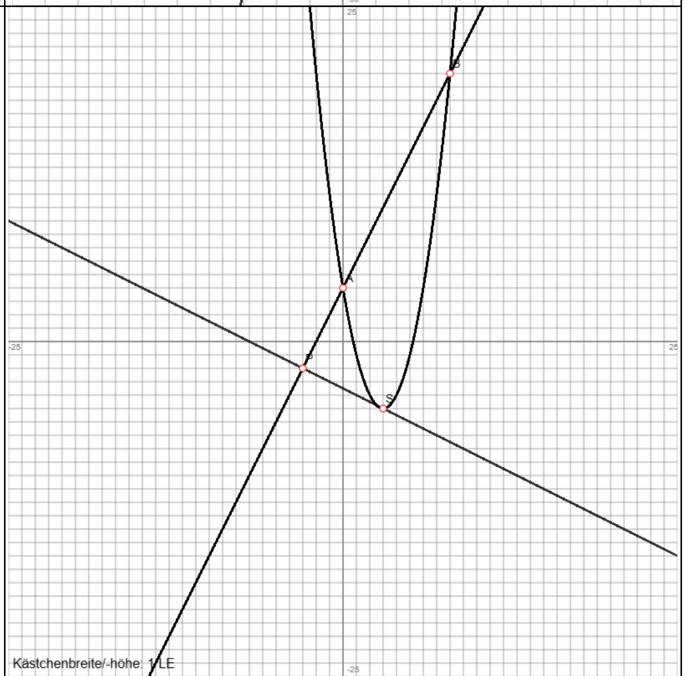
Aufgabe 10: Lösung:

Gerade g: $y = 4$
Gerade h: $y = 4x+12$
Parabelgleichung: p: $y = x^2 - 2x - 4$
Schnittpunkte Gerade g-Parabel p: P(-2|4), Q(4|4)
Schnittpunkte Gerade h-Parabel p: P(-2|4), R(8|44)
Flächeninhalt Dreieck ΔPQR: $g = 6$, $h = 40$ ->
$A = gh/2 = 6 \cdot 40/2 = 120$ FE.



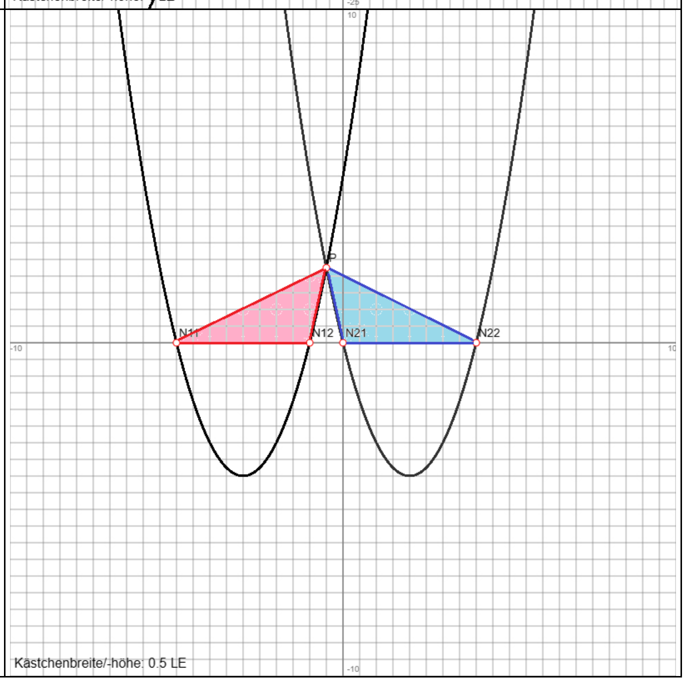
Aufgabe 11: Lösung:

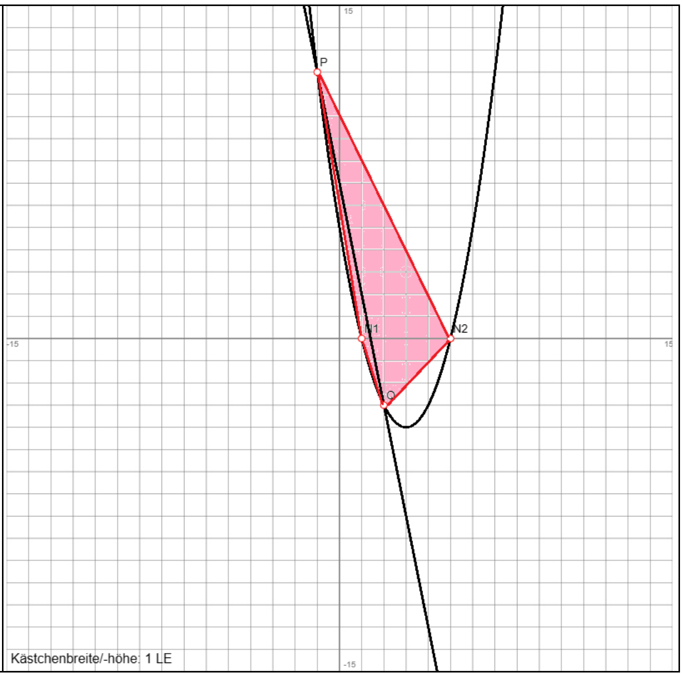
Parabelgleichung $y = x^2+bx+c$: A(0|4) -> $c = 4$, B(8|20) -> $b = -6$ -> p: $y = x^2 - 6x + 4 = x^2 - 6x + 3^2 + 4 - 3^2 = (x-3)^2 - 5$ -> Scheitelpunkt S(3|-5)
Geradengleichung $y=mx+c$: A(0|4) -> $c=4$,
A(0|4), B(8|20) -> $m = 2$ -> g: $y = 2x + 4$
Senkrechte Gerade h durch Scheitelpunkt: $m = -0{,}5$ -> $c = -3{,}5$ -> h: $y = -0{,}5x - 3{,}5$
Schnittpunkt Gerade g-Gerade h: P(-3|-2)



Aufgabe 12: Lösung:

Parabelgleichung $y = x^2+bx+c$: A(-6|5), B(1|12) -> lineares Gleichungssystem -> p_1: $y = x^2 + 6x + 5$
Parabelgleichung $y = x^2+bx+c$: Scheitelpunkt $S_2(2|-4)$ -> p_2: $y = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$
Schnittpunkt Parabel p_1-Parabel p_2: P(-0,5|2,25)
Nullstellen Parabel p_1: $N_{11}(-5|0)$, $N_{12}(-1|0)$
Nullstellen Parabel p_2: $N_{21}(0|0)$, $N_{22}(4|0)$
Flächeninhalt Dreieck $\Delta N_{11}N_{12}P$: $A_1 = 4 \cdot 2{,}25/2 = 4{,}5$ FE
Flächeninhalt Dreieck $\Delta PN_{21}N_{22}$: $A_2 = 4 \cdot 2{,}25/2 = 4{,}5$ FE
-> $A_1 = A_2$



Aufgabe 13: Lösung: Gerade g: y = -5x+7 -> Schnittpunkte: P(-1|12), Q(2|-3) Parabelbestimmung: P(-1|12), Q(2|-3) -> lineares Gleichungssystem -> p: $y = x^2 - 6x + 5$ Nullstellen der Parabel: $N_1(1\|0)$, $N_2(5\|0)$ Flächeninhalt Dreieck ΔN_1N_2P: $A_1 = 4 \cdot 12/2 = 24$ FE Flächeninhalt Dreieck ΔN_1QN_2: $A_1 = 4 \cdot 3/2 = 6$ FE Flächeninhalt des Vierecks PN_1QN_2: $A = A_1 + A_2 =$ 24 + 6 = 30 FE	

Abkürzungen: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 01.2024 / Mathematik-Aufgabenpool: Geraden, Parabeln III / Aufgaben 1960-1972