Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Polynomgleichungen I

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Polynomgleichungen sind ganz rationale Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit den reellen Zahlen $a_0, \ldots a_n$, $n\varepsilon\mathbf{N}$, genügen. Die Lösung der Polynomgleichung ist meist nicht über eine Formel bestimmbar (es sei denn in den Fällen $n\leq4$), sondern vielfach über numerische Verfahren (Newton-Verfahren). Zu den Polynomgleichungen gehören:

1) Die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = 0$ ist für $a \neq 0$: $x = -\frac{b}{a}$;

2) Quadratische Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Zahlen a, b, c genügen. Ist b=0, so liegt eine rein quadratische Gleichung vor, ansonsten eine gemischt quadratische.

a) Bei einer rein quadratischen Gleichung ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen: $ax^2+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

b) Bei einer gemischt quadratischen Gleichung (mit Koeffizient vor x^2 als 1) ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen: $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel).

3) Jedes Polynom, jeder ganz rationaler Ausdruck lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_m(x)$ zerlegen, so dass der Satz vom Nullprodukt greift: Ein Produkt aus (nicht notwendigerweise) ganz rationalen Faktoren ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Komplexe Gleichungen lassen sich somit in mehrere einfache Gleichungen zerlegen. Im Einzelnen stehen zur Verfügung:

a) Ausklammern: $ax^n+\ldots+bx^m = 0 \Leftrightarrow x^m(ax^{n-m}+\ldots+b) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ ax^{n-m}+\ldots+b = 0$.

b) Polynomdivision: Es gilt: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0) = 0$ (*) vermöge der Division $(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(x-x_0)$ mit x_0 als Lösung der Gleichung (*) (Ermittlung von x_0 u.a. als Teiler von a_0 bei Ganzzahligkeit von Lösungen).

4) Eine weitere Möglichkeit bieten Substitutionen, etwa um aus biquadratischen, bikubischen (usw.) Gleichungen quadratische zu erhalten. Es gilt:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$	| Substitution: $z=x^2$	$ax^6 + bx^3 + c = 0$	| Substitution: $z=x^3$
$az^2 + bz+c =0$	(a-b-c-Formel)	$az^2 + bz+c =0$	(a-b-c-Formel)
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	| Rücksubstitution: $x^2 = z$	$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	| Rücksubstitution: $x^3 = z$
$x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$	| $\sqrt{}$	$x^3 = z_1$, $x^3 = z_2$	| $\sqrt[3]{}$
$x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$	(falls $z_1, z_2 > 0$)	$x = \sqrt[3]{z_1}$, $x = \sqrt[3]{z_2}$	

Aufgabe 1: Bestimme die Lösung der folgenden linearen Gleichungen:

a) $5x + 10 = 0$ b) $3x – 9 = 0$

c) $\frac{9}{4}x + 27 = 0$ d) $2x – 1,5 = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten (lineare Gleichungen).

Lösungen:

a) $5x + 10 = 0$ | -10
$5x = -10$ | :5
$x = -2$ Lösungsmenge: L = {-2}

b) $3x - 9 = 0$ | $+9$
$3x = 9$ | $:3$
$x = 3$ Lösungsmenge: L = {3}

c) $\frac{9}{4}x + 27 = 0$ | -27
$\frac{9}{4}x = -27$ | $:\frac{9}{4}$
$x = -12$ Lösungsmenge: L = {-12}

d) $2x - 1{,}5 = 0$ | $+1{,}5$
$2x = 1{,}5$ | $:2$
$x = 0{,}75$ Lösungsmenge: L = {0,75}

Aufgabe 2: Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 441 = 0$
b) $x^2 + 64 = 0$
c) $2x^2 - 72 = 0$
d) $4x^2 - 9 = 0$
e) $x^2 + 4x = 0$
f) $x^2 - 7x = 0$
g) $2x^2 - 11x = 0$
h) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x = 0$
i) $x^2 - 2x - 35 = 0$
j) $x^2 + x - 6 = 0$
k) $x^2 - 5x - 24 = 0$
l) $x^2 + 10x + 25 = 0$
m) $2x^2 + 25x - 93 = 0$
n) $-2x^2 + 46x - 84 = 0$
o) $5x^2 + 34x - 99 = 0$
p) $3x^2 + 44x + 100 = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten (quadratische Gleichungen: rein quadratisch, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, gemischt quadratisch [a-b-c-Formel]).

Lösungen:

a) $x^2 - 441 = 0$ | $+441$
$x^2 = 441$ | $\sqrt{\ }$
$x = \pm 21$ Lösungsmenge: L = {-21; 21}

b) $x^2 + 64 = 0$ | -64
$x^2 = -64$
Widerspruch, keine Lösung Lösungsmenge: L = {}

c) $2x^2 - 72 = 0$ | $+72$
$2x^2 = 72$ | $:2$
$x^2 = 36$ | $\sqrt{\ }$
$x = \pm 6$ Lösungsmenge: L = {-6; 6}

d) $4x^2 - 9 = 0$ | $+9$
$4x^2 = 9$ | $:4$
$x^2 = 2{,}25$ | $\sqrt{\ }$
$x = \pm 1{,}5$ Lösungsmenge: L = {-1,5; 1,5}

e) $x^2 + 5x = 0$ (Ausklammern)
$x(x+5) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ x+5 = 0$ | -5
$x = 0,\ x = -5$ Lösungsmenge: L = {-5; 0}

f) $x^2 - 7x = 0$ (Ausklammern)
$x(x-7) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ x-7 = 0$ | $+7$
$x = 0,\ x = 7$ Lösungsmenge: L = {0; 7}

g) $2x^2 - 11x = 0$ (Ausklammern)
$x(2x-11) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 2x-11 = 0$ | $+11$
$x= 0,\ 2x = 11$ | $:2$
$x = 0,\ x = 5{,}5$ Lösungsmenge: L = {0; 5,5}

h) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x = 0$ (Ausklammern)
$x(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x = 0,\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} = 0$ | $-\frac{2}{9}$

$x = 0,\ \frac{1}{3}x = -\frac{2}{9}$ | $\cdot 3$

$x = 0,\ x = -\frac{2}{3}$ Lösungsmenge: $L = \{-\frac{2}{3}; 0\}$

i) $x^2 - 2x - 35 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -2, c = -35)

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-35)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{2\pm 12}{2} = 1\pm 6$

$x_1 = 1+6 = 7,\ x_2 = 1-6 = -5$ Lösungsmenge: $L = \{-5; 7\}$

j) $x^2 + x - 6 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = 1, c = -6)

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = -0{,}5\pm 2{,}5$

$x_1 = -0{,}5+2{,}5 = 2,\ x_2 = -0{,}5-2{,}5 = -3$ Lösungsmenge: $L = \{-3; 2\}$

k) $x^2 - 5x - 24 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -5, c = -24

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot(-24)}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{121}}{2} = \frac{5\pm 11}{2} = 2{,}5\pm 5{,}5$

$x_1 = 2{,}5+5{,}5 = 8,\ x_2 = 2{,}5-5{,}5 = -3$ Lösungsmenge: $L = \{-3; 8\}$

l) $x^2 + 10x + 25 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = 10, c = 25)

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1} = \frac{-10\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{-10\pm 0}{2} = -5$

$x = -5$ Lösungsmenge: $L = \{-5\}$

m) $2x^2 + 25x - 93 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 2, b = 25, c = -93)

$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 2\cdot(-93)}}{2\cdot 2} = \frac{-25\pm\sqrt{1369}}{4} = \frac{-25\pm 37}{4}$

$x_1 = \frac{-25+37}{4} = \frac{12}{4} = 3,\ x_2 = \frac{-25-37}{4} = \frac{-62}{4} = 15{,}5$ Lösungsmenge: $L = \{3; 15{,}5\}$

n) $-2x^2 + 46x - 84 = 0$ | $:(-2)$

$x^2 - 23x + 42 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -23, c = 42)

$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4\cdot 1\cdot 42}}{2\cdot 1} = \frac{23\pm\sqrt{361}}{2} = \frac{23\pm 19}{2} = 11{,}5\pm 9{,}5$

$x_1 = 11{,}5+9{,}5 = 21,\ x_2 = 11{,}5-9{,}5 = 2$ Lösungsmenge: $L = \{2; 21\}$

o) $5x^2 + 34x - 99 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 5, b = 34, c = -99)

$x_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 5\cdot(-99)}}{2\cdot 5} = \frac{-34\pm\sqrt{3136}}{10} = \frac{-34\pm 56}{10} = -3{,}4\pm 5{,}6$

$x_1 = -3{,}4+5{,}6 = 2{,}2,\ x_2 = -3{,}4-5{,}6 = -9$ Lösungsmenge: $L = \{-9; 2{,}2\}$

p) $3x^2 + 44x + 200 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 3, b = 44, c = 200)

$x_{1,2} = \frac{-44 \pm \sqrt{44^2 - 4\cdot 3\cdot 200}}{2\cdot 3} = \frac{-44\pm\sqrt{-464}}{6}$

Widerspruch, keine Lösung Lösungsmenge: $L = \{\}$

Aufgabe 3: Bestimme die Lösungen der folgenden Polynomgleichungen:

a) $-5x^2 + 105x = 0$

b) $x(2x+1) = 0$

c) $(x+3)(4x-8) = 0$

d) $(3-5x)(6x-15) = 0$

e) $-x^3 + 16x = 0$

f) $x^3 - 4x^2 = 0$

g) $-5x^3 - 28x = 0$

h) $3x(2x^2-128) = 0$

i) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

j) $3x^3 + x^2 - 4x = 0$

k) $-x^3 + x^2 + 2x = 0$

l) $6x^3 - 25x^2 - 100x = 0$

m) $(x+6)(4x^2 - 34x - 84) = 0$

n) $2x^4 + 14x^3 = 0$

o) $5x^4 + 44x^3 - 60x^2 = 0$

p) $-3x^4 + 81x = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten (Ausklammern und Satz vom Nullprodukt).

Lösungen:

a) $-5x^2 + 105x = 0$	(Ausklammern)
$x(-5x+105) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ -5x + 105 = 0$	$\mid +5x$
$x = 0,\ 105 = 5x$	$\mid :5$
$x = 0,\ x = 21$	Lösungsmenge: $L = \{0; 21\}$
b) $x(2x+1) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 2x+1 = 0$	$\mid -1$
$x = 0,\ 2x = -1$	$\mid :2$
$x = 0,\ x = -0{,}5$	Lösungsmenge: $L = \{-0{,}5; 0\}$
c) $(x+3)(4x-8) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x+3 = 0,\ 4x-8 = 0$	$\mid -3$ bzw. $+8$
$x = -3,\ 4x = 8$	$\mid :4$
$x = -3,\ x = 2$	Lösungsmenge: $L = \{-4; 2\}$
d) $(3-5x)(6x-15) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$3-5x = 0,\ 6x-15 = 0$	$\mid +5x$ bzw. $+15$
$3 = 5x,\ 6x = 15$	$\mid :5$ bzw. $:6$
$x = 0{,}6,\ x = 2{,}5$	Lösungsmenge: $L = \{0{,}6; 2{,}5\}$
e) $-x^3 +16x = 0$	(Ausklammern)
$x(-x^2+16) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ -x^2+16 = 0$	$\mid +x^2$
$x = 0,\ 16 = x^2$	$\mid \surd$
$x = 0,\ x = \pm 4$	Lösungsmenge: $L = \{-4; 0, 4\}$
f) $x^3 - 4x^2 = 0$	(Ausklammern)
$x^2(x-4) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x^2 = 0,\ x-4 = 0$	$\mid \surd$ bzw. $+4$
$x = 0,\ x = 4$	Lösungsmenge: $L = \{0; 4\}$
g) $-5x^3 - 28x = 0$	(Ausklammern)
$x(-5x^2-28) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ -5x^2-28 = 0$	$\mid +5x^2$
$x = 0,\ -28 = 5x^2$	
$x = 0$, Widerspruch	Lösungsmenge: $L = \{0\}$
h) $3x(2x^2-128) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$3x = 0,\ 2x^2-128 = 0$	$\mid :3$ bzw. $+128$
$x = 0,\ 2x^2 = 128$	$\mid :2$
$x = 0,\ x^2 = 64$	$\mid \surd$
$x = 0,\ x = \pm 8$	Lösungsmenge: $L = \{-8; 0; 8\}$
i) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$	(Ausklammern)
$x(x^2+5x-6) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ x^2+5x-6 = 0$	(a-b-c-Formel: $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$)
$x = 0,\ x_{1,2} = \dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{2} = \dfrac{-5\pm 7}{2} = -2{,}5\pm 3{,}5$	
$x = 0,\ x_1 = -2{,}5+3{,}5 = 1,\ x_2 = -2{,}5-3{,}5 = -6$	Lösungsmenge: $L = \{-6; 0; 1\}$
j) $3x^3 + x^2 - 4x = 0$	(Ausklammern)
$x(3x^2+x-4) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 3x^2+x-4 = 0$	(a-b-c-Formel: $a = 3$, $b = 1$, $c = -4\}$
$x = 0,\ x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{6} = \dfrac{-1\pm 7}{6}$	
$x = 0,\ x_1 = \dfrac{-1+7}{6} = \dfrac{6}{6} = 1,\ x_2 = \dfrac{-1-7}{6} = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3}$	Lösungsmenge: $L = \{-\dfrac{4}{3}; 0; 1\}$
k) $-x^3 + x^2 + 2x = 0$	(Ausklammern)
$x(-x^2+x+2) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ -x^2+x+2 = 0$	$\mid \cdot(-1)$
$x = 0,\ x^2-x-2 = 0$	(a-b-c-Formel: $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$)
$x = 0,\ x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1\pm 3}{2} = 0{,}5\pm 1{,}5$	
$x = 0,\ x_1 = 0{,}5+1{,}5 = 2,\ x_2 = 0{,}5-1{,}5 = -1$	Lösungsmenge: $L = \{-1; 0; 2\}$
l) $6x^3 - 25x^2 - 100x = 0$	(Ausklammern)
$x(6x^2-25x-100) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 6x^2-25x-100 = 0$	(a-b-c-Formel: $a = 6$, $b = -25$, $c = -100$)

$x = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 6\cdot(-100)}}{2\cdot 6} = \dfrac{25 \pm \sqrt{3025}}{12} = \dfrac{25 \pm 55}{12}$

$x = 0$, $x_1 = \dfrac{25+55}{12} = \dfrac{80}{12} = \dfrac{20}{3}$, $x_2 = \dfrac{25-55}{12} = \dfrac{-30}{12} = -2{,}5$

Lösungsmenge: L = {-2,5; 0; $\dfrac{15}{6}$}

m) $(x+6)(4x^2 - 34x - 84) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x+6 = 0$, $4x^2-34x-84 = 0$ | -6 bzw. :2
$x = -6$, $2x^2-17x-42 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 2, b = -17, c = -42)

$x = -6$, $x_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot 2\cdot(-42)}}{2\cdot 2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{625}}{4} = \dfrac{17 \pm 25}{4}$

$x = -6$, $x_1 = \dfrac{17+25}{4} = \dfrac{42}{4} = 10{,}5$, $x_2 = \dfrac{17-25}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$

Lösungsmenge: L = {-6; -2; 10,5}

n) $2x^4 + 14x^3 = 0$ (Ausklammern)
$x^3(2x+14) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x^3 = 0$, $2x+14 = 0$ | $^3\sqrt{}$ bzw. -14
$x = 0$, $2x = -14$ | :2
$x = 0$, $x = -7$ Lösungsmenge: L = {-7; 0}

o) $5x^4 + 44x^3 - 60x^2 = 0$ (Ausklammern)
$x^2(5x^2+44x-60) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x^2 = 0$, $5x^2+44x-60 = 0$ | √ bzw. (a-b-c-Formel: a = 5, b = 44, c = -60)

$x = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-44 \pm \sqrt{44^2 - 4\cdot 5\cdot(-60)}}{2\cdot 5} = \dfrac{-44 \pm \sqrt{3136}}{10} = \dfrac{-44 \pm 56}{10} = -4{,}4 \pm 5{,}6$

$x = 0$, $x_1 = -4{,}4+5{,}6 = 1{,}2$, $x_2 = -4{,}4-5{,}6 = -10$ Lösungsmenge: L = {-10; 0; 1,2}

p) $-3x^4 + 81x = 0$ (Ausklammern)
$x(-3x^3+81) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x = 0$, $-3x^3+81 = 0$ | $+3x^3$
$x = 0$, $81 = 3x^3$ | :3
$x = 0$, $27 = x^3$ | $^3\sqrt{}$
$x = 0$, $x = 3$ Lösungsmenge: L = {0; 3}

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungen der folgenden biquadratischen Gleichungen:

a) $x^4 - 81x^2 = 0$ b) $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$
c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ d) $x^4 + 13x^2 - 90 = 0$
e) $3x^4 + 22x^2 + 19 = 0$ f) $4x^4 + 25x^2 - 29 = 0$
g) $2x^4 - 178x^2 + 3200 = 0$ h) $\dfrac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 12 = 0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten (biquadratische Gleichungen: Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, a-b-c-Formel).

Lösungen:
a) $x^4 - 81x^2 = 0$ (Ausklammern)
$x^2(x^2-81) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x^2 = 0$, $x^2-81 = 0$ | √ bzw. +81
$x = 0$, $x^2 = 81$ | √
$x = 0$, $x = \pm 9$ Lösungsmenge: L = {-9; 0; 9}

b) $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$z^2 + 15z - 16 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = 15, c = -16)

$z_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{289}}{2} = \dfrac{-15 \pm 17}{2} = -7{,}5 \pm 8{,}5$

$z_1 = -7{,}5+8{,}5 = 1$, $z_2 = -7{,}5-8{,}5 = -16$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 1$, $x^2 = -16$ | √
$x = \pm 1$, Widerspruch Lösungsmenge: L = {-1; 1}

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$z^2 - 13z + 36 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -13, c = 36)

$z_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = 6{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = 6{,}5+2{,}5 = 9$, $z_2 = 6{,}5-2{,}5 = 4$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 9$, $x^2 = 4$ | √
$x = \pm 3$, $x = \pm 2$ Lösungsmenge: L = {-3; -2; 2; 3}

d) $x^4 + 13x^2 - 90 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$z^2 + 13z - 90 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = 13, c = -90)

$z_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90)}}{2 \cdot 1} = \frac{-13 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-13 \pm 23}{2} = -6{,}5 \pm 11{,}5$

$z_1 = -6{,}5+11{,}5 = 5$, $z_2 = -6{,}5-11{,}5 = -18$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 5$, $x^2 = -18$ |√
$x = \pm\sqrt{5}$, Widerspruch Lösungsmenge: L = {-√5; √5}

e) $3x^4 + 22x^2 + 19 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$3z^2 + 22z + 19 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 3, b = 22, c = 19)

$z_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 3 \cdot 19}}{2 \cdot 3} = \frac{-22 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-22 \pm 16}{6}$

$z_1 = \frac{-22+16}{6} = \frac{-6}{6} = -1$, $z_2 = \frac{-22-16}{6} = \frac{-38}{6} = \frac{-19}{3}$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)

$x^2 = -1$, $x^2 = \frac{-19}{3}$ | √
Widerspruch, keine Lösung Lösungsmenge: L = {}

f) $4x^4 + 25x^2 - 29 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$4z^2 + 25\,z - 29 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 4, b = 25, c = -29)

$z_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-29)}}{2 \cdot 4} = \frac{-25 \pm \sqrt{1089}}{8} = \frac{-25 \pm 33}{8}$

$z_1 = \frac{-25+33}{8} = \frac{8}{8} = 1$, $z_2 = \frac{-25-33}{8} = \frac{-58}{8} = -\frac{29}{4}$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)

$x^2 = 1$, $x^2 = -\frac{29}{4}$ | √
$x = \pm 1$, Widerspruch Lösungsmenge: L = {-1; 1}

g) $2x^4 - 178x^2 + 3200 = 0$ | :2
$x^4 - 89x^2 + 1600 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$z^2 - 89z + 1600 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -89, c = 1600)

$z_{1,2} = \frac{89 \pm \sqrt{89^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1600}}{2 \cdot 1} = \frac{89 \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{89 \pm 39}{2} = 44{,}5 \pm 19{,}5$

$z_1 = 44{,}5+19{,}5 = 64$, $z_2 = 44{,}5-19{,}5 = 25$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 64$, $x^2 = 25$ | √
$x = \pm 8$, $x = \pm 5$ Lösungsmenge: L = {-8; -5, 5; 8}

h) $\frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 12 = 0$ (Substitution: $z = x^2$)
$0{,}5z^2 - 5z + 12 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 0,5, b = -5, c = 12)

$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 12}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{1} = 5 \pm 1$

$z_1 = 5+1 = 6$, $z_2 = 5-1 = 4$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 6$, $x^2 = 4$ | √
$x = \pm\sqrt{6}$, $x = \pm 2$ Lösungsmenge: L = {-√6; -2; 2; √6}

Abkürzungen: L = Lösungsmenge.