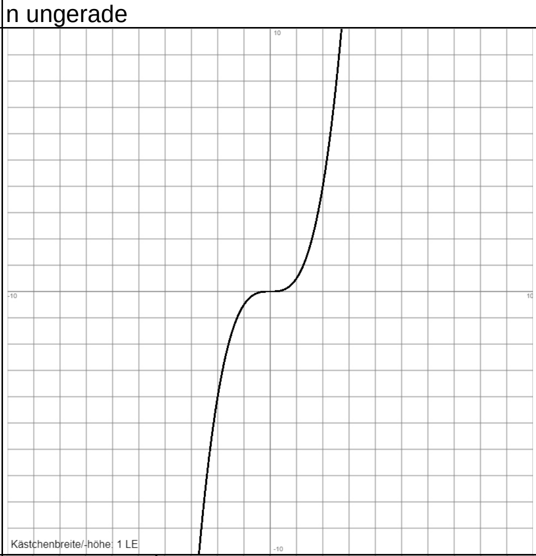
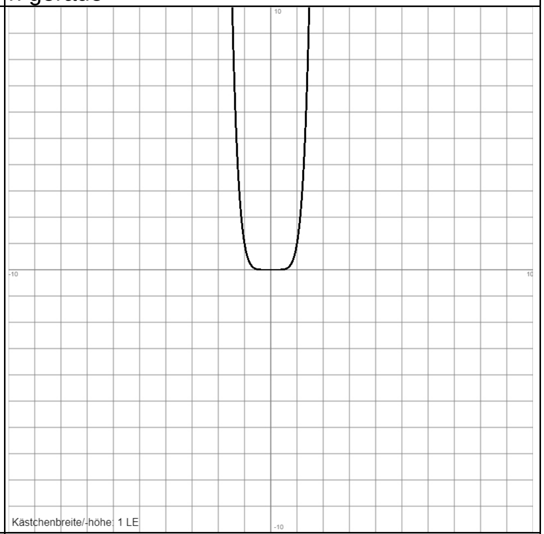
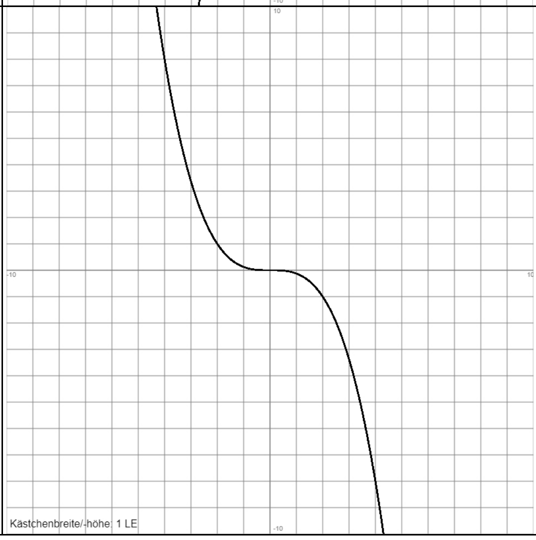
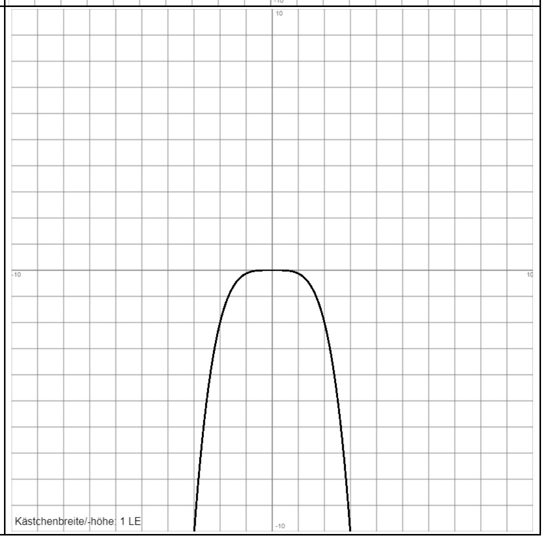
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Potenzfunktionen I

Einleitung: Reellwertige Abbildungen vom Typ: $f(x) = ax^n$, $n\varepsilon\mathbf{N}$, heißen <u>Potenzfunktionen</u> mit natürlichem Exponenten n (als Grad der Potenzfunktion) und Koeffizienten a. Je nach Koeffizient (a>0, a<0) oder Exponent (n ungerade, n gerade) haben die Potenzfunktion folgendes Aussehen:

	n ungerade	n gerade
a>0		
a<0		

Alle Potenzfunktion schneiden x- und y-Achse im Koordinatenursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems (als Scheitelpunkt, Wendepunkt der Potenzfunktion), Potenzfunktionen sind schmaler (|a|>1, Streckung) oder breiter (|a|<1, Stauchung) als die Potenzfunktion $y = x^n$, sie können an der x-Achse gespiegelt werden (+a -> -a), ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ gehorcht der folgenden Übersicht:

a>0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

a<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Weiter sind Potenzfunktionen mit ungerader Hochzahl n symmetrisch zum Ursprung O(0|0), mit gerader Hochzahl n symmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems.

Potenzfunktionen $f(x) = ax^n$ können entlang der x- und y-Achse des x-y-Koordinatensystems verschoben werden zu: $f(x) = a(x-d)^n + e$ (d: Verschiebung entlang der x-Achse [d>0: nach rechts, d<0: nach links], e: Verschiebung entlang der y-Achse [e>0: nach oben, e<0: nach unten]).

<u>Gleichungen</u> bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine <u>Variable</u> (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variablen umgeformt bzw. aufgelöst werden. Im

Fall der Potenzfunktionen $f(x) = ax^n$ sind Potenzgleichungen wie folgt zu lösen:

$$f(x) = b$$
$$ax^n = b \quad |:a$$
$$x^n = \frac{b}{a} \quad | \sqrt[n]{}$$
$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \text{ (falls n ungerade) bzw. } x = \pm\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \text{ (falls n gerade, } b/a \geq 0).$$

Die Bestimmung von Potenzfunktionen $f(x) = ax^n$, d.h. von Hochzahl n und Koeffizienten a erfolgt über die Punktprobe zweier auf der Funktionskurve liegender Punkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ vermittelst:

$$P, Q \to f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 \to ax_1^n = y_1,\ ax_2^n = y_2 \to n = \log_{\frac{x_2}{x_1}}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log_{\frac{x_1}{x_2}}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),\ a = \frac{y_1}{x_1^n} = \frac{y_2}{x_2^n}.$$

Ist n =1, so ist $f(x) = ax$ eine Ursprungsgerade (mit Steigung a), ist n = 2, $f(x) = ax^2$ eine allgemeine Parabel (2. Grades, mit Scheitelpunkt S(0|0)).

Aufgabe 1: Bestimme die Lösungen der folgenden Potenzgleichungen:

a) $x^2 = 64$
b) $x^3 = -125$
c) $x^4 – 16 = 0$
d) $4x^5 = 128$
e) $2x^8 + 128 = 0$
f) $-\frac{1}{3}x^4 + 27 = 0$
g) $2x^3 – 15 = 0$
h) $12x^4 + 20 = -64$
i) $10x^5 + 4 = 3 + 9x^5$
j) $-\frac{1}{8}x^3 = \frac{1}{4}x^3$
k) $7x^4 + 10 = 20 – 3x^4$
l) $\frac{1}{2}(x^5 – 36) = -5$
m) $-\frac{3}{5}(x^6 + 2) = 2(x^6 + 3)$
n) $(x-1)^4 = \frac{81}{16}$
o) $4(x+5)^2 = 25$
p) $\frac{3}{2}(x+2)^3 = \frac{4}{9}$

Vorgehensweise: Potenzgleichungen.

Lösungen: L =: a) {-8; 8}; b) {-5}; c) {-2, 2}; d) {2}; e) {}; f) {-3; 3}; g) {$\sqrt[3]{7,5}$}: h) {}; i) {-1}; j) {0}; k) {-1; 1}, l) {$\sqrt[5]{16}$}; m) {}; n) {-0,5; 2,5}; o) {-7,5; -2,5}; p) {-4/3}.

Aufgabe 2: Berechne zur Potenzfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4$:

a) $f(-4)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(3)$;

b) $f(2) + f(-1)$, $f(5) – f(0)$, $f(\frac{15}{2}) – f(-\frac{15}{2})$;

c) $f(x) = 8$;

d) $f(x) = \frac{1}{8}$.

Vorgehensweise: Funktionswerte; Potenzgleichungen.

Lösungen: a) f(-4) = 128, f(0) = 0, f(0,5) = 1/32, f(3) = 40,5; b) f(2) + f(-1) = 8,5, f(5) – f(0) = f(5) = 312,5, f(7,5) – f(-7,5) = 0; c) x = ±2; d) x = ±1/√2.

Aufgabe 3: Bestimme die Funktionsgleichung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$. Die Punkte $P(x_p|y_P)$ liegen auf der Kurve der Funktion.

a) P(2|8)

b) P(-3|81)

c) $P(\frac{1}{2}|\frac{1}{32})$

d) $P(-\frac{5}{2}|6{,}25)$.

Vorgehensweise: Funktionsbestimmung.

Lösungen: n =, f(x) =: a) 3, x^3; b) 4, x^4; c) 5, x^5; d) 2, x^2.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichung der Potenzfunktion $f(x) = ax^n$. Die Punkte $P(x_p|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ liegen auf der Kurve der Funktion.

a) P(1|0,5), Q(2|2)

b) P(-1|2), Q(3|-162)

c) P(-4|-64), Q(1|1)

d) P(1|-1), $(\frac{9}{2}|-20{,}25)$

e) $P(0{,}5|\frac{1}{80})$, Q(3|2,7)

f) P(-4|12,8), Q(2|0,8).

Vorgehensweise: Funktionsbestimmung.

Lösungen: a =, n =, f(x) =: a) 0,5, 2, $0{,}5x^2$; b) -2, 4, $-2x^4$; c) 1, 3, x^3; d) -1, 2, $-x^2$; e) 0,1, 3, $0{,}1x^3$; f) 0,05, 4, $0{,}05x^4$.

Aufgabe 5: Erstelle die Wertetabelle und zeichne den Graphen der Potenzfunktion f(x).

a) $f(x) = -0{,}25x^2$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$

c) $f(x) = -x^5$

d) $f(x) = -\frac{3}{10}x^4$

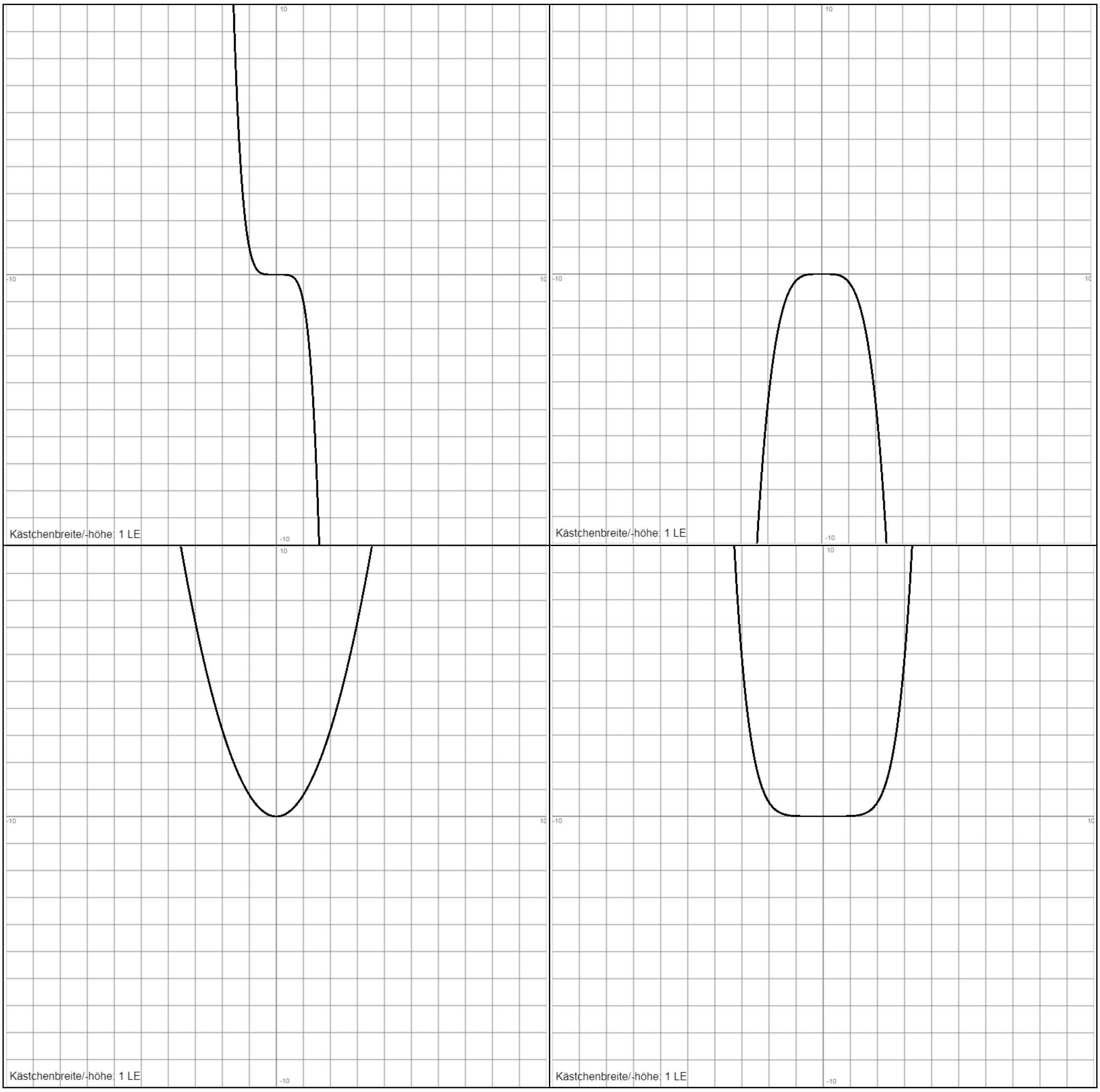
e) $f(x) = \frac{4}{5}x^2$

f) $f(x) = \frac{1}{125}x^6$.

Vorgehensweise: Funktionswerte, Graphen.

Lösungen: <u>Graphen</u>:

a)-f)



Aufgabe 6: Berechne, falls vorhanden, die Schnittpunkte zwischen der Potenzfunktion f(x) und der Geraden y.

a) $f(x) = 0{,}25x^2$, $y = 4$

b) $f(x) = x^3$, $y = -8$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^5$, $y = 16$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$, $y = \frac{5}{2}$

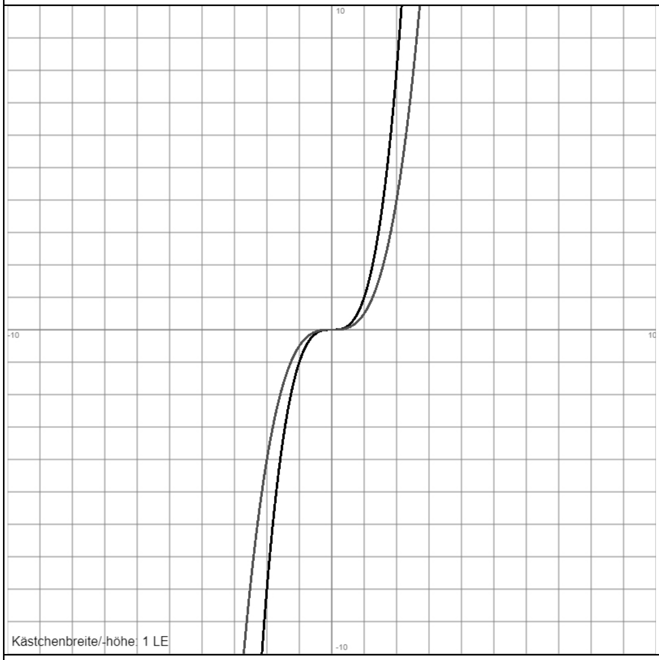
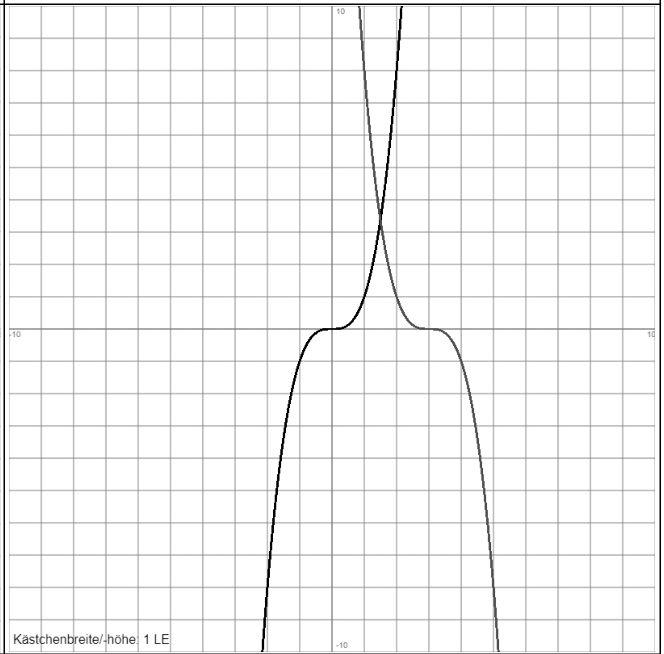
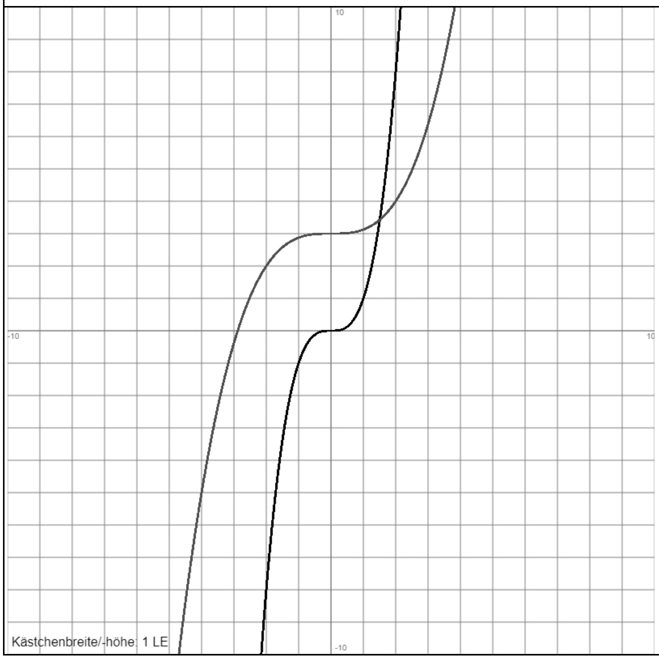
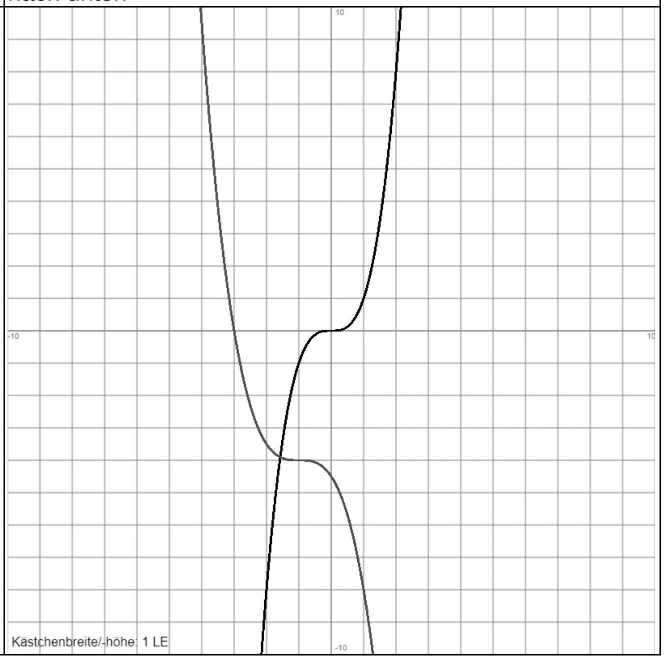
Vorgehensweise: Potenzgleichungen.

Lösungen: Schnittpunkte: a) P(-4|4), Q(4|4); b) P(2|-8); c) P(-2|16); d) -.

Aufgabe 7: Beschreibe, wie durch Stauchung oder Streckung, Spiegelung und Verschiebung entlang der x- oder y-Achse aus der Potenzfunktion $y = x^3$ die Funktionen $f(x) = 0{,}5x^3$, $g(x) = -(x-3)^3$, $h(x) = 0{,}125x^3 + 3$, $k(x) = -0{,}5(x+1)^3 - 4$ entstehen.

Vorgehensweise: Stauchung/Streckung; x-Achsen-Spiegelung; Verschiebung entlang der x- oder y-Achse.

Lösungen: Graphen:

f(x): Stauchung entlang y-Achse	g(x): Verschiebung um 3 nach rechts, Spiegelung an der x-Achse
	
h(x): Stauchung entlang y-Achse, Verschiebung um 3 nach oben	k(x): Verschiebung um 1 nach links, Spiegelung an der x-Achse, Stauchung entlang y-Achse, Verschiebung um 4 nach unten
	

Aufgabe 8: Erstelle die Wertetabelle und zeichne den Graphen der Potenzfunktion f(x).

a) $f(x) = (x-4)^2 – 1$

b) $f(x) = -0{,}5(x+2)^3$

c) $f(x) = -0{,}25x^4 + 4$

d) $f(x) = (x-1)^4 + 1$

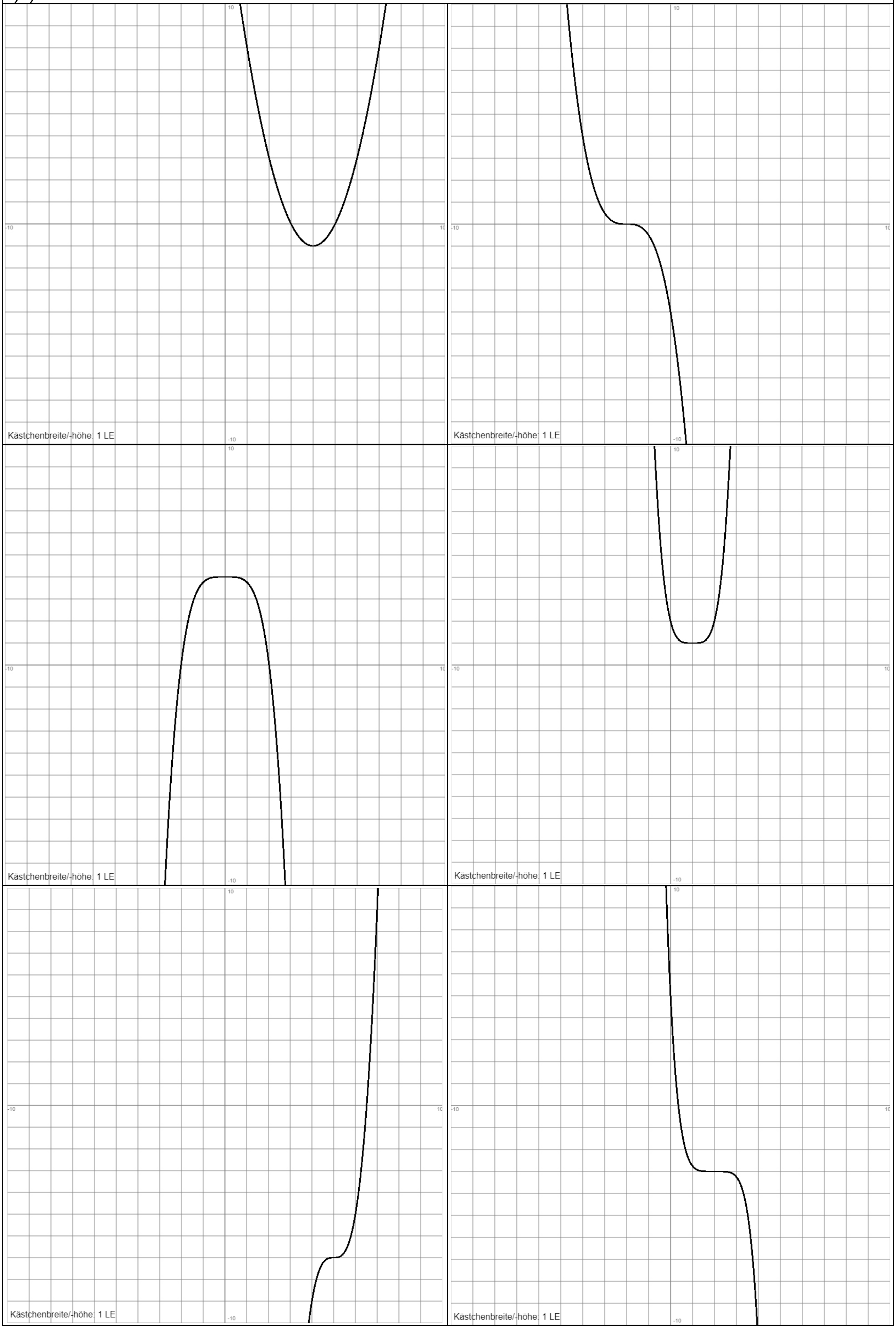
e) $f(x) = 2(x-5)^3 – 7$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^5 – 3$.

Vorgehensweise: Funktionswerte, Graphen.

Lösungen: Graphen:

a)-f)


Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
Kästchenbreite/-höhe: 1 LE

Aufgabe 9: Bestimme zur Potenzfunktion f(x) den y-Achsenabschnitt und die Nullstellen, falls vorhanden.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$ b) $f(x) = -\frac{5}{8}(x+2)^6$

c) $f(x) = 0{,}5(x-3)^3$ d) $f(x) = (x-1)^5 + 1$

e) $f(x) = 2(x+1)^4 + 5$ f) $f(x) = \frac{1}{40}(x-2)^4 - 6{,}4$

Vorgehensweise: Berechnung von f(0), Potenzgleichungen f(x) = 0.

Lösungen: Schnittpunkte mit y-, x-Achse: a) $S_y(0|-4)$, $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$; b) $S_y(0|-40)$, $N(-2|0)$; c) $S_y(0|-13{,}5)$, $N(3|0)$; d) $S_y(0|0) = N(0|0)$; e) $S_y(0|7)$; f) $S_y(0|-6)$, $N(-6|0)$, $N(6|0)$.

Aufgabe 10: Bestimme zur Potenzfunktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 + 8$:

a) f(-3), $f(-\frac{5}{4})$, f(1), f(4);

b) den Schnittpunkt S_y mit der y-Achse;

c) die Nullstelle N;

d) die Lösung der Gleichung f(x) = -46;

e) die Lösung der Gleichung f(x) = 8.

Vorgehensweise: Funktionswerte; Potenzgleichungen.

Lösungen: a) f(-3) = -23,25, f(-1,25) = -0,58203125, f(1) = 7,75, f(4) = 10, b) $S_y(0|6)$, c) $N(2(1-\sqrt[3]{4})|0)$; d) x = -4; e) x = 2.

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Mathematik-Aufgabenpool: Potenzfunktionen / Aufgaben 1457-1466