Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Ungleichungen I

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden.
Ähnliches gilt für Ungleichungen. Für zwei von einer reellen Zahl x abhängige Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ stellen die mathematischen Ausdrücke: $T_1(x) \geq T_2(x)$ oder $T_1(x) > T_2(x)$ oder $T_1(x) \leq T_2(x)$ oder $T_1(x) < T_2(x)$ Ungleichungen dar. Ungleichungen sind definiert dort, wo die Terme definiert sind; alle x, die die Ungleichung erfüllen, sind Lösungen der Ungleichung. Um solche x zu bestimmen, muss meistens die Ungleichung umgeformt werden. Dies geschieht mit den Umformungen: a) Addition und Subtraktion von Termen; b) Multiplikation und Division von Termen ($\neq 0$); sind Letztere negativ, so dreht sich das Ungleichungszeichen „≥, >, ≤, <" um; c) Bildung des Kehrwertes; bei $T_1(x)$, $T_2(x) > 0$ dreht sich das Ungleichungszeichen um; d) Wurzelziehen, Exponieren, Logarithmieren usw., teilweise unter Umkehrung des Ungleichungszeichens.

Lineare Ungleichungen sind von der Form: $ax + b \geq c$ bzw. $ax + b > c$ mit den Zahlen a, b, c, $a \neq 0$ und haben die Lösung: $x \geq \frac{c-b}{a}$, $x > \frac{c-b}{a}$ für a>0 bzw. $x \leq \frac{c-b}{a}$, $x < \frac{c-b}{a}$ für a<0.

Quadratische Ungleichungen sind von der Form: $ax^2 + bx + c \geq 0$ bzw. $ax^2 + bx + c > 0$ mit den Zahlen a, b, c, $a \neq 0$. Die etwa aus der abc-Formel errechneten Lösungen x_1, x_2 der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ liefern dann die Lösungen der Ungleichung. Im Fall $x_1 < x_2$ ist die Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ lösbar für: $x \leq x_1$ *oder* $x \geq x_2$ bei a>0, $x_1 \leq x \leq x_2$ bei a<0, die Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ lösbar für: $x < x_1$ *oder* $x > x_2$ bei a>0, $x_1 < x < x_2$ bei a<0. Im Fall $x_1 = x_2$ ist die Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ lösbar für alle x bei a>0, für $x = x_1$ bei a<0, die Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ lösbar für alle $x \neq x_1$ bei a>0, für kein x bei a<0. Hat die quadratische Gleichung (*) keine Lösung, so gilt entweder: $ax^2 + bx + c > 0$ mit allen reellen x als Lösung oder $ax^2 + bx + c < 0$ mit keinem x als Lösung.

Ungleichungen mit Produkten sind von der Form: $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) \geq 0$ bzw. $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) > 0$ mit von x abhängigen Termen $A_1(x)$, $A_2(x) \cdot \ldots$, $A_n(x)$. Das Produkt $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x)$ ist ≥ 0 oder positiv, wenn es für die x, die die Ungleichung lösen, nur eine gerade Anzahl von negativen Faktoren gibt. Fallunterscheidungen ergeben sich daher gemäß: 1) $A_1(x) \geq 0$, $A_2(x) \geq 0$, ..., $A_n(x) \geq 0$; 2) $A_1(x) < 0$, $A_2(x) \geq 0$, ..., $A_n(x) \geq 0$ usw. (analog für „>"). Ganz rationale Terme lassen sich als Produkt von Linearfaktoren $x - x^*$ und nicht reell lösbaren quadratischen Faktoren $x^2 + px + q$ ([Linear-] Faktorzerlegung) mit (mehrfachen) Nullstellen und quadratischen Faktoren zerlegen. Dann lässt sich die Ungleichung $T(x) \geq 0$ durch die eben erwähnten Fallunterscheidungen lösen, wobei zur Vereinfachung beachtet werden kann, dass die quadratischen Faktoren $x^2 + px + q$ wegen dort fehlender Nullstellen immer positiv sind, in die Fallunterscheidung also nicht mit einbezogen werden brauchen.

Betragsungleichungen: Der Betrag |r| einer reellen Zahl r ist definiert als für $r \geq 0$ als $|r| = r$, für $r < 0$ als $|r| = -r$: Damit ist $|r|$ immer ≥ 0. In Ungleichungen mit Betragsstrichen sind diese beim Lösen der Ungleichung gemäß der vorstehenden Definition aufzulösen. Dabei ergeben sich neue Ungleichungen als zusätzliche Bedingungen, da ja für einen Term T(x) in Betragsstrichen gilt: $|T(x)| = T(x)$, falls $T(x) \geq 0$ bzw. $|T(x)| = -T(x)$, falls $T(x) < 0$. Den zusätzlichen Bedingungen, nach x umgeformt, entsprechen mehreren Fällen einer Fallunterscheidung, sie ergeben zusammen mit der ebenfalls nach x umgeformten Ausgangsungleichung die für den jeweiligen Fall gültigen x, die die Ungleichung unter der Voraussetzung des jeweiligen Falles lösen. Die x, die die Ungleichung in allen Fällen der Fallunterscheidung lösen, bilden dann die gesamte Lösungsmenge der Ungleichung.

Bruchungleichungen u.a. sind nur für gewisse x definiert, Nenner z.B. dürfen nicht 0 werden. Der Definitionsbereich ist also bei solchen Ungleichungen zunächst zu bestimmen. Des Weiteren ist bei der Multiplikation mit dem Hauptnenner zu beachten, für welche x dieser positiv oder negativ ist. Fallunterscheidungen sind also durchzuführen.

Bei Wurzelungleichungen erweitert sich etwa durch Quadrieren die (potenzielle) Lösungsmenge. Hier ist eine Probe durchzuführen.

Exponentialungleichungen werden durch Umstellen nach der x im Exponenten enthaltenen Potenz und anschließendes Logarithmieren gelöst. Beim Logarithmieren dreht sich eventuell das Ungleichungszeichen um.

1. BRUCHUNGLEICHUNGEN

Aufg. 1: $\frac{1}{x+1} < \frac{12}{3x-2}$ (*)

Bestimmung des Definitionsbereichs: Es muß gelten $x+1 \neq 0 \wedge 3x-2 \neq 0$, also: $x \neq -1 \wedge x \neq \frac{2}{3}$. Damit ist: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{2}{3}\}$

Zur Lösung der Ungleichung muß diese mit den Termen $x+1$ und $3x-2$ multipliziert werden. Daher muß festgestellt werden, wann die Terme positiv oder negativ sind. Demgemäß ergeben sich 4 Fälle (1. $x+1>0 \wedge 3x-2>0$, 2. $x+1<0 \wedge 3x-2>0$, 3. $x+1>0 \wedge 3x-2<0$, 4. $x+1<0 \wedge 3x-2<0$). Somit gilt:

Fall 1 (beide Terme sind positiv): $(*) \underset{\{x+1>0\}}{\overset{\cdot(x+1)}{\Longleftrightarrow}} 1 < \frac{12(x+1)}{3x-2} \underset{\{3x-2>0\}}{\overset{\cdot(3x-2)}{\Longleftrightarrow}} 3x-2 < 12(x+1)$

$\Longleftrightarrow 3x-2 < 12x+12 \underset{-3x}{\Longleftrightarrow} -2 < 9x+12 \underset{-12}{\Longleftrightarrow} -14 < 9x \underset{:9}{\Longleftrightarrow} \underline{\underline{-\frac{14}{9} < x}}$.

Beachtet man noch die Bedingung $(x+1>0 \wedge 3x-2>0) \Longleftrightarrow (x>-1 \wedge x>\frac{2}{3})$

$\Longleftrightarrow \underline{\underline{(x>\frac{2}{3})}}$, so ist: $\mathbb{L}_{1.Fall} = \{x \mid x>\frac{2}{3} \wedge x>-\frac{14}{9}\} = \{x \mid x>\frac{2}{3}\}$

Fall 2: Vorausgesetzt ist: $(x+1<0 \wedge 3x-2>0) \Longleftrightarrow \underline{\underline{(x<-1 \wedge x>\frac{2}{3})}}$. Die Voraussetzung wird aber von keinem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit ist: $\mathbb{L}_{2.Fall} = \{\}$

Fall 3: Hier soll gelten: $(x+1>0 \wedge 3x-2<0) \Longleftrightarrow (x>-1 \wedge x<\frac{2}{3}) \Longleftrightarrow \underline{\underline{-1<x<\frac{2}{3}}}$

Weiter ist: $(*) \underset{\{x+1>0\}}{\overset{\cdot(x+1)}{\Longleftrightarrow}} 1 < \frac{12(x+1)}{3x-2} \underset{\{3x-2<0\}}{\overset{\cdot(3x-2)}{\Longleftrightarrow}} 3x-2 > 12(x+1) \Longleftrightarrow 3x-2 > 12x+12$

$\Longleftrightarrow$ ... (Rechnungen analog zu Fall 1) ... $\Longleftrightarrow \underline{\underline{-\frac{14}{9} > x}}$. Man erhält: $\mathbb{L}_{3.Fall} =$
$\{x \mid -1<x<\frac{2}{3} \wedge -\frac{14}{9}>x\} = \{\}$

Fall 4: Eine Bedingung lautet: $(x+1<0 \wedge 3x-2<0) \Longleftrightarrow (x<-1 \wedge x<\frac{2}{3}) \Longleftrightarrow \underline{\underline{x<-1}}$.

Weiter gilt: $(*) \underset{\{(x+1)<0\}}{\overset{\cdot(x+1)}{\Longleftrightarrow}} 1 > \frac{12(x+1)}{3x-2} \underset{\{3x-2<0\}}{\overset{\cdot(3x-2)}{\Longleftrightarrow}} 3x-2 < 12x+12 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \underline{\underline{-\frac{14}{9}<x}}$

Also: $\mathbb{L}_{4.Fall} = \{x \mid x<-1 \wedge x>-\frac{14}{9}\} = \{x \mid -\frac{14}{9}<x<-1\}$

Gesamtlösungsmenge ist damit: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{1.Fall} \cup \mathbb{L}_{4.Fall} = \{x \mid x>\frac{2}{3} \vee -\frac{14}{9}<x<-1\} =$
$(-\frac{14}{9}; -1) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$.

2. QUADRATISCHE UNGLEICHUNGEN

Aufg. 2: $3x^2+6x>45$ (*) $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

Man muß zur Lösung dieser Ungleichung (*) so umformen, daß auf der einen Seite der Ungleichung etwas von der Form x^2+px+q, auf der anderen Seite die Zahl 0 steht. Somit ergibt sich:

$(*) \underset{-45}{\Longleftrightarrow} 3x^2+6x-45>0 \underset{:3}{\Longleftrightarrow} x^2+2x-15>0 \quad (**)$

Um ein Produkt auf der linken Seite der Ungleichung zu erhalten, empfiehlt es sich wie folgt zu rechnen: $x^2+2x-15=0 \Longleftrightarrow x=-1\pm\sqrt{1+15} \Longleftrightarrow x=-1\pm 4 \Longleftrightarrow x=-5,$ $x=+3$. Damit ist: $x^2+2x-15=(x-(-5))(x-3)=(x+5)(x-3)$, und weiter:

$(**) \Longleftrightarrow (x+5)(x-3)>0$. Nun gilt: $(x+5)(x-3)>0 \Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{cases} (x+5>0 \wedge x-3>0) \Longleftrightarrow x>-5 \wedge x>3 \Longleftrightarrow x>3 \\ \text{bzw.} \\ (x+5<0 \wedge x-3<0) \Longleftrightarrow x<-5 \wedge x<3 \Longleftrightarrow x<-5 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow x>3 \vee x<-5$$

Lösungsmenge ist: $\mathbb{L}=\{x \mid x>3 \vee x<-5\}=(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$

Aufg. 3: $\dfrac{4}{1-x} \leq (x+3) \quad (*)$

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden. Fall 1: $1-x>0 \Longleftrightarrow \underline{1>x}$.

Hier gilt: $(*) \underset{\substack{\cdot(1-x)\\ \{1-x>0\}}}{\Longleftrightarrow} 4 \leq (x+3)(1-x) \Longleftrightarrow 4 \leq x+3-x^2-3x \Longleftrightarrow 4 \leq -x^2-2x+3$

$\underset{-4}{\Longleftrightarrow} 0 \leq -x^2-2x-1 \underset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} 0 \geq x^2+2x+1 \underset{\substack{\text{binomische}\\ \text{Formel}}}{\Longleftrightarrow} 0 \geq (x+1)^2$. Ein Quadrat ist negativ oder 0, wenn es gleich 0 ist. Damit gilt: $0=(x+1)^2 \Longleftrightarrow \underline{x=-1}$ Lösungsmenge: $\mathbb{L}_{1.\text{Fall}}=\{x \mid x<1 \wedge x=-1\}=\{-1\}$

Fall 2: $1-x<0 \Longleftrightarrow \underline{1<x}$. Es ergibt sich: $(*) \underset{\substack{\cdot(1-x)\\ \{1-x<0\}}}{\Longleftrightarrow} 4 \geq (1-x)(x+3) \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow$

$4 \geq -x^2-2x+3 \underset{-4}{\Longleftrightarrow} 0 \geq -x^2-2x-1 \underset{(-1)}{\Longleftrightarrow} 0 \leq x^2+2x+1 \Longleftrightarrow 0 \leq (x+1)^2 \Longleftrightarrow$

$\underline{x\in\mathbb{R}}$. Also: $\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\{x \mid 1<x \wedge x\in\mathbb{R}\}=\{x \mid x>1\}=(1,\infty)$.

Damit ist: $\mathbb{L}=\mathbb{L}_{1.\text{Fall}} \cup \mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\{-1\}\cup(1,\infty)$

3. BETRAGSUNGLEICHUNGEN

Aufg. 4: $2+x<|x-7| \quad (*) \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}$

Man muß wegen des einen Betragszeichens zwei Fälle unterscheiden, gilt doch: $|x-7|=\begin{cases} x-7 & \text{für } x\geq 7 \\ -x+7 & \text{für } x<7 \end{cases}$

1. Fall: $\underline{x\geq 7}$. Hier ist: $(*) \underset{|x-7|=x-7}{\Longleftrightarrow} 2+x<x-7 \underset{-x}{\Longleftrightarrow} \underline{2<-7}$ f. Damit ist $\mathbb{L}_{1.\text{Fall}}=\{\}$

2. Fall: $\underline{x<7}$. Es gilt: $(*) \underset{|x-7|=-x+7}{\Longleftrightarrow} 2+x<-x+7 \underset{+x}{\Longleftrightarrow} 2+2x<7 \underset{-2}{\Longleftrightarrow} 2x<5 \underset{:2}{\Longleftrightarrow}$

$\underline{x<\frac{5}{2}}$. Also: $\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\{x \mid x<7 \wedge x<\frac{5}{2}\}=\{x \mid x<\frac{5}{2}\}=(-\infty,\frac{5}{2})$.

$\mathbb{L}=\mathbb{L}_{1.\text{Fall}}\cup\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=(-\infty,\frac{5}{2})$.

Aufg. 5: $|2x|-|x+4|\geq 10 \quad (*) \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}$

Zwei Betragszeichen in der Ungleichung bedeuten vier Fälle wegen: $|2x|=\begin{cases} 2x & \text{für } 2x\geq 0\text{, also } x\geq 0 \\ -2x & \text{für } 2x<0\text{, also } x<0 \end{cases}$

bzw. $|x+4| = \left\{\begin{matrix} x+4 & \text{f. } x+4\ge 0\text{, also } x\ge -4 \\ -x-4 & \text{für } x<-4\end{matrix}\right\}$.

Fall 1: $(2x\ge 0 \wedge x+4\ge 0) \Leftrightarrow (x\ge 0 \wedge x\ge -4) \Leftrightarrow \underline{\underline{x\ge 0}}$. Dann gilt: $(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}|2x|=2x\\ |x+4|=x+4\end{matrix}\right\}$

$2x-(x+4)\ge 10 \Leftrightarrow 2x-x-4\ge 10 \Leftrightarrow x-4\ge 10 \underset{+4}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x\ge 14}}$. Also: $\mathbb{L}_{1.\text{Fall}}=\{x|x\ge 14\}$

Fall 2: $(2x\ge 0 \wedge x+4<0)\Leftrightarrow(x\ge 0\wedge x<-4)$. Da diese Bedingung von keinem $x\in\mathbb{R}$ erfüllt ist, gilt: $\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\{\}$.

Fall 3: $(2x<0 \wedge x+4\ge 0)\Leftrightarrow(x<0\wedge x\ge -4)\Leftrightarrow \underline{\underline{-4\le x<0}}$. Es ist: $(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}|2x|=-2x\\ |x+4|=x+4\end{matrix}\right\}$

$-2x-(x+4)\ge 10 \Leftrightarrow -2x-x-4\ge 10 \underset{+4}{\Leftrightarrow} -3x\ge 14 \underset{:(-3)}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x\le -\frac{14}{3}}}$.

Damit ist: $\mathbb{L}_{3.\text{Fall}}=\{x|-4\le x<0 \wedge x\le -\frac{14}{3}\}=\{\}$.

Fall 4: $(2x<0\wedge x+4<0)\Leftrightarrow(x<0\wedge x<-4)\Leftrightarrow \underline{\underline{x<-4}}$. Also: $(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}|2x|=-2x\\ |x+4|=-x-4\end{matrix}\right\}$

$-2x-(-x-4)\ge 10 \Leftrightarrow -2x+x+4\ge 10 \Leftrightarrow -x+4\ge 10 \underset{\substack{+x\\-10}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{-6\ge x}}$. Es gilt: $\mathbb{L}_{4.\text{Fall}}=$ $\{x|x<-4\wedge x\le -6\}=\{x|x\le -6\}$. Gesamtlösungsmenge: $\mathbb{L}=\{x|x\ge 14 \vee x\le -6\}=$ $(-\infty,-6]\cup[14,\infty)$.

4. WURZELUNGLEICHUNGEN

Aufg. 6: $2\sqrt{x+7}>3$ Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\{x|x+7\ge 0\}=\{x|x\ge -7\}=[-7,\infty)$

Hier gilt: $2\sqrt{x+7}>3 \underset{\text{Quadrieren}}{\Rightarrow} 4\cdot(x+7)>9 \Leftrightarrow 4x+28>9 \underset{-28}{\Leftrightarrow} 4x>-19 \underset{:4}{\Leftrightarrow} x>-\frac{19}{4}$

Lösungsmenge ist also: $\mathbb{L}=\{x|x>-\frac{19}{4}\}$ $(\subset\mathbb{D})$.

Aufg. 7: $\frac{1}{\sqrt{3-x}}\le\frac{2}{\sqrt{x}}$; $\mathbb{D}=\{x|3-x>0\wedge x>0\}=\{x|3>x\wedge x>0\}=\{x|0<x<3\}=(0,3)$

Es ist: $\frac{1}{\sqrt{3-x}}\le\frac{2}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x}\le 2\cdot\sqrt{3-x}\underset{\text{Quadrieren}}{\Rightarrow} x\le 4(3-x)\Leftrightarrow x\le 12-4x \underset{+4x}{\Leftrightarrow}$ $5x\le 12\underset{:5}{\Leftrightarrow} x\le\frac{12}{5}$. Wegen $\mathbb{D}=(0,3)$ ergibt sich als Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{x|0<x\le\frac{12}{5}\}=(0,\frac{12}{5}]$

Aufg. 8: $\sqrt{x+3}<2+\sqrt{x}$; $\mathbb{D}=\{x|x+3\ge 0\wedge x\ge 0\}=\{x|x\ge -3\wedge x\ge 0\}=\{x|x\ge 0\}=[0,\infty)$

Es ergibt sich: $\sqrt{x+3}<2+\sqrt{x} \underset{\text{Quadr.}}{\Rightarrow} x+3<(2+\sqrt{x})^2 \underset{\text{bin. Formel}}{\Leftrightarrow} x+3<4+4\sqrt{x}+x \underset{-x-4}{\Leftrightarrow}$ $-1<4\sqrt{x} \underset{:4}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{4}<\sqrt{x}$. Da $\sqrt{x}$ positiv ist, gilt dies also für jedes $x\in\mathbb{D}$. Also: $\mathbb{L}=\mathbb{D}=[0,\infty)$.

5. EXPONENTIALUNGLEICHUNGEN

Aufg. 9: $\sqrt[x]{2}>\frac{1}{4}$ $(*)$. Es gilt: $(*)\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}>\frac{1}{4}$ $(**)$. Aus $(**)$ erkennt man, daß $2^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ nicht definiert ist. Also: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nun gilt: $(**)\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}>\frac{1}{2^2}\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}>2^{-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}>-2 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\text{1. Fall:}\\ 1>-2x \underset{:(-2)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}<x \quad \text{für } x>0\\ \text{2. Fall:}\\ 1<-2x \underset{:(-2)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}>x \quad \text{für } x<0\end{matrix}\right]$$

Also: $\mathbb{L}_{1.\text{Fall}}=\{x|x>0\}=(0,\infty)$, $\mathbb{L}_{2.\text{Fall}}=\{x|x<-\frac{1}{2}\}=(-\infty,-\frac{1}{2})$, $\mathbb{L}=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\infty)$.

Abkürzungen: D = Definitionsmenge, L = Lösungsmenge; **R** = Menge der reellen Zahlen.