Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Grundaufgaben zur Vektorrechnung I

Einleitung: Elemente der Vektorrechnung im dreidimensionalen reellen kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem sind Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$, Ortsvektoren $p^{->} = OP^{->} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$, Differenzvektoren $PQ^{->} = OQ^{->}–OP^{->}$, Geraden g: $x^{->} = a^{->} + tu^{->}$ (PF, Stützvektor $a^{->}$, reeller Parameter t, Richtungsvektor $u^{->}$), Ebenen E: $x^{->} = b^{->} + tv^{->} + sw^{->}$ (PF, Stützvektor $b^{->}$, reelle Parameter r, s, Richtungsvektoren $v^{->}$, $w^{->}$), E: $n^{->}(x^{->}-p^{->}) = 0$ (NF, Normalenvektor $n^{->}$), E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF, Normalenvektor $n^{->} = (a\ b\ c)^T$). Geraden und Ebenen sind Linearkombinationen aus Vektorvielfachen $tp^{->}$ und Vektorsummen $p^{->}+q^{->}$ mit Nullvektor $0^{->} = (0\ 0\ 0)^T$, Gegenvektor $-p^{->}$ zu $p^{->}$ oder Mitte $0,5(p^{->}+q^{->})$. Vektoren haben Richtung und Länge, der Betrag eines Vektors ist: $|p^{->}| = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$, der Einheitsvektor berechnet sich als $p_0^{->} = p^{->}/|p^{->}|$. Daneben sind für Vektoren $p^{->} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$ und $q^{->} = (q_1\ q_2\ q_3)^T$ das Skalarprodukt $p^{->}\cdot q^{->} = p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$, das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $p^{->}\times q^{->} = (p_2q_3–p_3q_2\ p_3q_1–p_1q_3\ p_1q_2–p_2q_1)^T$ und das Spatprodukt $(p^{->}\times q^{->})\cdot r^{->}$ definiert.
Die Vektorrechnung kreist um die Konstruktion von Geraden und Ebenen, um die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (Schnittpunkte, Schnittgeraden, Schnittwinkel, Abstände), um Abbildungen (Verschiebungen von Punkten, Geraden und Ebenen, Streckungen, Projektionen, Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen u.a.).

Konstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AB} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{u} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A ($g \parallel g_1$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Lotfußpunkt $F \in g_1$ mit: $\vec{AF} \cdot \vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AF}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AF} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp g_1$)
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u}$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $\vec{x} = \vec{OM} + t\vec{u}$ (PF) (k || g || h)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF), Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{n} = \vec{a} + t\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp E$)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF)

Punkte $A(a_1\|a_2\|a_3)$, $B(b_1\|b_2\|b_3)$, $C(c_1\|c_2\|c_3)$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt $P \notin g$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P ($E \perp g$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u}_1 + t\,\vec{u}_2$ (PF); LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \|\vec{n}\|D$, F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \|\vec{n}\|D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \; b \; c)^T$) (KF), Punkte A, B	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \; b \; c)^T$) (KF), Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)

Ebenenkonstruktionen

E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) -> LGS: $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$ -> E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF)
E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \;\; b \;\; c)^T$) (KF) -> E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (HNF)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Aufgabe 1: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Geraden durch die Punkte A(-1|2|5) und B(3|-4|-4).

Vorgehensweise: Punkte A, B -> Gerade g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB}$ (PF).

Lösung: Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Geraden h, die durch den Punkt P(8|-4|5) und parallel zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ verläuft.

Vorgehensweise: Punkt P$\notin$g, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> Gerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{u}$ || g (PF).

Lösung: Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: Bestimme die (Parameter-, Koordinaten-) Gleichung der Ebene E, auf der die Punkte A(0|-2|-4), B(-2|5|0), C(1|0|4) liegen.

Vorgehensweise: Punkte A, B, C -> Ebene E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF); Punkte A, B, C -> -> $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ -> Ebene E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}) = 0$ (NF) -> Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF).

Lösung: Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (PF), E: $32x_1+20x_2+x_3 = 36$ (KF).

Aufgabe 4: Bestimme die (Koordinaten-) Gleichung der Ebene F, die den Ursprung des Koordinatensystems enthält und parallel zur Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Vorgehensweise: Punkt P∉E, Ebene E: $\vec{x} = \vec{OB} + r\vec{u} + s\vec{v}$ (PF) ->Ebene F: $\vec{x} = \vec{OP} + r\vec{u} + s\vec{v}$ || E (PF) -> $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ -> Ebene F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) -> Ebene F: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF).

Lösung: Ebene E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (PF), E: $-6x_1+4x_2-15x_3 = 0$ (KF).

Aufgabe 5: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Geraden h, die durch den Punkt P(-4|7|2) läuft und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

Vorgehensweise: Punkt P, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ -> Lotfußpunkt Fεg zu P -> Gerade h: $\vec{x} = \vec{OF} + t\vec{FP}$ ⊥ g (PF).

Lösung: Lotfußpunkt F(2|6|6) (t=3) -> Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Lotgeraden h durch den Punkt P(11|-4|12) senkrecht zur Ebene E: $2x_1 - 13x_2 = 20$.

Vorgehensweise: Punkt P, Ebene E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OB}) = 0$ (NF) -> Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}$ ⊥ E (PF).

Lösung: Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$; Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Ebene E, die senkrecht zu einer Geraden g durch einen Punkt P verläuft. Dabei sind:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ P(7|1|-3).}$$

Vorgehensweise: Punkt P, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ -> Ebene E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ ⊥ g (NF);

Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) -> Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF).

Lösung: Ebene E: $-6x_1+x_2+4x_3 = -53$ (KF), E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 53/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF).

Aufgabe 8: Bestimme die (Parameter-) Gleichung der Mittelparallelen k zu den parallelen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u}$ (PF) -> Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $\vec{x} = \vec{OM} + t\,\vec{u}$ (PF).

Lösung: Mitte M(3,5|-5|0); Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9: Bestimme aus der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Punkt P(4|0|7) die (Koordinaten-) Gleichung der Ebene E, die Gerade und Punkt enthält.

Vorgehensweise: Punkt P∉g, Gerade g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ -> Ebene E: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} + s\,\vec{AP}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AP}$ -> Ebene E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}) = 0$ (NF) -> Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF).

Lösung: Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ (PF), E: $-25x_1-22x_2+17x_3 = 19$ (KF).

Aufgabe 10: Bestimme aus den parallelen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die (Koordinaten-) Gleichung der Ebene E, die die Geraden enthält.

Vorgehensweise: Geraden g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{OB} + t\,\vec{u}$ -> Ebene E: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} + s\,\vec{AB}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB}$ -> Ebene E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}) = 0$ (NF) -> Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF).

Lösung: Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$ (PF), E: $8x_1-2x_2+9x_3 = 77$ (KF).

Aufgabe 11: Wie heißt die (Parameter-) Gleichung der senkrecht zur Ebene E stehenden Ebene F durch die Punkte A und B? Dabei sind:

E: $4x_1 + 2x_2 – 10x_3 = 12$, A(1|2|0), B(0|11|1).

Vorgehensweise: Punkte A, B, Ebene E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) -> Ebene F: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{n}$ ⊥ E (PF).

Lösung: Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$; Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ (PF), F: $46x_1+3x_2+19x_3 = 52$ (KF).

Aufgabe 12: Wie heißt die (Koordinaten-) Gleichung der senkrecht zur Ebene E stehenden Ebene F durch die Gerade g? Dabei sind:

$$E: -2x_1 + 7x_3 = 21, \text{ g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vorgehensweise: Punkte A, B, Ebene E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{OP}) = 0$ (NF) -> Ebene F: $\vec{x} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{n} \perp$ E (PF).

Lösung: Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ (PF), E: $x_2 = -1$ (KF).

Lagebeziehungen

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3)$	Abstand: $d(P,Q) = \left\|\vec{PQ}\right\| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$

Lage Punkt – Punkt

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Ebene**
Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ a≠0, b≠0, c≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse)
Ebene E: $bx_2 + cx_3 = d$ b≠0, c≠0	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1-Achse
Ebene E: $ax_1 + cx_3 = d$ a≠0, c≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_2-Achse
Ebene E: $ax_1 + bx_2 = d$ a≠0, b≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_3-Achse
Ebene E: $ax_1 = d$ a≠0	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) -> Ebene parallel zur x_2- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene
Ebene E: $bx_2 = d$ b≠0	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene

Ebene E: $cx_3 = d$ c≠0	$S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_2-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\vec{u}$ -> 1 Lösung: P ε g; keine Lösung: P ∉ g b) Abstand (Lotfußpunktverfahren): F ε g mit: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$, d(P,g) = $\left\|\vec{PF}\right\|$ c) Abstand (Hilfsebenenverfahren): Hilfsebene E_H: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$ mit $\vec{p} = \vec{OP}$, Schnittpunkt F von Hilfsebene E_H und Gerade g als Lotfußpunkt (Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene -> t*) für errechnetes t* mit $\vec{OF} = \vec{a} + t^* \vec{u}$, d(P,g) = $\left\|\vec{PF}\right\|$ d) Abstand (Kreuzproduktformel): d(P,g) = $\left\|\vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a})\right\| / \left\|\vec{u}\right\|$ e) Abstand (Abstandsfunktion): $F_t(a_1+tu_1\|a_2+tu_2\|a_3+tu_3)$ ε g als „laufenden" Punkt -> Abstandsfunktion d(t) = $\left\|\vec{PF_t}\right\|$ -> Minimum der Abstandsfunktion (d'(t)=0) bei t* -> Lotfußpunkt $\vec{OF} = \vec{a} + t^* \vec{u}$, d(P,g) = d(t*) = $\left\|\vec{PF}\right\|$

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1} + s\vec{u_1}$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a_2} + t\vec{u_2}$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a_1} + s\vec{u_1} = \vec{a_2} + t\vec{u_2}$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u_1} = k\vec{u_2}$ -> 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Abstand (bei parallelen Geraden): $d(g_1,g_2) = d(A_2,g_1)$ mit Punkt A_2 ε g_2, z.B. mit $\vec{a_2} = \vec{OA_2}$ d) Abstand (bei windschiefen Geraden, Lotfußpunktverfahren): P_L ε g_1, Q_L ε g_2 mit: $\vec{P_LQ_L} \cdot \vec{u_1} = 0$, $\vec{P_LQ_L} \cdot \vec{u_2} = 0$, $d(g_1,g_2) = \left\|\vec{P_LQ_L}\right\|$; e) Abstand (bei windschiefen Geraden, Hilfsebenenverfahren): Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$, Hilfsebene E_H: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a_1}) = 0$ (NF) mit $E_H \parallel g_2$, $d(g_1,g_2) = d(A_2, E_H)$ mit A_2 ε g_2, z.B. mit $\vec{a_2} = \vec{OA_2}$ (Hessesche Normalform); Formel: $d(g_1,g_2) = \left\|\vec{n}\left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right)\right\| / \left\|\vec{n}\right\|$ f) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}\right\| / \left\|\vec{u_1}\right\| \cdot \left\|\vec{u_2}\right\|\right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt $P(p_1\|p_2\|p_3)$ Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: P$\notin$g b) Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = d$ -> wahre Aussage: Pεg; falsche Aussage: P$\notin$g c) Abstand: d(P,E) = $\left\|\vec{n}\cdot\vec{OP} - d\right\| / \left\|\vec{n}\right\|$ (Hessesche Normalform)

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF) Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: g || E b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt Aεg, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\|\vec{n}\cdot\vec{u}\right\| / \left\|\vec{n}\right\| \cdot \left\|\vec{u}\right\|\right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\vec{v_1} + s\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\vec{v_2} + u\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{b_1} + r\vec{v_1} + s\vec{w_1} = \vec{b_2} + t\vec{v_2} + u\vec{w_2}$ (PF) bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E_1 in die Ebene E_2 (KF): bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ -> unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parametern):: Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: E_1 || E_2 b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1,E_2) = d(A,E_1)$ mit Punkt AεE_2 (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right\| / \left\|\vec{n_1}\right\| \cdot \left\|\vec{n_2}\right\|\right)$

Lage Ebene – Ebene

Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ -> g || E b) $\vec{u} = k\vec{n}$ -> g $\perp$ E

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\,\vec{v_1} + s\,\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\,\vec{v_2} + u\,\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) $\vec{n_1} = k\,\vec{n_2}$ -> $E_1 \parallel E_2$ b) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ -> $E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

Aufgabe 13: Bestimme die Spurpunkte der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Gerade g -> a) $x_1 = 0$ -> S_1, b) $x_2 = 0$ -> S_2, c) $x_3 = 0$ -> S_3 als (eventuelle) Spurpunkte.

Lösung: Spurpunkte $S_1(0|2|15)$, $S_2(1|0|10)$, $S_3(3|-4|0)$.

Aufgabe 14: Bestimme die Spurpunkte der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Welche Aussage kann über die Lage der Geraden im Koordinatensystem getroffen werden?

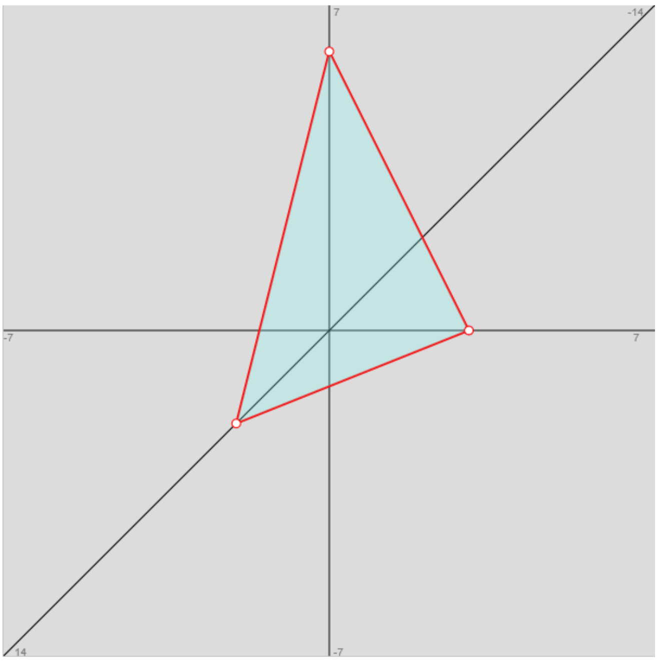
Vorgehensweise: Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> a) $x_1 = 0$ -> S_1, b) $x_2 = 0$ -> S_2, c) $x_3 = 0$ -> S_3 als (eventuelle) Spurpunkte.

Lösung: Spurpunkte $S_1(0|1|14)$, $S_3(7|1|0)$ -> g || x_1-x_3-Ebene.

Aufgabe 15: Bestimme die Spurpunkte der Ebene E: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$. Zeichne die Ebene (Ebenenausschnitt) in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Vorgehensweise: Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ -> $S_1(d/a|0|0)$, $S_2(0|d/b|0)$, $S_3(0|0|d/c)$ als (eventuelle) Spurpunkte.

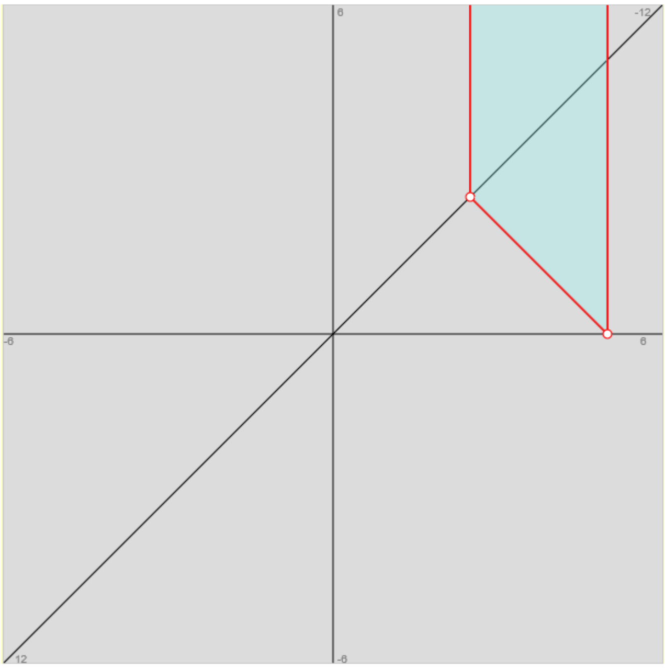
Lösung: Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$, $S_3(0|0|6)$.



Aufgabe 16: Zeichne die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Ebenenausschnitt) in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Vorgehensweise: Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF); Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ -> $S_1(d/a|0|0)$, $S_2(0|d/b|0)$, $S_3(0|0|d/c)$ als (eventuelle) Spurpunkte.

Lösung: E: $-x_1+x_2 = 5$; Spurpunkte $S_1(-5|0|0)$, $S_2(0|5|0)$.



Aufgabe 17: Liegt der Punkt P(3|2|-8) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$?

Vorgehensweise: Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), Punkt P -> Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> 0 Lsg. bzw. 1 Lsg. -> $P \notin g$ bzw. Pεg.

Lösung: Punktprobe -> t=2 -> Pεg.

Aufgabe 18: Bestimme den Abstand zwischen der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und dem Punkt P(-1|-2|6)$\notin$g.

Vorgehensweise: Abstand (Lotfußpunktverfahren), Abstand (Hilfsebenenverfahren) o.ä. -> t* -> Lotfußpunkt Fεg -> d(P,g).

Lösung: t=-5 -> Lotfußpunkt F(7|6|2) -> d(P,g) =12 LE.

Aufgabe 19: Berechne den Schnittpunkt der Geraden g und h mit:

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der Schnittwinkel?

Vorgehensweise: Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u}_1$, h: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u}_2$ (PF) -> Gleichsetzen PF -> g ∩ h = {S} (1 Lsg.) -> Schnittpunkt S; Schnittwinkel $\varphi = \cos^{-1}\left(\left| \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right| / \left| \vec{u}_1 \right| \cdot \left| \vec{u}_2 \right| \right)$.

Lösung: LGS -> r=2, s=-1 -> S(-4|2|7); Schnittwinkel φ = 36,61°.

Aufgabe 20: Bestimme den Abstand zwischen den parallelen Geraden g und h mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vorgehensweise: Abstand: d(g,h) = d(P,g) (Pεh) -> Abstand (Lotfußpunktverfahren), Abstand (Hilfsebenenverfahren) o.ä. -> t* -> Lotfußpunkt Fεg -> d(P,g).

Lösung: P(10|-4|-2)εh -> r=2, [s=0] -> Lotfußpunkt F(13|0|-2)εg -> Abstand d(g,h) = d(P,g) =5 LE.

Aufgabe 21: Bestimme die Lage der Geraden g und h mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie gegebenenfalls Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand der Geraden zueinander.

Vorgehensweise: Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u}$ (PF) -> Gleichsetzen PF -> a) g ∩ h = {} (0 Lsg.) -> g || h ($\vec{u} = k\vec{v}$) oder windschief (sonst), b) g ∩ h = {S} (1 Lsg.) -> Schnittpunkt S; Schnittwinkel $\varphi = \cos^{-1}\left(\left|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right| \Big/ \left|\vec{u}_1\right| \cdot \left|\vec{u}_2\right|\right)$ bzw. Abstand: a) d(g,h) = d(P,g) (g || h, Pεg), b) d(g,h) = d(P,E_H) (g, h windschief; Pεh, E_H als Hilfsebene durch g und parallel zu h).

Lösung: LGS -> 0 Lsg. -> g, h windschief; Abstand: d(g,h) = 3 LE.

Aufgabe 22: Liegt der Punkt P(-6|5|-25) auf der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Vorgehensweise: Punkt P(p_1|p_2|p_3), Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) -> Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ -> 0 Lsg. bzw. 1 Lsg. -> P∉g bzw. Pεg.

Lösung: LGS -> r=2, s=-3 -> Pεg.

Aufgabe 23: Liegt der Punkt P(2|-3|5) auf der Ebene E: $4x_1 – 2x_2 – 2x_3 = 10$? Wenn nicht, bestimme den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

Vorgehensweise: Punkt P(p_1|p_2|p_3), Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) -> Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = d$ -> wahre Aussage: Pεg bzw. falsche Aussage: P∉g; Abstand: d(P,E) = $\left|\vec{n} \cdot \vec{OP} - d\right| \Big/ \left|\vec{n}\right|$ (HNF).

Lösung: Punktprobe: 12=10 falsch -> P∉g; Abstand: d(P,E) = 49/40 = 1,225 LE.

Aufgabe 24: Wie liegen Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und Ebene E: $2x_1 + x_2 – 3x_3 = 12$ zueinander?

Vorgehensweise: Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) -> Einsetzen PF in KF -> a) g ∩ E = {} (0 Lsg.) -> g || E, b) g ∩ E = {S} (1 Lsg.) -> Schnittpunkt S, c) g ∩ E = g (unendlich viele Lsg.) -> g auf/in E (g⊂E).

Lösung: Einsetzen PF in KF -> t=-3,6 -> Schnittpunkt S(-12,8|-13,4|-17).

Aufgabe 25: Zeige, dass Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und Ebene E: $4x_1 - 3x_3 = 3$ zueinander parallel liegen. Bestimme den Abstand zwischen Gerade und Ebene.

Vorgehensweise: Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) -> $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ -> g || E.

Lösung: $\vec{u}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ -> g || E -> d(g,E) = 12 LE.

Aufgabe 26: Berechne die (Parameter-) Gleichung der Schnittgeraden und die Größe des Schnittwinkels zwischen den Ebenen E und F mit:

E: $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 12$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Ebenen E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (PF), F: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) -> Einsetzen PF in KF -> E ∩ F = g (unendlich viele Lsg, 1 Parameter) -> Schnittgerade g; Schnittwinkel: $\varphi = \cos^{-1}\left(\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right| \Big/ \left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right| \right)$.

Lösung: Einsetzen PF in KF -> Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; Schnittwinkel: φ = 77,05°.

Aufgabe 27: Berechne die (Parameter-) Gleichung der Schnittgeraden und die Größe des Schnittwinkels zwischen den Ebenen E und F mit:

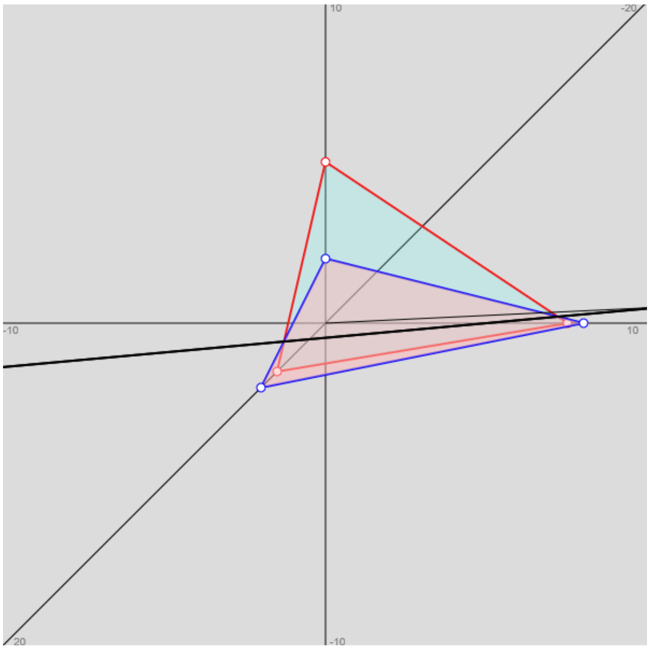
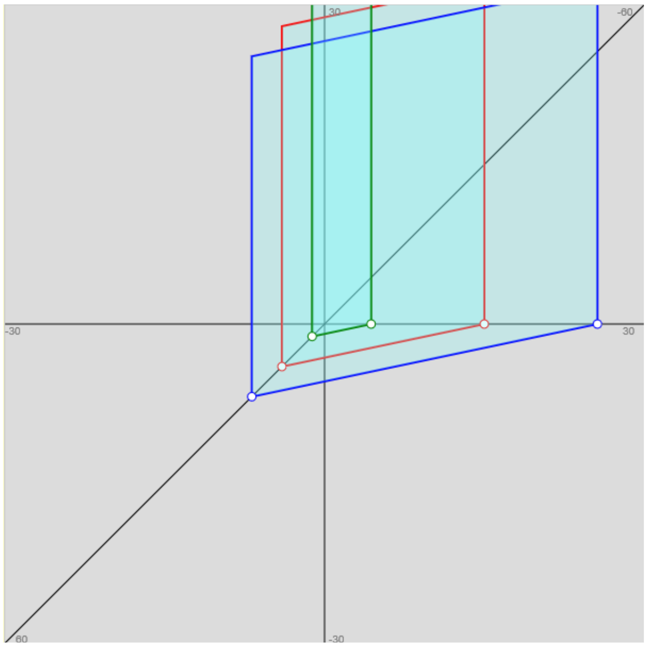
E: $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$ und F: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$.

Zeichne Ebenen und Schnittgerade in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Vorgehensweise: Ebenen E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$, F: $ex_1+fx_2+gx_3 = h$ (KF) -> LGS -> E ∩ F = g (unendlich viele Lsg, 1 Parameter) -> Schnittgerade g; Schnittwinkel: $\varphi = \cos^{-1}\left(\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right| \Big/ \left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right| \right)$.

Lösung: LGS -> Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schnittwinkel: φ = 31,83°;

Ebene E -> Spurpunkte $S_1(3|0|0)$, $S_2(0|7,5|0)$, $S_3(0|0|5)$; Ebene F -> Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|8|0)$, $S_3(0|0|2)$.

Aufgabe 28: Bestimme die zur Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 11.25 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 7.5 \\ -7 \end{pmatrix}$ parallelen Ebenen mit Abstand 5 von E. Zeichne die Ebenen in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Vorgehensweise: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF); Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF), Abstand D -> F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - |\vec{n}|D$,

F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + |\vec{n}|D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$).

Lösung: Ebene E (PF) -> E: $15x_1+8x_2 = 120$ -> Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit: $|\vec{n}| = 17$; Ebene E -> parallele Ebenen mit Abstand 5 -> F_1: $15x_1 + 8x_2 = 205$, F_2: $15x_1 + 8x_2 = 35$;
Ebene E -> Spurpunkte $S_1(8|0|0)$, $S_2(0|15|0)$; Ebene F_1 -> Spurpunkte $S_1(41/3|0|0)$, $S_2(0|205/8|0)$; Ebene F_2 -> Spurpunkte $S_1(7/3|0|0)$, $S_2(0|35/8|0)$.

Aufgabe 29: Werden die Punkt P(4|2|-3) und Q(-2|-1|5) durch die Ebene E: $4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 30$ getrennt oder liegen sie auf derselben Seite der Ebene?

Vorgehensweise: Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF), Punkt P -> Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 > / = / < d$.

Lösung: Ebene E -> Punkt P: -12 < 30, Punkt Q: 27 < 30 -> Punkte P, Q auf derselben Seite der Ebene E.

Aufgabe 30: Berechne die Punkte auf der x_1-, x_2-, x_3-Achse, die zur Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$ den Abstand 4 haben. Zeichne Ebene und errechnete Achsenpunkte in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

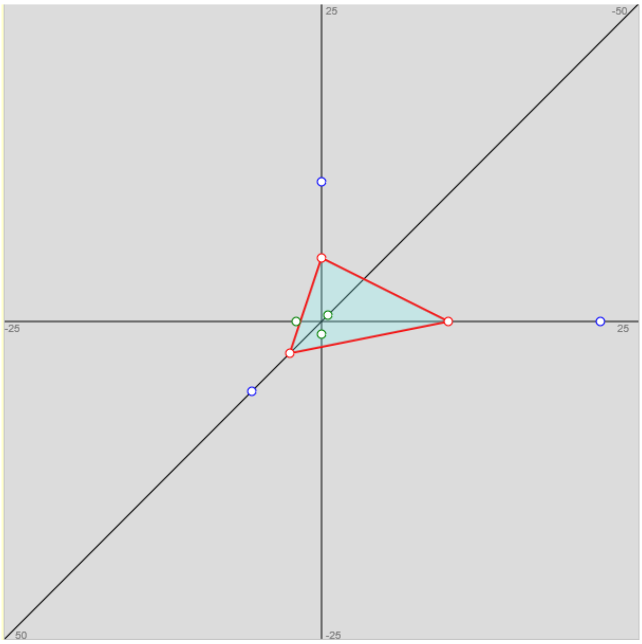
Vorgehensweise: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF),

Abstand D -> F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \left|\vec{n}\right| D$,

F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \left|\vec{n}\right| D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D (F_1 || F_2 || E) -> Achsenpunkte als Spurpunkte der parallelen Ebenen F_1, F_2.

Lösung: Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit:

$\left|\vec{n}\right| = 3$; Ebene E -> parallele Ebenen mit Abstand 4 ->
F_1: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 22$, F_2: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$;
Ebene E -> Spurpunkte $S_1(5|0|0)$, $S_2(0|10|0)$, $S_3(0|0|5)$;
Ebene F_1 -> Achsenpunkte $P_{11}(11|0|0)$, $P_{12}(0|22|0)$, $P_{13}(0|0|11)$; Ebene F_2 -> Achsenpunkte $P_{21}(-1|0|0)$, $P_{22}(0|-2|0)$, $P_{23}(0|0|-1)$.



Aufgabe 31: Bestimme den Punkt F auf der Ebene E: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19$, der vom Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems den kleinsten Abstand hat.

Vorgehensweise: Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF), Punkt O -> Lotgerade h: $\vec{x} = t\,\vec{n}$ -> Schnittpunkt E ∩ h = {F} als Lotfußpunkt auf E bzgl. O.

Lösung: Ebene E, Ursprung O -> Punkt F(3|4|2)εE mit Abstand d(O,E) = $\left|\overrightarrow{OF}\right| = \sqrt{29}$ LE.

Aufgabe 32: Wie lautet die (Parameter-) Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt (11|-4|7) parallel zur Ebene E: $4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 28$ verläuft und die x_1-Achse schneidet? Wie groß ist der Abstand zwischen Ebene und Gerade?

Vorgehensweise: Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF), Punkt P -> Ebene F: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ durch Punkt P mit: F || E -> Spurpunkt von F: Q(25|0|0) -> Gerade g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ || E, g⊂F;
g || E -> d(g,E) = d(P,E) = $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP} - d\right| / \left|\vec{n}\right|$ (Hessesche Normalform).

Lösung: Ebene E, Punkt P-> Ebene F: $4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 100$ -> Q(25|0|0) -> g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$;

d(g,E) = d(P,E) = 8 LE.

Aufgabe 33: Zeige, dass sich die drei Ebenen

E_1: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -11$, E_2: $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9$, E_3: $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -13$.

in einer Schnittgeraden g schneiden. Wie lautet die (Parameter-) Gleichung dieser Schnittgeraden?

Vorgehensweise: Ebenen E_1, E_2, E_3 (KF) -> LGS -> E_1 ∩ E_2 ∩ E_3 = g (unendlich viele Lsg, 1 Parameter) -> Schnittgerade g.

Lösung: LGS -> Schnittgerade g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abkürzungen: ⊥ = orthogonal, || = parallel, FE = Flächeneinheiten, HNF = Hessesche Normalform, KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheiten, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung/en, NF = Normalenform, PF = Parameterform, ^{T} = transponiert.

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Grundaufgaben der Vektorrechnung I / Aufgaben 453-485