

# Mathematik-Aufgabenpool

## > Quadratische Gleichungen (a-b-c-Formel) III

**Einleitung:** Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Quadratische Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form:  $ax^2 + bx + c = 0$  mit reellen Zahlen a, b, c genügen. Ist  $b=0$ , so liegt eine rein quadratische Gleichung vor, ansonsten eine gemischt quadratische.

a) Bei einer rein quadratischen Gleichung ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen:  $ax^2+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

b) Bei einer gemischt quadratischen Gleichung (mit Koeffizient vor  $x^2$  als 1) ergeben sich als (keine bis zwei) Lösungen:

$$ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{a-b-c-Formel}).$$

Komplexere quadratische Gleichungen sind dann durch Term- (Auflösen von Klammern, binomische Formeln; Zusammenfassen von  $x^2$ , x und Zahlen) und Gleichungsumformungen (Addition, Subtraktion von Summanden; Division, Multiplikation von Faktoren) auf die vorerwähnten Grundformen der rein oder gemischt quadratischen Gleichung zu bringen, so dass die oben genannten Vorgehensweisen greifen.

**Aufgabe 1:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $x^2 = 289$

b)  $x^2 - 64 = 0$

c)  $2x^2 = 72$

d)  $4x^2 - 9 = 0$

e)  $0,5x^2 - 6 = 2$

f)  $16x^2 = -\frac{9}{4}$

g)  $0,25x^2 + 8 = 8 - 0,75x^2$

h)  $2x^2 + \frac{3}{2} = 2$

i)  $\frac{2}{3}x^2 - 5 = \frac{14}{3}x^2 - 30$

j)  $3(x^2-1) = 0,5(106-x^2)$

k)  $\frac{4}{5}x(x-5) = \frac{7}{6}x^2 - 4x$

l)  $5x^2 + 3 = 2(x^2+39)$

m)  $8(x^2-2x) = -2(x^2+8x) + 1000$

n)  $-\frac{5}{4}x^2 = \frac{2}{5}(x^2+10)$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der rein quadratischen Gleichungen ist die Gleichung nach  $x^2$  umzustellen und dann die Wurzel zu ziehen.

**Lösungen:** L =: a) {-17; 17}; b) {-8; 8}; c) {-6; 6}; d) {-1,5; 1,5}; e) {-4; 4}; f) {}; g) {0}; h) {-0,5; 0,5}; i) {-2,5; 2,5}; j) {-4; 4}; k) {0}; l) {-5; 5}; m) {-10; 10}; n) {}.

**Aufgabe 2:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $x^2 - 2x - 35 = 0$

b)  $x^2 + x - 6 = 0$

c)  $x^2 + 3x - 40 = 0$

d)  $x^2 + 4x = 0$

e)  $x^2 - 5x - 24 = 0$

f)  $x^2 + 2x + 10 = 0$

g)  $x^2 - 10x - 39 = 0$

h)  $x^2 - 9x + 18 = 0$

i)  $x^2 + 8x + 16 = 0$

j)  $x^2 + 9x + 20 = 0$

k)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

l)  $x^2 + 4x - 21 = 0$

m)  $x^2 - 7x = 0$

n)  $x^2 + 6x + 8 = 0$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der gemischt quadratischen Gleichungen ist die a-b-c-Formel zu verwenden.

**Lösungen:** L =: a) {-5; 7}; b) {-3; 2}; c) {-8; 5}; d) {-4; 0}; e) {-3; 8}; f) {}; g) {-3; 13}; h) {3; 6}; i) {-4}; j) {-5; -4}; k) {-5}; l) {-7; 3}; m) {0; 7}; n) {-4; -2}.

**Aufgabe 3:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $3x^2 + 36x - 84 = 0$

b)  $x^2 - 34x - 72 = 0$

c)  $2x^2 + 25x - 93 = 0$

d)  $-2x^2 + 46x - 84 = 0$

e)  $-x^2 - 28x - 96 = 0$

f)  $-4x^2 + 32x - 64 = 0$

g)  $5x^2 + 34x - 99 = 0$

h)  $3x^2 + 44x - 100 = 0$

i)  $-7x^2 + x = 0$

j)  $-x^2 + 49x - 94 = 0$

k)  $9x^2 + 5x = 0$

l)  $6x^2 - 25x - 100 = 0$

m)  $4x^2 - 34x - 84 = 0$

n)  $5x^2 + 44x - 60 = 0$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der gemischt quadratischen Gleichungen ist die a-b-c-Formel anzuwenden.

**Lösungen:** L =: a) {-14; 2}; b) {-2; 36}; c) {-15,5; 3}; d) {2; 21}; e) {-24; -4}; f) {-4}; g) {-9; 11/5}; h) {-50/3; 2}; i) {0; 1/7}; j) {2; 47}; k) {-5/9; 0}; l) {-2,5; 20/3}; m) {-2; 10,5}; n) {-10; 6/5}.

**Aufgabe 4:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $x^2 - 44x - 92 = 0$

b)  $9x^2 + 15x - 84 = 0$

c)  $6x^2 - 150 = 0$

d)  $x^2 - 13x = 90$

e)  $4x^2 + 4x = 99$

f)  $-33x - 30 = 9x^2$

g)  $x^2 = 28x - 96$

h)  $8x^2 - 8x - 96 = 0$

i)  $-8x^2 = x$

j)  $5(x^2 - x) = 100$

k)  $4(x^2 - 81) = 0$

l)  $4x^2 - 2x = 0$

m)  $7x^2 + 44x - 96 = 0$

n)  $x^2 - 88 = 18x$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

**Lösungen:** L =: a) {-2; 46}; b) {-4; 7/3}; c) {-5; 5}; d) {-5; 18}; e) {-5,5; 4,5}; f) {-2; -5/3}; g) {4; 24}; h) {-3; 4}; i) {-1/8; 0}; j) {-4; 5}; k) {-9; 9}; l) {0; 0,5}; m) {-8; 12/7}; n) {-4; 22}.

**Aufgabe 5:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{4} = 0$

b)  $-9x^2 + 18x - 9 = 0$

c)  $x^2 - \frac{40}{3}x + \frac{100}{3} = 0$

d)  $x(3x - 11) = 92$

e)  $x^2 + 2,8x = 0,6$

f)  $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = 0$

g)  $2x^2 = 1 + \frac{24}{5}x$

h)  $12x^2 - 11x + 2 = 0$

i)  $\frac{25}{9}x^2 = \frac{64}{121}$

j)  $8x^2 + 39x - 54 = 0$

k)  $x^2 - 2,8x - 9,6 = 0$

l)  $\frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x = 21$

$$m) -7x^2 = -5x$$

$$n) \frac{1}{3}x(38-x) = 24$$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

**Lösungen:** L =: a)  $\{-3/4; 1/3\}$ ; b)  $\{1\}$ ; c)  $\{-5; 5\}$ ; d)  $\{-4; 23/3\}$ ; e)  $\{-3; 0,2\}$ ; f)  $\{-0,5; 5/6\}$ ; g)  $\{-2,5; 0,2\}$ ; h)  $\{1/4; 2/3\}$ ; i)  $\{-24/55; 24/55\}$ ; j)  $\{-6; 9/8\}$ ; k)  $\{-2; 4,8\}$ ; l)  $\{-28/9; 3\}$ ; m)  $\{0; 5/7\}$ ; n)  $\{2; 36\}$ .

**Aufgabe 6:** Bestimme die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) x^2 + 39x - 82 = 0$$

$$b) 9x^2 - 100 = 0$$

$$c) 5x^2 - 32x - 84 = 0$$

$$d) x^2 + 3x = 88$$

$$e) x = \frac{9}{5}x^2$$

$$f) x = 84 - 9x^2$$

$$g) 6x^2 + 12x - 90 = 0$$

$$h) \frac{1}{6}(9x-3) = x^2$$

$$i) x^2 + \frac{17}{6}x - \frac{44}{3} = 0$$

$$j) 7x^2 = 6x + 88$$

$$k) 9x^2 - 98 = 49x$$

$$l) x^2 + \frac{31}{4}x = 22,5$$

$$m) -3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$n) -6x(x-1,5) = 3$$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der reinen oder gemischt quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

**Lösungen:** L =: a)  $\{-41; 2\}$ ; b)  $\{-10/3; 10/3\}$ ; c)  $\{-2; 8,4\}$ ; d)  $\{-11; 8\}$ ; e)  $\{0; 5/9\}$ ; f)  $\{-28/9; 3\}$ ; g)  $\{-5; 3\}$ ; h)  $\{0,5; 1\}$ ; i)  $\{-5,5; 8/3\}$ ; j)  $\{-22/7; 4\}$ ; k)  $\{-14/9; 7\}$ ; l)  $\{-10; 9/4\}$ ; m)  $\{1/3; 1\}$ ; n)  $\{0,5; 1\}$ .

**Aufgabe 7:** Berechne die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) 3x^2 + 10x - 88 = -5x^2 - 18x$$

$$b) 11x^2 + 10x - 35 = 4x^2 + 41x + 55$$

$$c) 3x(x-1) - 100 = -7x^2 - 1$$

$$d) 23(1-x) = 2(4x^2+19)$$

$$e) 5x(x+10) - 60 = 2x^2 + 13(x+2)$$

$$f) -3x(x-1) = x(3x-4)$$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

**Lösungen:** L =: a)  $\{-5,5; 2\}$ ; b)  $\{-2; 45/7\}$ ; c)  $\{-3; 3,3\}$ ; d)  $\{-15/8; -1\}$ ; e)  $\{-43/3; 2\}$ ; f)  $\{0,5; 2/3\}$ .

**Aufgabe 8:** Berechne die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$a) 2x^2 - 10x + 11 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 60$$

$$b) (x-1)(x-4) = x^2 + 3x + 12$$

$$c) \frac{5}{3}x(x-2) = x\left(\frac{5}{3}x+1\right) + \frac{7}{6}$$

$$d) (x+5)(2x+3) = 30$$

$$e) x^2 - 3x = \frac{1}{2}(x-3)^2$$

$$f) x^2 + \frac{11}{3}x + 17\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(x^2 - 40x)$$

**Vorgehensweise:** Zur Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichungen ist das in der Einleitung Gesagte zu beachten.

**Lösungen:** L =: a) {-2; 7}; b) {-1}; c) {7/26}; d) {-7,5; 1}; e) {-3; 3}; f) {3,25; 4}.

**Aufgabe 9:** Löse die quadratische Gleichung:

$$x(1-5x) = -x^2 + 10x - 9$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} x(1-5x) &= -x^2 + 10x - 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x - 5x^2 &= -x^2 + 10x - 9 && | + 5x^2 \\ x &= 4x^2 + 10x - 9 && | -x \\ 0 &= 4x^2 + 9x - 9 && | :4 \\ 0 &= x^2 + 2,25x - 2,25 && \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = 2,25, c = -2,25)} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2,25 \pm \sqrt{2,25^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2,25)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2,25 \pm \sqrt{14,0625}}{2} = \frac{-2,25 \pm 3,75}{2}$$

$$x_1 = -1,125 + 1,875 = 0,75, x_2 = -1,125 - 1,875 = -3 \quad \text{Lösungsmenge: L = \{-3; 0,75\}}$$

**Aufgabe 10:** Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x(x+2) - 10x + 12 = 0$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} x(x+2) - 10x + 12 &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 2x - 10x + 12 &= 0 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 && \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = -8, c = 12)} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 4+2 = 6, x_2 = 4-2 = 2 \quad \text{Lösungsmenge: L = \{2; 6\}}$$

**Aufgabe 11:** Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$4x(1+2x) - 62 = x(x+4) + 50$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} 4x(1+2x) - 62 &= x(x+4) + 50 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 4x + 8x^2 - 62 &= x^2 + 4x + 50 && \text{(Ordnen)} \\ 8x^2 + 4x - 62 &= x^2 + 4x + 50 && | -x^2 \\ 7x^2 + 4x - 62 &= 4x + 50 && | -4x \\ 7x^2 - 62 &= 50 && | +62 \\ 7x^2 &= 112 && | :7 \\ x^2 &= 16 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ x &= \pm 4 && \text{Lösungsmenge: L = \{-4; 4\}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 12:** Löse die quadratische Gleichung:

$$x(x+2) + 10 = -6(x+1)$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} x(x+2) + 10 &= -6(x+1) && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 2x + 10 &= -6x - 6 && | +6x \\ x^2 + 8x + 10 &= -6 && | +6 \\ x^2 + 8x + 16 &= 0 && \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = 8, c = 16)} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x = -4 \quad \text{Lösungsmenge: L = \{-4\}}$$

**Aufgabe 13:** Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$(2x-5)(x+3) = 121$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} (2x-5)(x+3) &= 121 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 2x^2 + 6x - 5x - 15 &= 121 && \text{(Zusammenfassen)} \\ 2x^2 + x - 15 &= 121 && | -121 \\ 2x^2 + x - 136 &= 0 && | :2 \\ x^2 + 0,5x - 68 &= 0 && \text{(a-b-c-Formel: } a = 1, b = 0,5, c = -68) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-68)}}{2 \cdot 1} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{272,0625}}{2} = \frac{-0,5 \pm 16,5}{2} = -0,25 \pm 8,25$$

$$x_1 = -0,25 + 8,25 = 8, \quad x_2 = -0,25 - 8,25 = -8,5 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-8,5, 8\}$$

**Aufgabe 14:** Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 11x - 9$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} (x+2)(x+5) &= x^2 + 11x - 9 && \text{(Klammern auflösen)} \\ x^2 + 5x + 2x + 10 &= x^2 + 11x - 9 && \text{(Zusammenfassen)} \\ x^2 + 7x + 10 &= x^2 + 11x - 9 && | -x^2 \\ 7x + 10 &= 11x - 9 && | -7x \\ 10 &= 4x - 9 && | +9 \\ 19 &= 4x && | :4 \\ x &= 19/4 && \text{Lösungsmenge: } L = \{19/4\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 15:** Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$(2x-4)(x+6) = (8x-1)(x-3)$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} (2x-4)(x+6) &= (8x-1)(x-3) && \text{(Klammern auflösen)} \\ 2x^2 + 12x - 4x - 24 &= 8x^2 - 24x - x + 3 && \text{(Zusammenfassen)} \\ 2x^2 + 8x - 24 &= 8x^2 - 25x + 3 && | -2x^2 \\ 8x - 24 &= 6x^2 - 25x + 3 && | -2x \\ -24 &= 6x^2 - 33x + 3 && | +24 \\ 0 &= 6x^2 - 33x + 27 && \text{(a-b-c-Formel: } a = 6, b = -33, c = 27) \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 6 \cdot 27}}{2 \cdot 6} = \frac{33 \pm \sqrt{441}}{12} = \frac{33 \pm 21}{12} = \frac{11 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{11+7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5, \quad x_2 = \frac{11-7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{1; 4,5\}$$

**Aufgabe 16:** Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+3)(2x+1) - 2(x-1)(x-4) = 0$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} (x+3)(2x+1) - 2(x-1)(x-4) &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\ (2x^2 + x + 6x + 3) - 2(x^2 - 4x - x + 4) &= 0 && \text{(Zusammenfassen)} \\ (2x^2 + 7x + 3) - 2(x^2 - 5x + 4) &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\ 2x^2 + 7x + 3 - 2x^2 + 10x - 8 &= 0 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 17x - 5 &= 0 && | +5 \\ 17x &= 5 && | :17 \\ x &= 5/17 && \text{Lösungsmenge: } L = \{5/17\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 17:** Bestimme die Lösungen:

$$4(x^2+3) - 47x - 42 = (2x+5)(4-3x)$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} 4(x^2+3) - 47x - 42 &= (2x+5)(4-3x) && \text{(Klammern auflösen)} \\ 4x^2 + 12 - 47x - 42 &= 8x - 6x^2 + 20 - 15x && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\ 4x^2 - 47x - 30 &= -6x^2 - 7x + 20 && | +6x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
10x^2 - 47x - 30 = -7x + 20 \\
10x^2 - 40x - 30 = 20 \\
10x^2 - 40x - 50 = 0 \\
x^2 - 4x - 5 = 0
\end{array}
\begin{array}{l}
| +7x \\
| -20 \\
| :10 \\
(a-b-c-Formel: a = 1, b = -4, c = -5)
\end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3$$

$$x_1 = 2+3 = 5, x_2 = 2-3 = -1 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-1; 5\}$$

**Aufgabe 18:** Löse die quadratische Gleichung:

$$(x-5)(x+2) + (x+4)x = (x-2)(x-3) + 4x - 8$$

**Lösung:**

$$\begin{array}{l}
(x-5)(x+2) + (x+4)x = (x-2)(x-3) + 4x - 8 \\
x^2 + 2x - 5x - 10 + x^2 + 4x = x^2 - 3x - 2x + 6 + 4x - 8 \\
2x^2 + x - 10 = x^2 - x - 2 \\
x^2 + x - 10 = -x - 2 \\
x^2 + 2x - 10 = -2 \\
x^2 + 2x - 8 = 0
\end{array}
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| -x^2 \\
| +x \\
| +2 \\
(a-b-c-Formel: a = 1, b = 2, c = -8)
\end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$$

$$x_1 = -1+3 = 2, x_2 = -1-3 = -4 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{-4; 2\}$$

**Aufgabe 19:** Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$2(x-2)^2 = 3(x+1)$$

**Lösung:**

$$\begin{array}{l}
2(x-2)^2 = 3(x+1) \\
2(x^2 - 4x + 4) = 3x + 3 \\
2x^2 - 8x + 8 = 3x + 3 \\
2x^2 - 11x + 8 = 3 \\
2x^2 - 11x + 5 = 0
\end{array}
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 2. binomische Formel}) \\
(\text{Klammern auflösen}) \\
| -3x \\
| -3 \\
(a-b-c-Formel: a = 2, b = -11, c = 5)
\end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{11+9}{4} = \frac{20}{4} = 5, x_2 = \frac{11-9}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \quad \text{Lösungsmenge: } L = \{0,5, 5\}$$

**Aufgabe 20:** Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+4)^2 + 2(x+3) = (x-5)^2 + 10x + 7$$

**Lösung:**

$$\begin{array}{l}
(x+4)^2 + 2(x+3) = (x-5)^2 + 10x + 7 \\
x^2 + 8x + 16 + 2x + 6 = x^2 - 10x + 25 + 10x + 7 \\
x^2 + 10x + 22 = x^2 + 32 \\
10x + 22 = 32 \\
10x = 10 \\
x = 1
\end{array}
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| -x^2 \\
| -22 \\
| :10 \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{1\}
\end{array}$$

**Aufgabe 21:** Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$4(x+3)^2 - 5(x-3)^2 = 2(x-3)(x+3) + 9$$

**1. Lösung:**

$$\begin{array}{l}
4(x+3)^2 - 5(x-3)^2 = 2(x-3)(x+3) + 9 \\
4(x^2 + 6x + 9) - 5(x^2 - 6x + 9) = 2(x^2 - 9) + 9 \\
4x^2 + 24x + 36 - 5x^2 + 30x - 45 = 2x^2 - 18 + 9 \\
-x^2 + 54x - 9 = 2x^2 - 9 \\
54x - 9 = 3x^2 - 9 \\
-9 = 3x^2 - 54x - 9 \\
0 = 3x^2 - 54x \\
0 = x^2 - 18x
\end{array}
\begin{array}{l}
(\text{Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel}) \\
(\text{Klammern auflösen}) \\
(\text{Zusammenfassen, Ordnen}) \\
| +x^2 \\
| -54x \\
| +9 \\
| :3 \\
(a-b-c-Formel: a = 1, b = -18, c = 0)
\end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2}}{2} = \frac{18 \pm 18}{2} = 9 \pm 9$$

$$x_1 = 9+9 = 18, x_2 = 9-9 = 0$$

Lösungsmenge: L = {0; 18}

## 2. Lösung:

$$4(x+3)^2 - 5(x-3)^2 = 2(x-3)(x+3) + 9$$

$$4(x^2+6x+9) - 5(x^2-6x+9) = 2(x^2-9) + 9$$

$$4x^2 + 24x + 36 - 5x^2 + 30x - 45 = 2x^2 - 18 + 9$$

$$-x^2 + 54x - 9 = 2x^2 - 9$$

$$54x - 9 = 3x^2 - 9$$

$$-9 = 3x^2 - 54x - 9$$

$$0 = 3x^2 - 54x$$

$$0 = x^2 - 18x$$

$$0 = x(x-18)$$

$$x = 0, x-18 = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 18$$

(Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel)

(Klammern auflösen)

(Zusammenfassen, Ordnen)

| +x<sup>2</sup>

| -54x

| +9

| :3

(Ausklammern von x)

(Satz vom Nullprodukt)

| +18

Lösungsmenge: L = {0; 18}

## Aufgabe 22: Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung:

$$(4x+1)^2 = (3x-2)(x+8) - 4(10x-1)$$

### Lösung:

$$(4x+1)^2 = (3x-2)(x+8) - 4(10x-1)$$

$$16x^2 + 8x + 1 = 3x^2 + 24x - 2x - 16 - 40x + 4$$

$$16x^2 + 8x + 1 = 3x^2 - 18x - 12$$

$$13x^2 + 8x + 1 = -18x - 12$$

$$13x^2 + 26x + 1 = -12$$

$$13x^2 + 26x + 13 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1$$

(Klammern auflösen, 1. binomische Formel)

(Zusammenfassen, Ordnen)

| -3x<sup>2</sup>

| +18x

| +12

| :13

(a-b-c-Formel: a = 1, b = 2, c = 1)

Lösungsmenge: L = {-1}

## Aufgabe 23: Bestimme die Lösungen:

$$(x+2)^2 - 3(x+4) = (x-2)(1-3x) - 8$$

### Lösung:

$$(x+2)^2 - 3(x+4) = (x-2)(1-3x) - 8$$

$$x^2 + 4x + 4 - 3x - 12 = x - 3x^2 - 2 + 6x - 8$$

$$x^2 + x - 8 = -3x^2 + 7x - 10$$

$$4x^2 + x - 8 = 7x - 10$$

$$4x^2 - 6x - 8 = -10$$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{8} = \frac{6 \pm 2}{8} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1, x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

(Klammern auflösen, 1. binomische Formel)

(Zusammenfassen, Ordnen)

| +3x<sup>2</sup>

| -7x

| +10

(a-b-c-Formel: a = 4, b = -6, c = 2)

Lösungsmenge: L = {0,5; 1}

## Aufgabe 24: Löse die quadratische Gleichung:

$$(2x-1)^2 - (3x+1)^2 = (x-4)(2x+8) + 16(9x+2)$$

### 1. Lösung:

$$(2x-1)^2 - (3x+1)^2 = (x-4)(2x+8) + 16(9x+2)$$

$$(4x^2 - 4x + 1) - (9x^2 + 6x + 1) = 2(x^2 - 16) + 144x + 32$$

$$4x^2 - 4x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = 2x^2 - 32 + 144x + 32$$

$$-5x^2 - 10x = 2x^2 + 144x$$

$$-10x = 7x^2 + 144x$$

$$0 = 7x^2 + 154x$$

$$0 = x^2 + 22x$$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2}}{2} = \frac{-22 \pm 22}{2} = -11 \pm 11$$

$$x_1 = -11+11 = 0, x_2 = -11-11 = -22$$

(Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel)

(Klammern auflösen)

(Zusammenfassen, Ordnen)

| +5x<sup>2</sup>

| +10x

| :7

(a-b-c-Formel: a = 1, b = 22, c = 0)

Lösungsmenge: L = {-22; 0}

**2. Lösung:**

$$\begin{aligned}
(2x-1)^2 - (3x+1)^2 &= (x-4)(2x+8) + 16(9x+2) && \text{(Klammern auflösen, 1.-3. binomische Formel)} \\
(4x^2-4x+1) - (9x^2+6x+1) &= 2(x^2-16) + 144x + 32 && \text{(Klammern auflösen)} \\
4x^2-4x+1 - 9x^2-6x-1 &= 2x^2-32 + 144x + 32 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\
-5x^2 - 10x &= 2x^2 + 144x && | +5x^2 \\
-10x &= 7x^2 + 144x && | +10x \\
0 &= 7x^2 + 154x && | :7 \\
0 &= x^2 + 22x && \text{(Ausklammern von x)} \\
0 &= x(x+22) && \text{(Satz vom Nullprodukt)} \\
x &= 0, x+22 = 0 && | -22 \\
x_1 &= 0, x_2 = -22 && \text{Lösungsmenge: } L = \{-22; 0\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 25:** Löse die quadratische Gleichung:

$$(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 = 14x - 1$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 &= 14x - 1 && \text{(Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel)} \\
(x^2+8x+16) - (x^2-10x+25) - (x^2-2x+1) &= 14x - 1 && \text{(Klammern auflösen)} \\
x^2 + 8x + 16 - x^2 + 10x - 25 - x^2 + 2x - 1 &= 14x - 1 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\
-x^2 + 20x - 10 &= 14x - 1 && | -14x \\
-x^2 + 6x - 10 &= -1 && | +1 \\
-x^2 + 6x - 9 &= 0 && | \cdot (-1) \\
x^2 - 6x + 9 &= 0 && \text{(a-b-c-Formel: } a = 1, b = -6, c = 9) \\
x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\
x &= 3 && \text{Lösungsmenge: } L = \{3\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 26:** Bestimme die Lösungen:

$$2(x-3)^2 - 3(x-5)^2 - 4(x-7)^2 - (3x-5) = 0$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
2(x-3)^2 - 3(x-5)^2 - 4(x-7)^2 - (3x-5) &= 0 && \text{(Klammern auflösen, 1.-2. binomische Formel)} \\
2(x^2-6x+9) - 3(x^2-10x+25) - 4(x^2-14x+49) - 3x + 5 &= 0 && \text{(Klammern auflösen)} \\
2x^2-12x+18 - 3x^2+30x-75 - 4x^2+56x-196 - 3x + 5 &= 0 && \text{(Zusammenfassen, Ordnen)} \\
-5x^2 + 71x - 248 &= 0 && \text{(a-b-c-Formel: } a = -5, b = 71, c = -248) \\
x_{1,2} &= \frac{-71 \pm \sqrt{71^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-248)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-71 \pm \sqrt{81}}{-10} = \frac{-71 \pm 9}{-10} \\
x_1 &= \frac{-71 + 9}{-10} = \frac{-62}{-10} = 6,2, x_2 = \frac{-71 - 9}{-10} = \frac{-80}{-10} = 8 && \text{Lösungsmenge: } L = \{6,2; 8\}
\end{aligned}$$

Abkürzungen: L = Lösungsmenge.