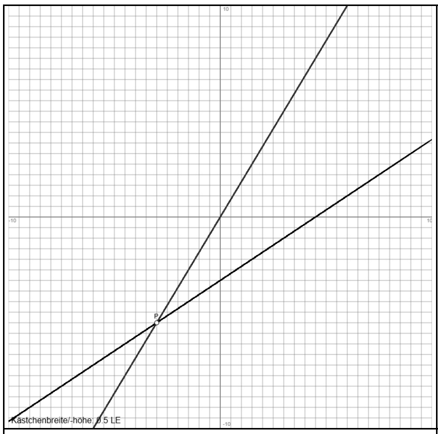
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Schnittpunkte I (Geraden, Parabeln)

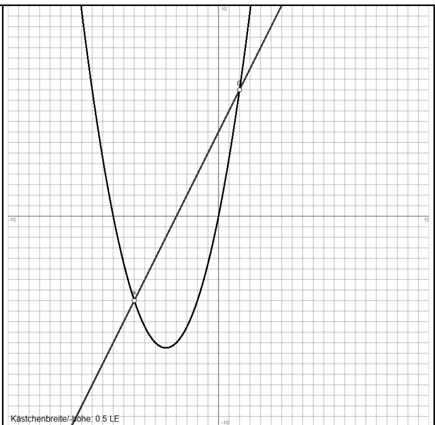
Einleitung: Geraden sind (als ganz rationale Funktionen 1. Grades, lineare Funktionen) von der Form: $y = mx + c$ mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt c, m, c reell (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei $x=0$) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ und (bei $m\neq 0$, $y=0$) die Nullstelle $N(-c/m|0)$ als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Der Steigungswinkel einer Geraden errechnet sich aus: $\tan\varphi = |m| \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}|m|$. Die Geradensteigung errechnet sich aus zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Geraden vom Typ $y = mx$ ($c = 0$) heißen Ursprungsgeraden (als proportionale Funktionen). Die Ursprungsgerade $y = x$ ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade $y = -x$ die 2. Winkelhalbierende.

Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, e, dem Scheitelpunkt $S(d|e)$ und den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$. Von der Scheitel- zur Normalform einer Parabelgleichung gelangt man durch Anwenden der binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ bzw. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, von der Normal- zur Scheitelform durch die quadratische Ergänzung, also der Addition und Subtraktion des Quadrats von $b/2$: $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (b/2)^2 + c - (b/2)^2 = (x+b/2)^2 + c - (b/2)^2$ mit Scheitelpunkt $S(-b/2|c-(b/2)^2)$. Eine spezielle allgemeine Parabel besitzt die Form $y = ax^2 + c$ mit Scheitel $S(0|c)$ (auf der y-Achse); sie ist nach oben geöffnet, wenn $a>0$, nach unten geöffnet, wenn $a<0$; für $a=-1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1<a<1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a<-1$ oder $a>1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$.

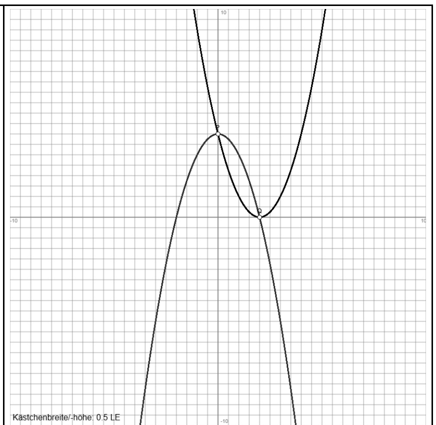
Die Schnittpunkte von Geraden und Parabeln mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmen sich mit: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $x=0 \Rightarrow y = c$ (Gerade, Parabel) -> y-Achsenabschnittspunkt S_y; b) Schnittpunkte mit der x-Achse als Nullstellen: $y = 0$ -> $N(x_0|0)$ (Gerade; auch keine Nullstelle ist möglich), $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$ (Parabel; auch keine oder eine Nullstelle sind möglich).
Schnittpunkte zwischen zwei Geraden, einer Geraden und einer Parabel bzw. zwischen zwei Parabeln ergeben sich aus dem Gleichsetzen der jeweiligen Geraden- bzw. Parabelgleichungen: $y = y$. Die Gleichungen sind nach x umzustellen. Für lineare Gleichungen vom Typ $ax + b = c$ ergibt sich als Lösung: $x = (c-b)/a$. Für rein quadratische Gleichungen gilt die Umformung: $ax^2 +b = c \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$. Für gemischt quadratische Gleichungen gilt die b-c-Formel: $x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Ist x_1 dann eine Lösung der Gleichung $y = y$, so errechnet sich die y-Koordinate y_1 des dazugehörigen Schnittpunkts $P(x_1|y_1)$ durch Einsetzen der Lösung x_1 in einen der Funktionsterme y. Berechnet werden können kein, ein oder zwei Schnittpunkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$.



Schnittpunkt Gerade-Gerade



Schnittpunkte Gerade-Parabel



Schnittpunkte Parabel-Parabel

Aufgabe 1: Bestimme, falls vorhanden, den Schnittpunkt P zwischen den Geraden g und h.

a) g: $y = 2x + 3$, h: $y = -4x + 9$

b) g: $y = 0{,}5x + 2$, h: $y = x - 1$

c) g: $y = 0{,}5x + 8$, h: $y = -1{,}5x + 5$

d) g: $y = -\frac{1}{4}x + 1$, h: $y = -1$

e) g: $y = \frac{2}{3}x - 3$, h: $y = \frac{5}{3}x$

f) g: $y = -\frac{3}{4}x + 4$, h: $y = -0{,}75x - 2$

Aufgabe 2: Bestimme, falls vorhanden, den Schnittpunkt P zwischen den beiden verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabeln p_1 und p_2.

a) p_1: $y = x^2 - 2x + 3$, p_2: $y = x^2$

b) p_1: $y = x^2 + 2x - 3$, p_2: $y = (x+1)^2 + 1$

c) p_1: $y = x^2 + 4x - 8$, p_2: $y = (x-1)^2 - 3$

d) p_1: $y = x^2 - 3x + 2$, p_2: $y = x^2 + 5x + 10$

e) p_1: $y = (x-3)^2$, p_2: $y = (x+2)^2$

f) p_1: $y = x^2 + 6x$, p_2: $y = x^2 - x - 14$

Aufgabe 3: Bestimme, falls vorhanden, die Schnittpunkte P und Q zwischen der Geraden g und der Parabel p.

a) g: $y = -x + 2$, p: $y = x^2 - 4$

b) g: $y = 2x + 4$, p: $y = x^2 + 5x$

c) g: $y = 2$, p: $y = -x^2 + 6$

d) g: $y = 6x + 1$, p: $y = (x+3)^2 - 8$

e) g: $y = \frac{1}{2}x + 5$, p: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

f) g: $y = -0{,}5x - 1$, p: $y = \frac{1}{4}x^2 - 3$

Aufgabe 4: Bestimme, falls vorhanden, die Schnittpunkte P und Q zwischen den (allgemeinen, Normal-) Parabeln p_1 und p_2.

a) p_1: $y = (x-2)^2$, p_2: $y = -x^2 + 4$

b) p_1: $y = -x^2 + 2$, p_2: $y = x^2 - 8x + 10$

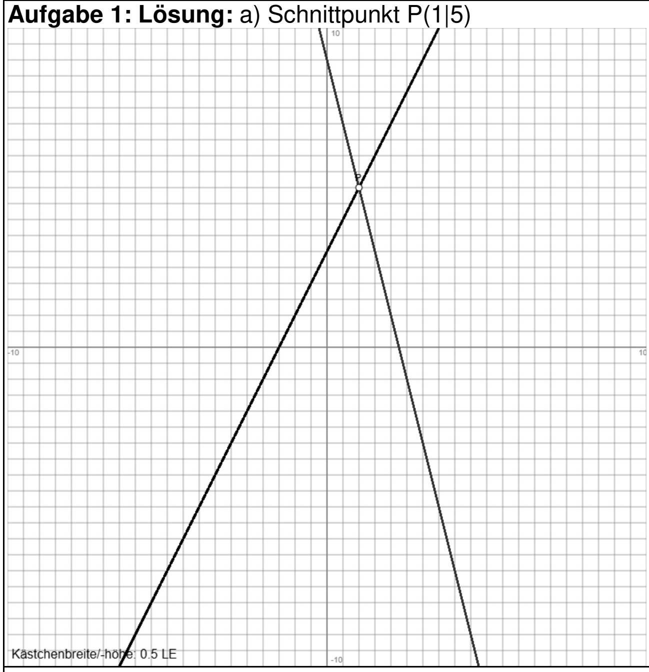
c) p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$, p_2: $y = x^2 - x$

d) p_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, p_2: $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$

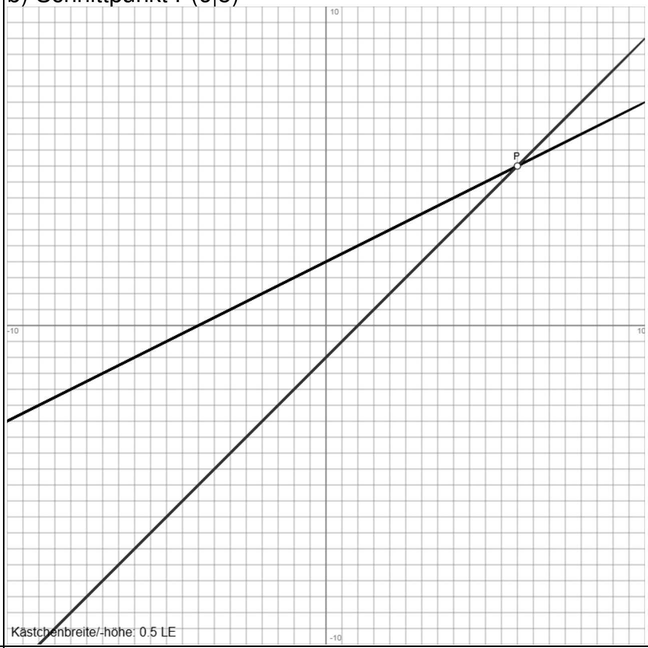
e) p_1: $y = -2x^2 + 6$, p_2: $y = x^2 + 6x - 3$

f) p_1: $y = (x+2)^2 + 3$, p_2: $y = -3x^2 + 6$

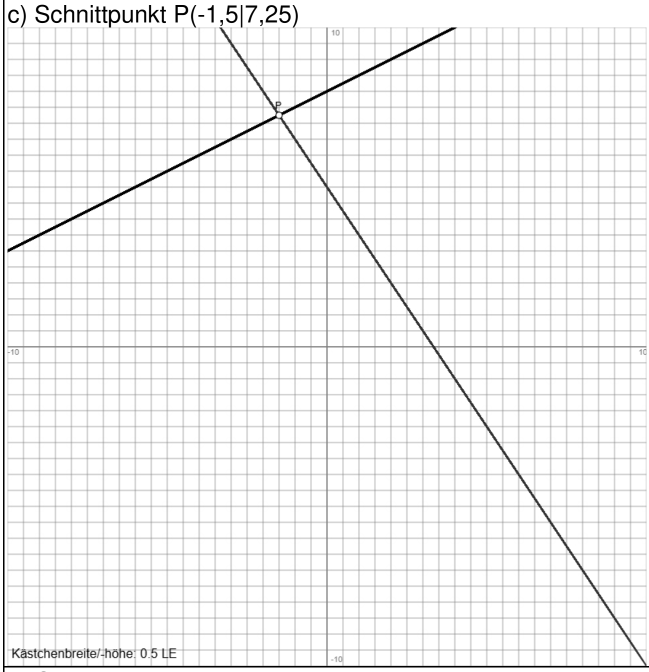
Aufgabe 1: Lösung: a) Schnittpunkt P(1|5)



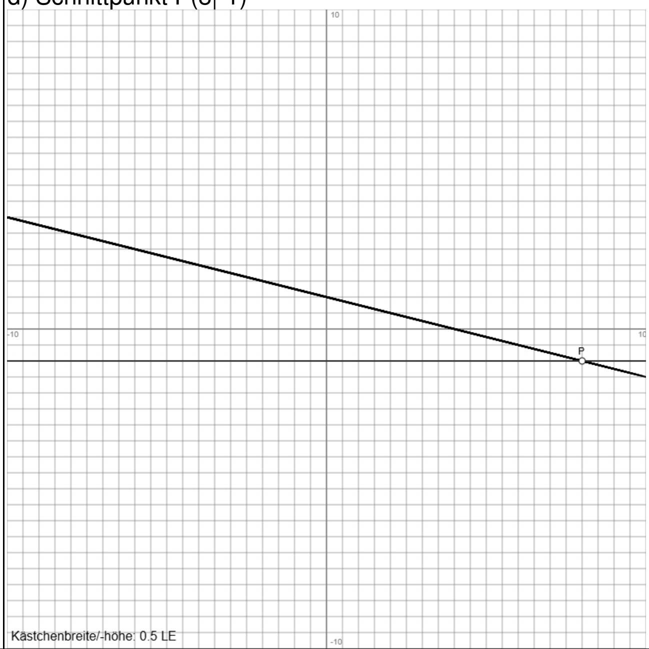
b) Schnittpunkt P(6|5)



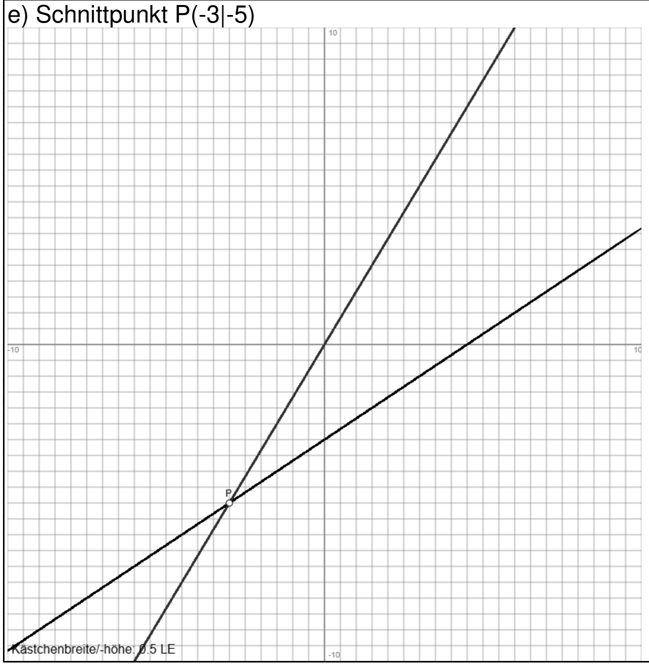
c) Schnittpunkt P(-1,5|7,25)



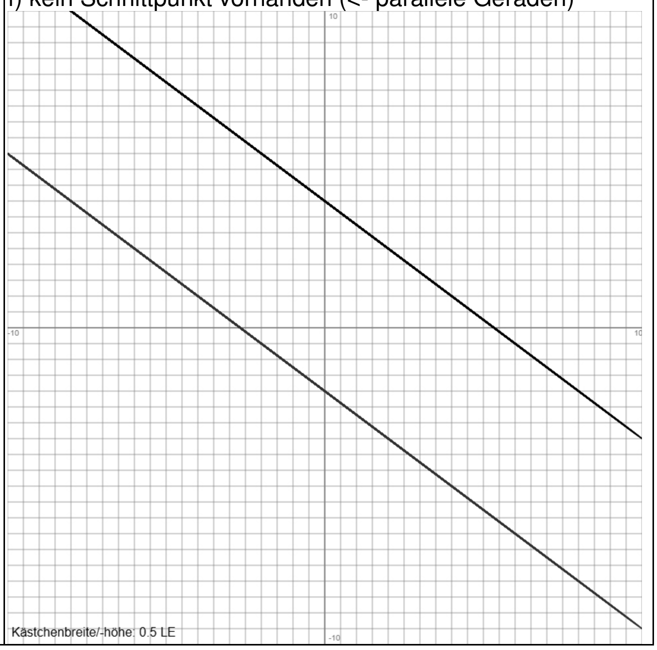
d) Schnittpunkt P(8|-1)



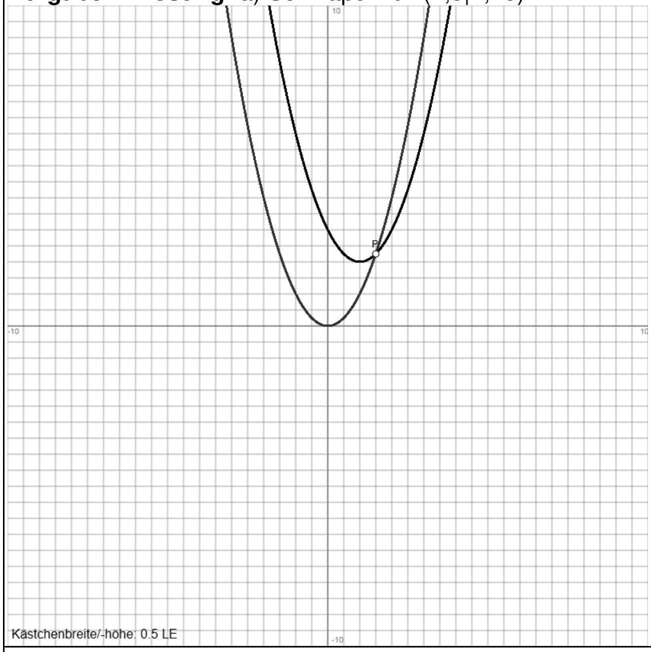
e) Schnittpunkt P(-3|-5)



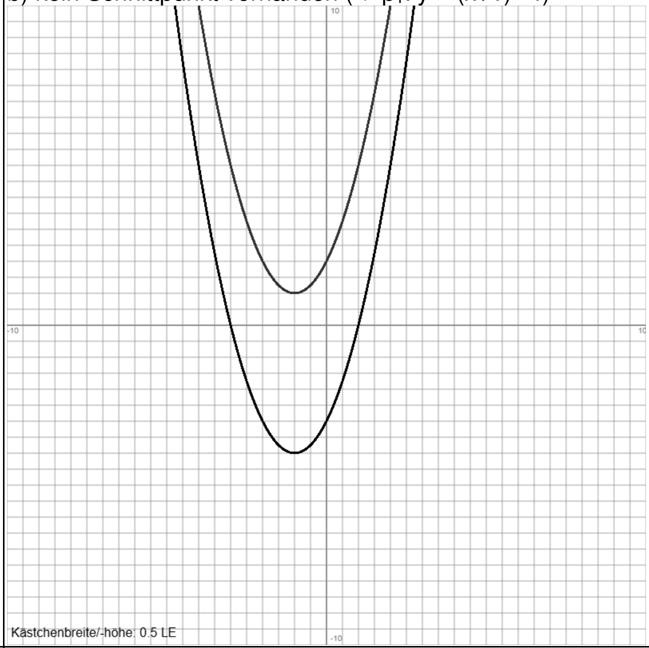
f) kein Schnittpunkt vorhanden (<- parallele Geraden)



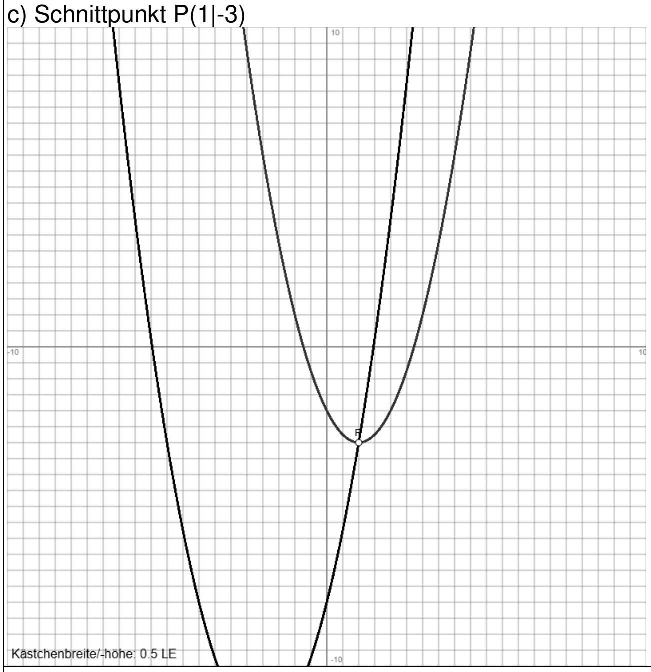
Aufgabe 2: Lösung: a) Schnittpunkt P(1,5|2,25)



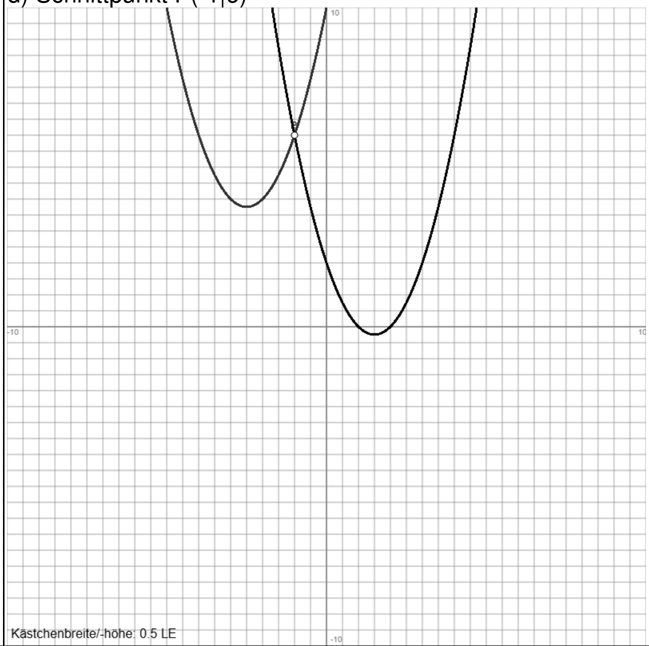
b) kein Schnittpunkt vorhanden (<- p_1: $y = (x+1)^2-4$)



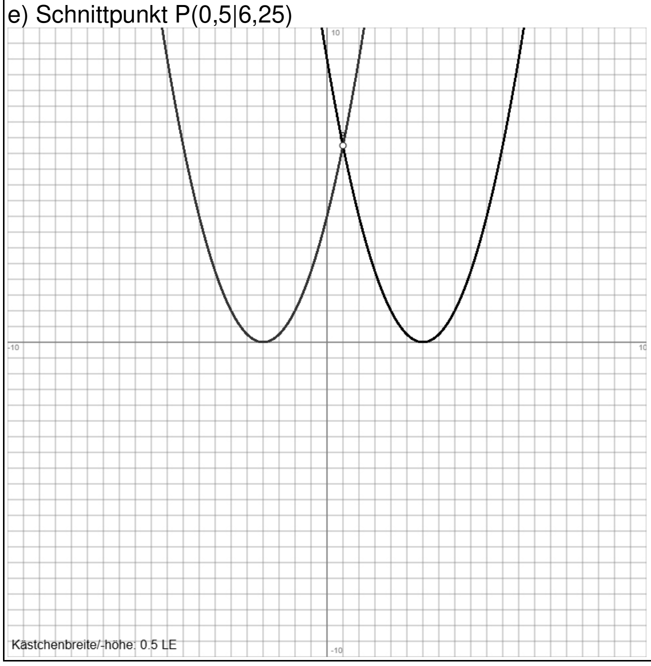
c) Schnittpunkt P(1|-3)



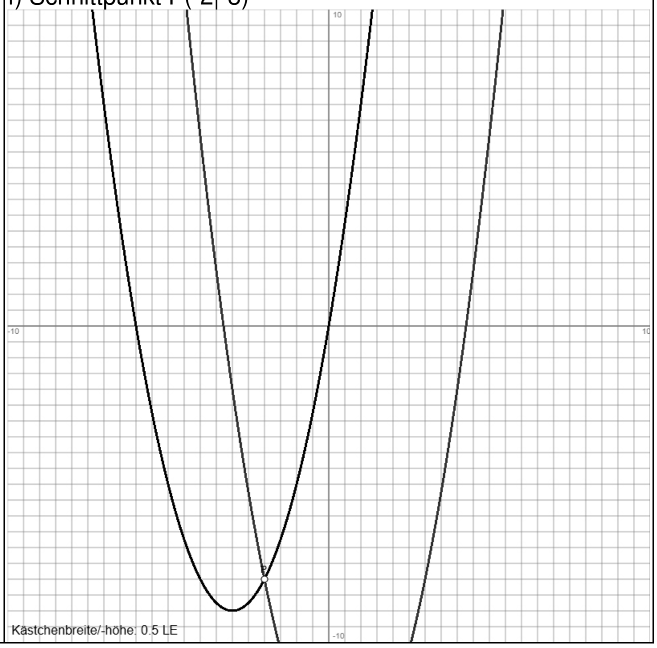
d) Schnittpunkt P(-1|6)



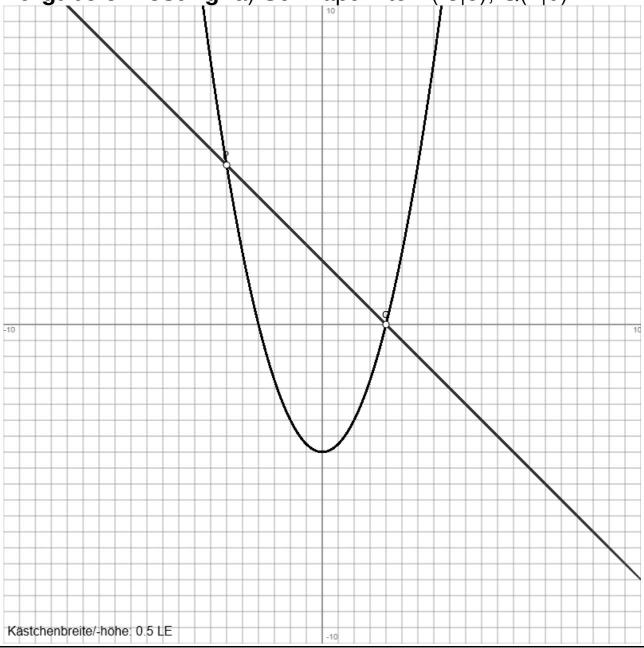
e) Schnittpunkt P(0,5|6,25)



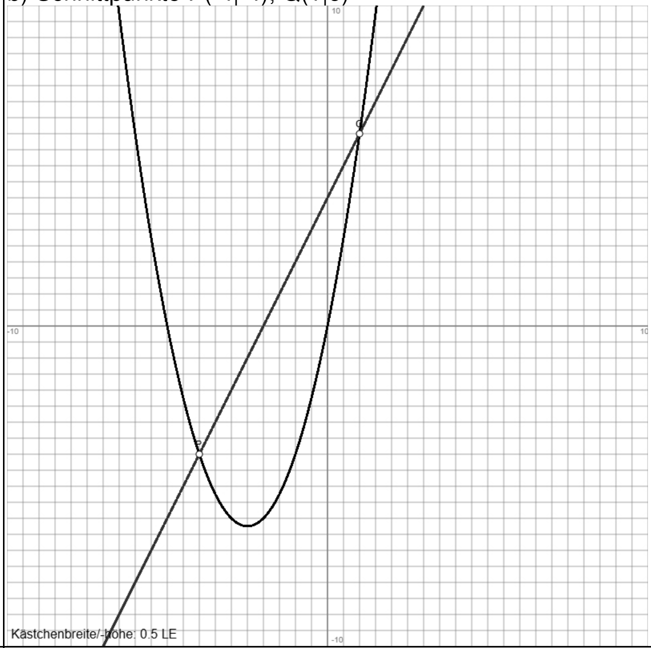
f) Schnittpunkt P(-2|-8)



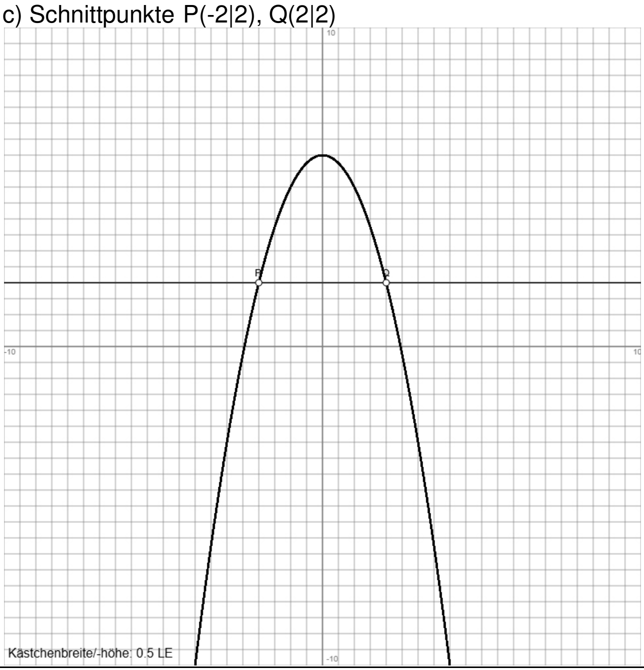
Aufgabe 3: Lösung: a) Schnittpunkte P(-3|5), Q(2|0)



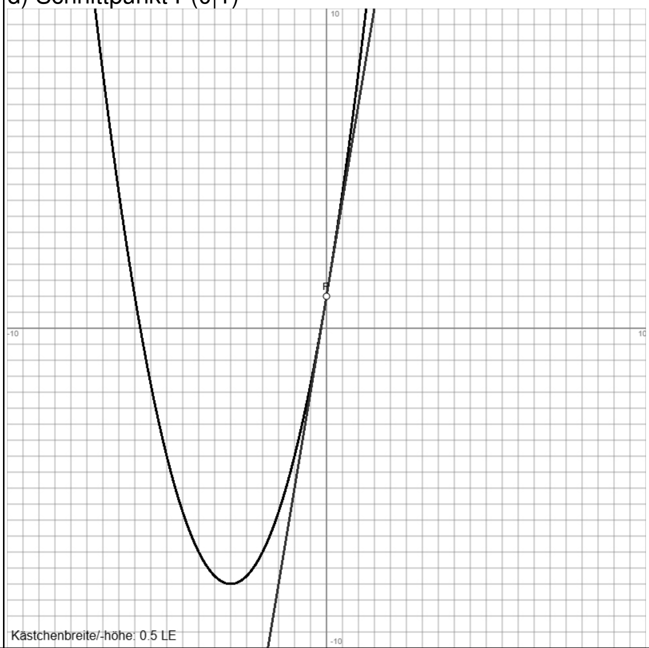
b) Schnittpunkte P(-4|-4), Q(1|6)



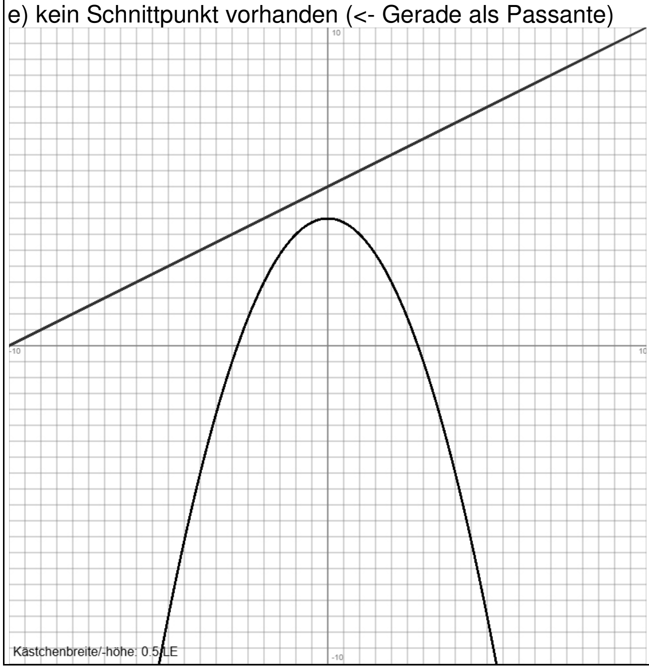
c) Schnittpunkte P(-2|2), Q(2|2)



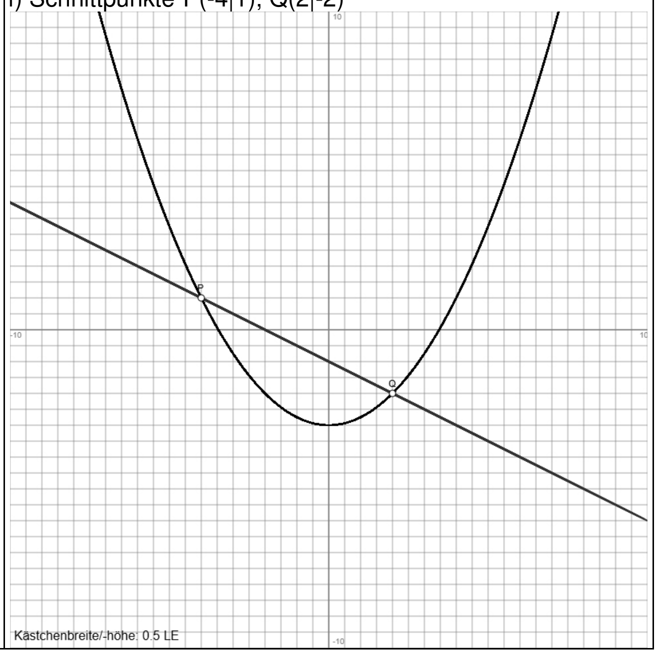
d) Schnittpunkt P(0|1)



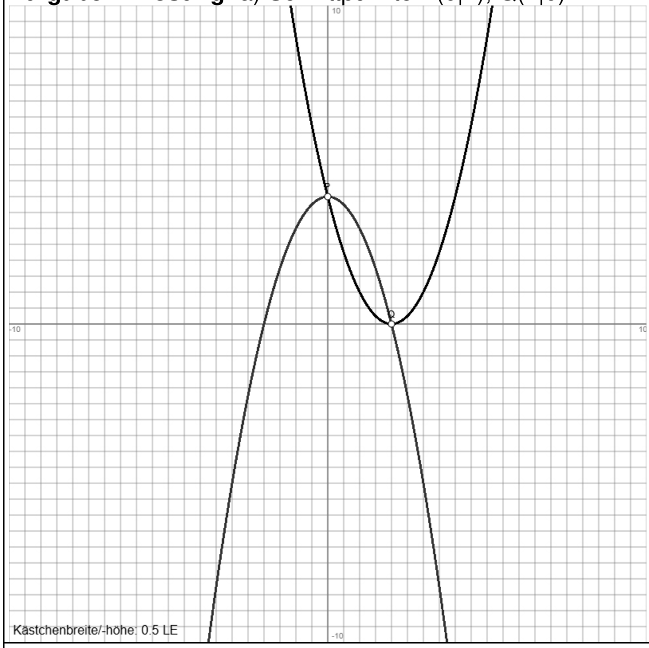
e) kein Schnittpunkt vorhanden (<- Gerade als Passante)



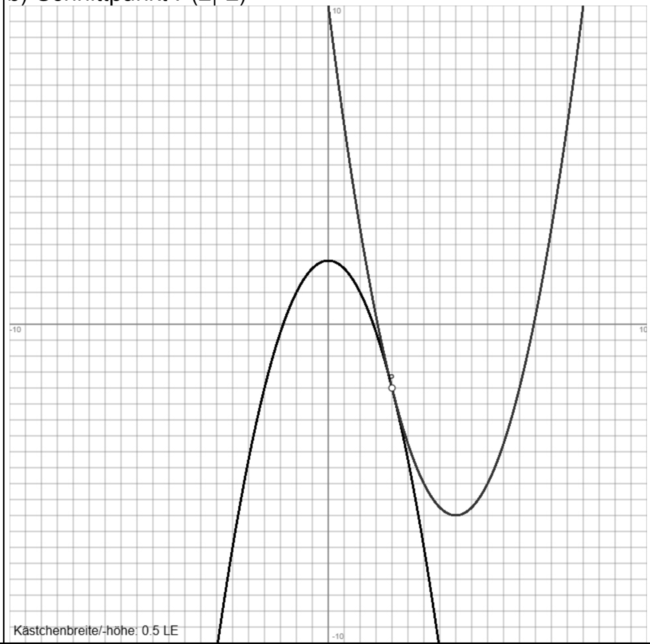
f) Schnittpunkte P(-4|1), Q(2|-2)



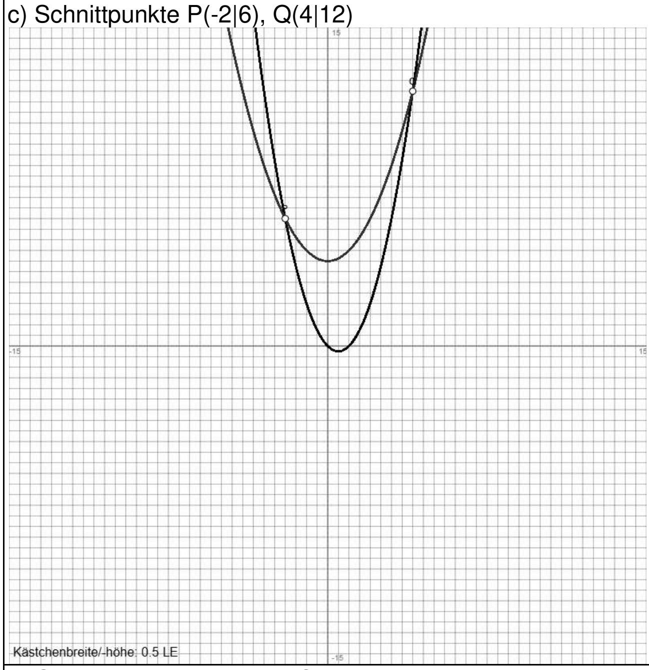
Aufgabe 4: Lösung: a) Schnittpunkte P(0|4), Q(2|0)



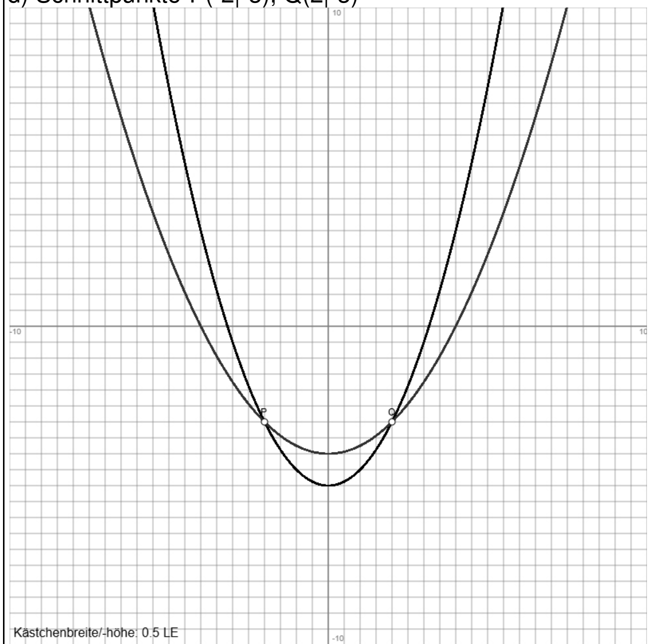
b) Schnittpunkt P(2|-2)



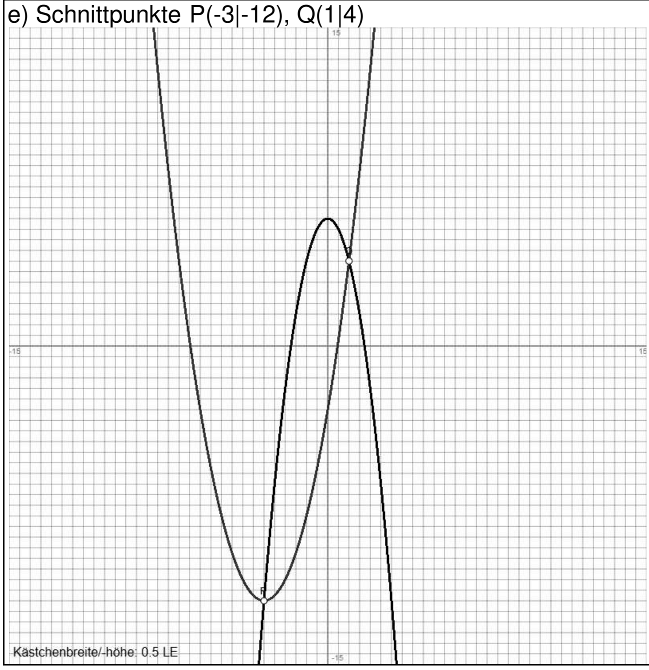
c) Schnittpunkte P(-2|6), Q(4|12)



d) Schnittpunkte P(-2|-3), Q(2|-3)



e) Schnittpunkte P(-3|-12), Q(1|4)



f) Schnittpunkt P(-0,5|5,25)