Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Grundaufgaben zur Vektorrechnung III

Einleitung: Elemente der Vektorrechnung im dreidimensionalen reellen kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem sind Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$, Ortsvektoren $p^{->} = OP^{->} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$, Differenzvektoren $PQ^{->} = OQ^{->}–OP^{->}$, Geraden g: $x^{->} = a^{->} + tu^{->}$ (PF, Stützvektor $a^{->}$, reeller Parameter t, Richtungsvektor $u^{->}$), Ebenen E: $x^{->} = b^{->} + tv^{->} + sw^{->}$ (PF, Stützvektor $b^{->}$, reelle Parameter r, s, Richtungsvektoren $v^{->}$, $w^{->}$), E: $n^{->}(x^{->}-p^{->}) = 0$ (NF, Normalenvektor $n^{->}$), E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF, Normalenvektor $n^{->} = (a\ b\ c)^T$). Geraden und Ebenen sind Linearkombinationen aus Vektorvielfachen $tp^{->}$ und Vektorsummen $p^{->}+q^{->}$ mit Nullvektor $0^{->} = (0\ 0\ 0)^T$, Gegenvektor $-p^{->}$ zu $p^{->}$ oder Mitte $0,5(p^{->}+q^{->})$. Vektoren haben Richtung und Länge, der Betrag eines Vektors ist: $|p^{->}| = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$, der Einheitsvektor berechnet sich als $p_0^{->} = p^{->}/|p^{->}|$. Daneben sind für Vektoren $p^{->} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$ und $q^{->} = (q_1\ q_2\ q_3)^T$ das Skalarprodukt $p^{->}\cdot q^{->} = p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$, das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $p^{->}\times q^{->} = (p_2q_3–p_3q_2\ p_3q_1–p_1q_3\ p_1q_2–p_2q_1)^T$ und das Spatprodukt $(p^{->}\times q^{->})\cdot r^{->}$ definiert.
Die Vektorrechnung kreist um die Konstruktion von Geraden und Ebenen, um die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (Schnittpunkte, Schnittgeraden, Schnittwinkel, Abstände), um Abbildungen (Verschiebungen von Punkten, Geraden und Ebenen, Streckungen, Projektionen, Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen u.a.).

Konstruktionen

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AB} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1} + s\vec{u_1}$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u_1}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{u} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A ($g \parallel g_1$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1} + s\vec{u_1}$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Lotfußpunkt $F \in g_1$ mit: $\vec{AF} \cdot \vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AF}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AF} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp g_1$)
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u}$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $\vec{x} = \vec{OM} + t\vec{u}$ (PF) (k || g || h)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\quad b\quad c)^T$) (KF),Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{n} = \vec{a} + t\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp E$)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF)

Punkte $A(a_1\|a_2\|a_3)$, $B(b_1\|b_2\|b_3)$, $C(c_1\|c_2\|c_3)$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt $P \notin g$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P ($E \perp g$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u_1} + t\,\vec{u_2}$ (PF); LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1\|r_2\|r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{a_1}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0\|0\|0) \notin E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \lvert\vec{n}\rvert D$, F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \lvert\vec{n}\rvert D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkte A, B	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)

Ebenenkonstruktionen

E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) -> LGS: $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$ -> E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (PF)
E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \;\; b \;\; c)^T$) (KF) -> E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (HNF)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Lagebeziehungen

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Geraden
Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3)$	Abstand: d(P,Q) = $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

Lage Punkt – Punkt

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Geraden
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Ebene
Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse)
Ebene E: $bx_2 + cx_3 = d$ $b \neq 0$, $c \neq 0$	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1-Achse
Ebene E: $ax_1 + cx_3 = d$ $a \neq 0$, $c \neq 0$	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_2-Achse
Ebene E: $ax_1 + bx_2 = d$ $a \neq 0$, $b \neq 0$	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) $S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_3-Achse
Ebene E: $ax_1 = d$ $a \neq 0$	$S_1(d/a\|0\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) -> Ebene parallel zur x_2- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene
Ebene E: $bx_2 = d$ $b \neq 0$	$S_2(0\|d/b\|0)$ (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene
Ebene E: $cx_3 = d$ $c \neq 0$	$S_3(0\|0\|d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_2-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ -> 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right\| / \left\|\vec{u}_1\right\| \cdot \left\|\vec{u}_2\right\|\right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt $P(p_1\|p_2\|p_3)$ Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v}$ -> 1 Lösung: $P \varepsilon g$; keine Lösung: $P \notin g$ b) Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = d$ -> wahre Aussage: $P \varepsilon g$; falsche Aussage: $P \notin g$ c) Abstand: d(P,E) = d(P, F) mit F als Lotfußpunkt zu P auf Ebene E (Konstruktion des Lotfußpunkts über Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}$ mit: $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$)

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF) Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: $g \parallel E$ b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt $A \varepsilon g$, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\|\vec{n} \cdot \vec{u}\right\| / \left\|\vec{n}\right\| \cdot \left\|\vec{u}\right\|\right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (PF) bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E_1 in die Ebene E_2 (KF): bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ -> unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parametern):: Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$ b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1,E_2) = d(A,E_1)$ mit Punkt $A \varepsilon E_2$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right\| / \left\|\vec{n}_1\right\| \cdot \left\|\vec{n}_2\right\|\right)$

Lage Ebene – Ebene

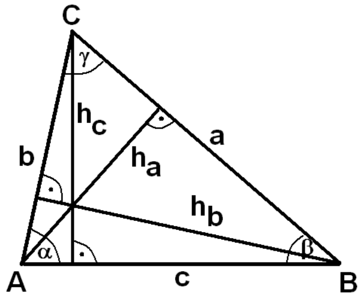
Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ -> g || E b) $\vec{u} = k\,\vec{n}$ -> g $\perp$ E

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

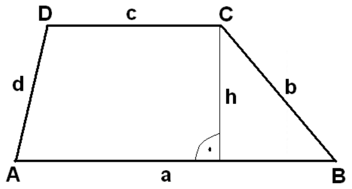
Voraussetzung	Lage
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\,\vec{v_1} + s\,\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\,\vec{v_2} + u\,\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) $\vec{n_1} = k\,\vec{n_2}$ -> E_1 || E_2 b) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ -> $E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

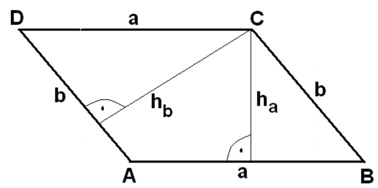
Geometrie

Formeln	
$\vec{AB} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB} \neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
$c = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AC}\right\|$, $a = \left\|\vec{BC}\right\|$ (Seiten), $u = \left\|\vec{AB}\right\| + \left\|\vec{AC}\right\| + \left\|\vec{BC}\right\|$ (Umfang)	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{AC}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{\left\|\vec{AC}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
$h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB} \times \vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$, $h_b = \frac{\left\|\vec{AB} \times \vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AC}\right\|}$, $h_c = \frac{\left\|\vec{AC} \times \vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ usw. (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\vec{BC} \cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\vec{AC} \cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\vec{AB} \cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB} \times \vec{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB} \times \vec{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AC} \times \vec{BC}\right\|$ (Fläche)	

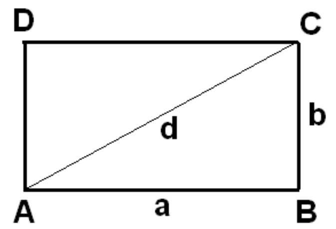
Dreiecke

Formeln	
$\vec{AB} = k\,\vec{CD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k\,\vec{AD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)	
$a = \left\|\vec{AB}\right\|,\ b = \left\|\vec{BC}\right\|,\ c = \left\|\vec{CD}\right\|,\ d = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = \left\|\vec{AB}\right\| + \left\|\vec{BC}\right\| + \left\|\vec{CD}\right\| + \left\|\vec{AD}\right\|$ (Umfang)	
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, $\left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$, $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{AD}\right\|},\ \cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|},\ \cos\gamma = -\frac{\vec{BC}\cdot\vec{CD}}{\left\|\vec{BC}\right\| \cdot \left\|\vec{CD}\right\|},\ \cos\delta = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{CD}}{\left\|\vec{AD}\right\| \cdot \left\|\vec{CD}\right\|}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360°
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ => h = d(C, g_{AB}) bzw. $h = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ (Höhe) $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$ => h = d(D, g_{BC}) bzw. $h = \frac{\left\|\vec{BC}\times\vec{BD}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$ (Höhe)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ => $A = \frac{a+c}{2}h$ (Fläche) $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$ => $A = \frac{b+d}{2}h$ (Fläche) $A = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\|}{2} + \frac{\left\|\vec{AC}\times\vec{AD}\right\|}{2}$ (Fläche)	

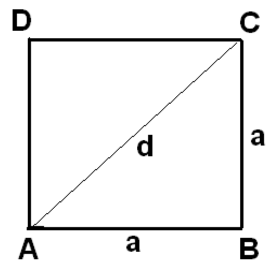
Trapeze

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$ => Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD}$ => Parallelogramm	
$a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|,\ b = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = 2\left\|\vec{AB}\right\| + 2\left\|\vec{BC}\right\|$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{AD}\right\|},\ \cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AD}\right\|}$ (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD}\cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|$ (Fläche)	

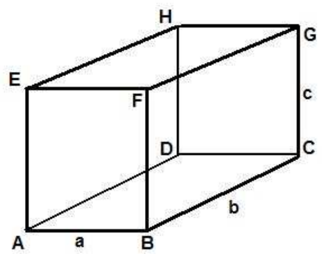
Parallelogramme

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = 0$ => Rechteck $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$ => Rechteck	
$a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|$, $b = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = 2\left\|\vec{AB}\right\| + 2\left\|\vec{BC}\right\|$ (Umfang)	
$A = \left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|$ bzw. $A = \left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

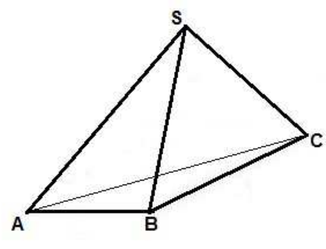
Rechtecke

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = 0$, $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$, $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Quadrat	
$a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = 4\left\|\vec{AB}\right\|$ (Umfang)	
$A = \left\|\vec{AB}\right\|^2$ bzw. $A = \left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

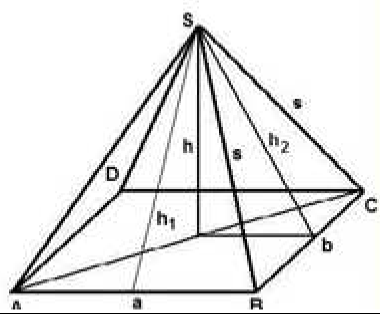
Quadrate

Formeln	
$a = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AD}\right\|$, $c = \left\|\vec{AE}\right\|$ (Kanten); a=b=c (Würfel)	
G = ab (Grundfläche, Deckfläche); G = a^2 (Würfel) M = (2a+2b)c (Mantelfläche) O = 2G + M = 2(ab+ac+bc) (Oberfläche); O = $6a^2$ (Würfel)	
V = abc (Volumen); V = a^3 (Würfel)	

Quader (Würfel)

Formeln	
$G = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{AC}\cdot\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{BC}\cdot\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\cdot\times\vec{BC}\cdot\right\|$ (Grundfläche) $M = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{AS}\cdot\right\| + \frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\cdot\times\vec{AS}\cdot\right\| + \frac{1}{2}\left\|\vec{BC}\cdot\times\vec{BS}\cdot\right\|$ (Mantelfläche) O = G + M (Oberfläche)	
h = d(S, E_{ABC}) (Höhe, E_{ABC} als Grundebene, Hessesche Normalform) V = Gh/3 (Volumen) $V = \frac{1}{6}(\vec{AB}\cdot\times\vec{AC})\cdot\vec{AS}$	

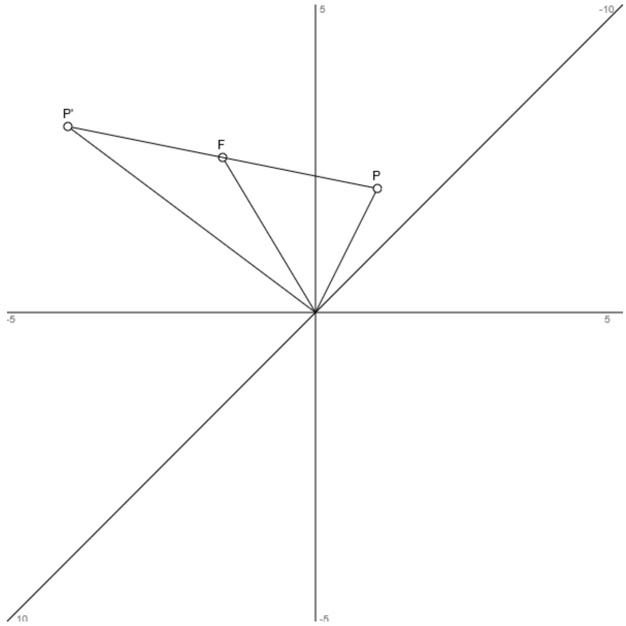
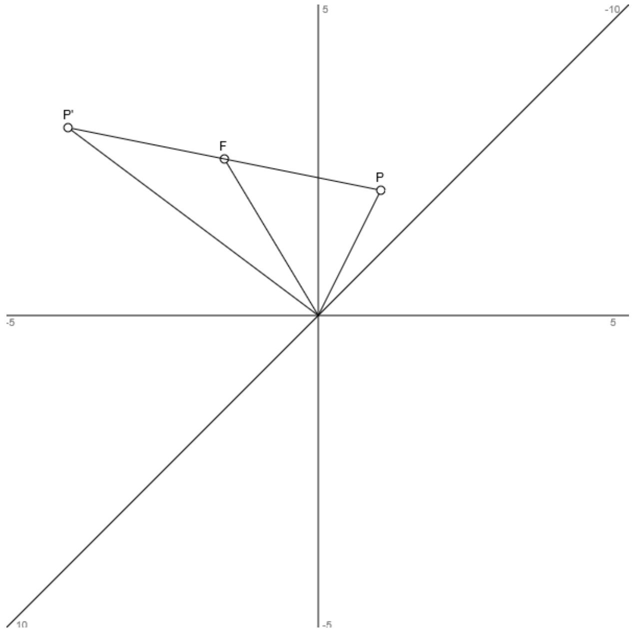
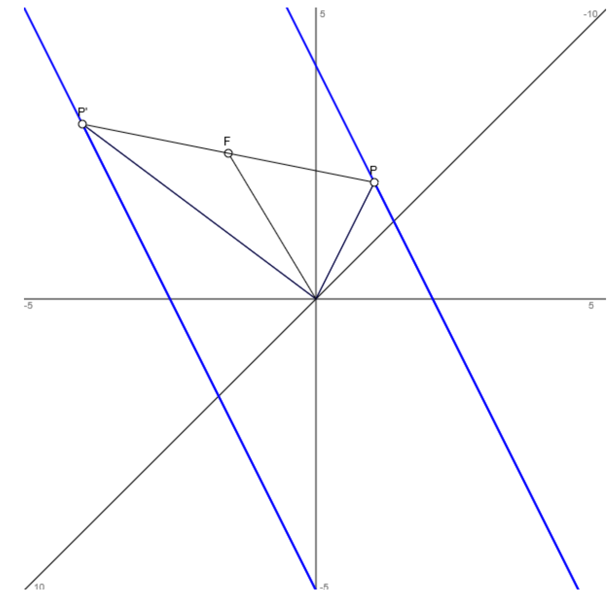
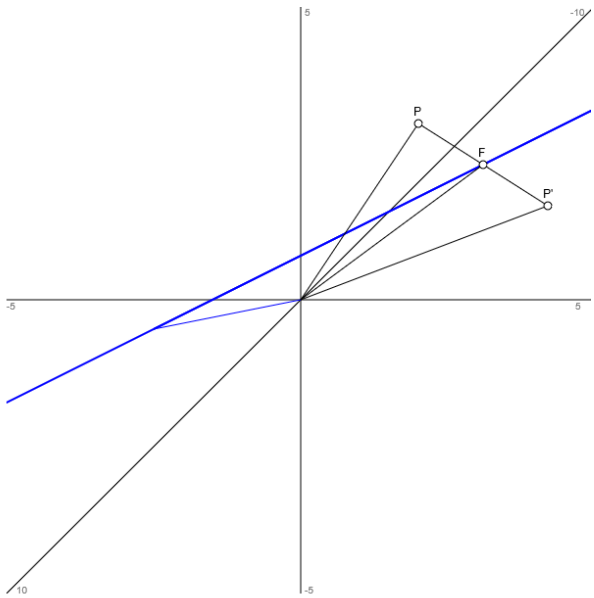
Dreieckpyramiden

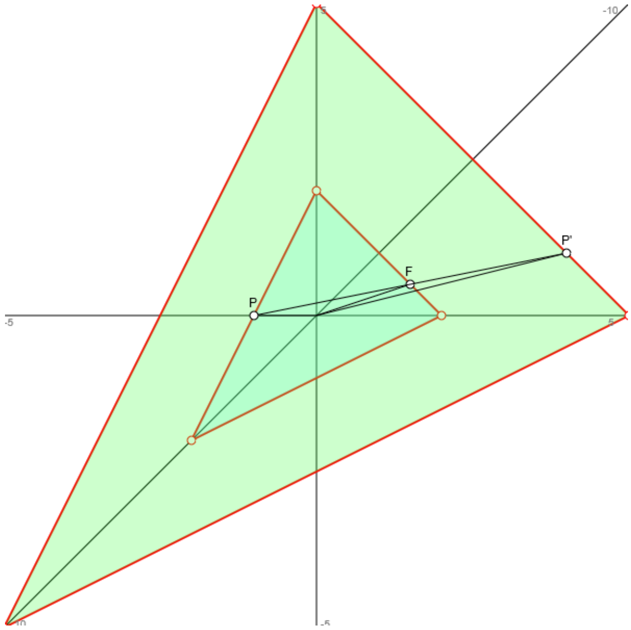
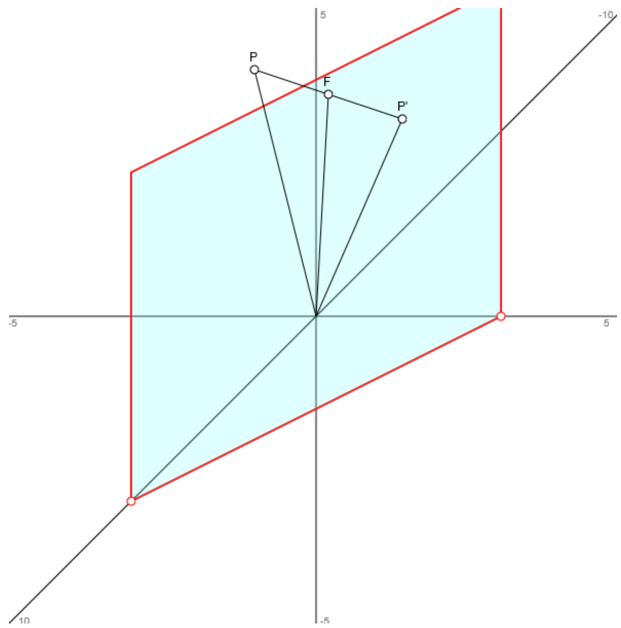
Formeln	
$a = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Grundkanten)	
h = d(S, E_{ABCD}) (Höhe, E_{ABCD} als Grundebene, Hessesche Normalform) $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$, $h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ (Seitenhöhen) $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$ (Seitenkanten)	

<table>
<tr><td>$G = \left|\vec{AB} \times \vec{AD}\right|$ (Grundfläche)
$M = \left|\vec{AB} \times \vec{AS}\right| + \left|\vec{AD} \times \vec{AS}\right|$ (Mantelfläche)
O = G + M (Oberfläche)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>V = Gh/3 (Volumen)
$V = \frac{1}{3}(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AS}$</td></tr>
</table>

Parallelogrammpyramiden

Spiegelungen

<table>
<tr><th>Punktspiegelung</th><th>Spiegelung eines Punktes</th></tr>
<tr><td>Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘:
</td><td>Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘:
</td></tr>
<tr><td>Punktspiegelung einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{u}$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten Geraden g‘: $\vec{x} = \vec{OP'} + t\,\vec{u}$ (g || g‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes Pεg (Stützvektor der Geraden g) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εg‘ (Stützvektor der Geraden g‘):
</td><td>Spiegelung eines Punktes P an Spiegelgerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ über den Lotfußpunkt Fεg mit: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$ (Orthogonalitätsbedingung bei laufendem Punkt F_tεg, Verfahren mit Hilfsebene E_H: $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{u} \cdot \vec{OP}$) zum gespiegelten Punkt P‘:
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Punktspiegelung einer <u>Ebene</u> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten E‘: $ax_1+bx_2+cx_3 = d'$ (E || E‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes PεE (Stützvektor der Ebene E) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εE‘ (Stützvektor der Ebene E‘) und vermöge der Identitäten: $\vec{n}\cdot\vec{OP} = d$, $\vec{n}\cdot\vec{OP'} = d'$, Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

</td>
<td>Spiegelung eines <u>Punkt</u>es P an Spiegelebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ über den Lotfußpunkt FεE (als Schnittpunkt von Lotgeraden h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ und Ebene E, Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$) zum gespiegelten Punkt P‘:

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Spiegelung: P -> F -> P‘
Spiegelformel: $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\vec{PF} = \vec{OF} + \vec{PF} = 2\vec{OF} - \vec{OP}$</td>
</tr>
</table>

Spiegelungen mit Punkten

Aufgabe 1: Der Punkt A(2|-1|3) liegt auf der Geraden g, die in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft. Bestimme eine Geradengleichung.

Vorgehensweise: Stützvektor der Geraden ist $\vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$; die Geradengleichung ermittelt sich als: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ mit Parameter t.

Lösung: Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(-4|5|-10), B(4|2|15). Bestimme eine Geradengleichung.

Vorgehensweise: Stützvektor der Geraden ist $\vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$; die Geradengleichung ermittelt sich als: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ mit Parameter t.

Lösung: Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: Die drei Punkte A(5|1|1), B(5|5|4), C(1|1|4) bilden das Dreieck ΔABC.
a) Durch die Ecke A und den Mittelpunkt der Strecke zwischen B und C verläuft die Gerade g. Bestimme eine Geradengleichung.
b) Berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC. Welche Besonderheit weist das Dreieck auf?

Vorgehensweise: a) Mitte M mit: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, Gerade g durch A und M: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AM}$; b) Dreieck ΔABC -> Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ -> Seitenlängen $|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$, $|\vec{BC}|$ -> Gleichschenkligkeit oder Rechtwinkligkeit o.a. des Dreiecks.

Lösung: a) Mitte M(3|3|4) -> Geradengleichung: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) Differenzvektoren: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> Seitenlängen: $|\vec{AB}|$ = 5, $|\vec{AC}|$ = 5, $|\vec{BC}|$ = 4√2 -> Dreieck ΔABC gleichschenklig mit Umfang: u = 2·$|\vec{AB}|$ +$|\vec{BC}|$ = 2·5 + 4√2 = 10 + 4√2 ≈ 15,66 LE, mit Flächeninhalt: A = $\frac{1}{2}|\vec{BC}| \cdot |\vec{AM}|$ = $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{34}$ ≈ 11,66 FE.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zeige, dass der Punkt P(5|6|3) auf der Geraden liegt, der Punkt Q(5|-3|-5) hingegen nicht.

Vorgehensweise: Geradengleichung: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$, Punktprobe -> Beziehungen $\vec{OP} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$, $\vec{OQ} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ führen auf eine Lösung für t (Pεg) oder auf einen Widerspruch (Q∉ g).

Lösung: $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> t = 2 -> Pεg; $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> 5=5, t = -1, t = -2 -> Widerspruch -> Q∉ g.

Aufgabe 5: Liegen die Punkte A(-4|1|2), B(-2|0|4), C(2|-2|8) auf einer Geraden g?

Vorgehensweise: Stützvektor der Geraden g ist $\vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$; die Geradengleichung ermittelt sich als: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ mit Parameter t; Punktprobe von C bzgl. g beantwortet die Fragestellung. Alternativ gilt: Die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ müssen Vielfache voneinander sein.

Lösung: Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, Punktprobe $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> t = 3 -> A, B, Cεg.

Aufgabe 6: Wie liegen die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h zueinander? Dabei gilt:

a) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$; c) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$; d) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g \cap h$ mit Parametern r, s als Variablen -> 1) unendlich viele Lösungen: g = h, 2) eindeutige Lösung: Schnittpunkt, 3) keine Lösung, parallele Richtungsvektoren: parallele Geraden, g ≠ h, 4) keine Lösung, keine Parallelität: windschiefe Geraden g, h.

Lösung: a) Schnittpunkt S(1|5|3); b) g = h; c) g || h, g ≠ h; d) g, h windschief.

Aufgabe 7: Die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneiden sich. Berechne Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ.

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g \cap h$ mit Parametern r, s als Variablen -> eindeutige Lösung -> Schnittpunkt S; Schnittwinkel: cos(φ) = $\frac{|u_1 \cdot u_2|}{|u_1| \cdot |u_2|}$ mit Richtungsvektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ der Geraden g, h.

Lösung: Schnittpunkt S(0|7|4) (r = 2, s = 1), Schnittwinkel φ = 17,34°.

Aufgabe 8: Zeige, dass sich die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht schneiden.

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g \cap h$ mit Parametern r, s als Variablen -> eindeutige Lösung -> Schnittpunkt S; Skalarprodukt: $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ -> Orthogonalität mit Richtungsvektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ der Geraden g, h.

Lösung: Schnittpunkt S(-1|2|-1) (r = 1, s = -1); $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ -> Orthogonalität.

Aufgabe 9: Bestimme die Spurpunkte der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems.

Vorgehensweise: Gerade g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ -> Geradenkomponenten $x_1 = a_1 + tu_1$, $x_2 = a_2 + tu_2$, $x_3 = a_3 + tu_3$ -> je eine Komponente Null setzen, t ausrechnen und Einsetzen in die Geradengleichung -> Spurpunkt S_{12}, S_{13}, S_{23} auf x_1-x_2-, x_1-x_3-, x_2-x_3-Grundebenen.

Lösung: Spurpunkte: $x_1 = 0$ -> t = 2 -> S_{23}(0|5|2); $x_2 = 0$ -> t = -2 -> S_{13}(10|0|-3); $x_3 = 0$ -> t = 1 -> S_{12}(4|3|0).

Aufgabe 10: Gegeben sind die Punkte A(1|2|0), B(2|0|-4), C(0|-2|-3). Bestimme die Gleichung einer Ebene E, die die Punkte A, B, C enthält.

Vorgehensweise: Stützvektor der Ebene ist $\vec{OA}$, Spannvektoren sind $\vec{u_1} = \vec{AB}$, $\vec{u_2} = \vec{AC}$; die Ebenengleichung ermittelt sich als: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{u_1} + s\,\vec{u_2}$ mit Parametern r, s.

Lösung: Ebenengleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (PF).

Aufgabe 11: Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(-5|0|2).

a) Zeige, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.
b) Konstruiere eine zur Geraden g parallele Gerade durch den Punkt P.
c) Konstruiere eine Ebene E, die die beiden parallelen Geraden g und h enthält.

Vorgehensweise: Geradengleichung: g: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{u}$, Punktprobe -> Beziehung $\vec{OP} = \vec{OA} + r\,\vec{u}$ führt auf einen Widerspruch (P$\notin$ g); Geradengleichung: g: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{u}$, Punkt P$\notin$ g -> parallele Gerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + s\,\vec{u}$; Geradengleichung: g: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{u}$, Punkt P$\notin$ g -> Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{u} + s\,\vec{AP}$.

Lösung: a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ -> -5=-2 -> Widerspruch -> P$\notin$ g; b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit g || h; c) Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (PF).

Aufgabe 12: Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E mit:

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sich Gerade g und Ebene E im Punkt S(2|5|-1) schneiden.

Vorgehensweise: Geradengleichung: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$, Punktprobe -> Beziehung $\vec{OS} = \vec{OA} + t\,\vec{u}$ führt auf eine Lösung für t (Sεg); Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \vec{OB} + r\,\vec{u_1} + s\,\vec{u_2}$, Punktprobe -> Beziehung $\vec{OS} = \vec{OB} + r\,\vec{u_1} + s\,\vec{u_2}$ führt auf Lösungen für r, s (SεE).

Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> t = 2 -> Sεg; $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ -> r = 1, s = 1 -> SεE -> S ist Schnittpunkt.

Aufgabe 13: Berechne den Schnittpunkt S von Gerade g und Ebene E mit:

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g \cap E$ mit Parametern r, s, t als Variablen -> eindeutige Lösung -> Schnittpunkt S.

Lösung: Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ -> r = -2, s = 1, t = -1 -> Geradengleichung g -> $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-4\end{pmatrix}$ -> Schnittpunkt S(-4|1|-4).

Aufgabe 14: Zeige, dass die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ die Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

Vorgehensweise: Geradengleichung: g: $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+t\,\vec{u}$, Ebenengleichung: E: $\vec{x}=\overrightarrow{OB}+r\,\vec{u}_1+s\,\vec{u}_2$, Skalarprodukte: $\vec{u}_1\cdot\vec{u}=0$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}=0$ -> Orthogonalität von Gerade und Ebene.

Lösung: Skalarprodukte: $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=4-2-2=0$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=1-4+3=0$ -> g $\perp$ E.

Aufgabe 15: Berechne die Spurpunkte der Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Ebene E -> Komponenten/Koordinaten x_1, x_2, x_3 mit jeweils zwei Komponenten als Null gesetzt -> drei lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und den Ebenenparametern r, s -> jeweilige Lösung r, s führt durch Einsetzen in die Ebenengleichung E auf die Spurpunkte S_1, S_2, S_3.

Lösung: Ebenengleichung E -> x_1 = 2-3r-2s, x_2 = -4+2r, x_3 = 5+s -> S_1: x_2 = 0, x_3 = 0 => r = 2, s = -5 => Spurpunkt S_1(6|0|0), S_2: x_1 = 0, x_3 = 0 => r = 4, s = -5 => Spurpunkt S_2(0|4|0), S_3: x_1 = 0, x_2 = 0 => r = 2, s = -2 => Spurpunkt S_3(0|0|3).

Aufgabe 16: Zeige, dass sich die Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ schneiden und bestimme eine Gleichung der Ebene E, die die zwei Geraden enthält.

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g\cap h$ mit Parametern r, s als Variablen -> eindeutige Lösung -> Schnittpunkt S -> Ebenengleichung E: $\vec{x}=\overrightarrow{OS}+r\,\vec{u}_1+s\,\vec{u}_2$ mit Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ der Geraden g, h.

Lösung: Schnittpunkt S(-1|4|-1) (r = 1, s = 2) -> Ebenengleichung E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$.

Aufgabe 17: Zeige, dass die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ den Mittelpunkt M der Strecke zwischen den Punkten A(-2|4|3) und B(2|-2|5) enthält. Bestimme eine Gleichung der Ebene E, die die Gerade und die Strecke umfasst.

Vorgehensweise: Punkte A, B -> Streckenmitte vermöge: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ -> Punktprobe Mεg ->

Lösung: Mitte zwischen den Punkten A und B als M(0|1|4); Punktprobe Mεg (r = -1) -> Ebenengleichung E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{AB}$ -> E: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18: Die drei Punkte A(3|-1|-1), B(6|2|-5), C(3|-2|4) bilden das Dreieck ΔABC.

a) Ergänze das Dreieck ΔABC zu einem Parallelogramm ABCD.

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, die das Parallelogramm ABCD enthält.

c) Zeige, dass die Gerade g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Ebene E innerhalb des Parallelogramms ABCD schneidet.

Vorgehensweise: Dreieck ΔABC -> Parallelogramm ABCD mit: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$; Punkte A, B, C -> Ebenengleichung E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ mit DεE; lineares Gleichungssystem $g \cap E$ mit Parametern r, s, t als Variablen -> eindeutige Lösung r*, s*, t* -> Schnittpunkt S mit: Schnittpunkt innerhalb des Parallelogramms (0 ≤ r*, s* ≤ 1).

Lösung: a), b) Punkte A, B, C -> D(0|-5|8), Ebenengleichung E: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; c) Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ -> r = 0,5, s = 0,2, t = 0,3 -> Schnittpunkt S(4,5|0,3|-2) liegt im Parallelogramm ABCD.

Aufgabe 19: Berechne den Abstand des Punktes P(18|-1|4) zur Geraden g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vorgehensweise: Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{PF_t} \perp \overrightarrow{u}$ mit laufendem Punkt F_tεg und Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ der Geraden -> Parameter t -> Lotfußpunkt Fεg -> Abstand d(P, g) = $\left|\overrightarrow{PF}\right|$.

Lösung: Geradengleichung g -> Punkte F_t(4+3t|1-4t|2+t) -> Orthogonalitätsbedingung $\begin{pmatrix} -14+3t \\ -4t \\ -2+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ -> t = 2 -> Lotfußpunkt F(10|-7|4) -> Abstand d(P, g) = d(P, F) = $\left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{8^2 + 6^2}$ = 10 LE.

Aufgabe 20: Gegeben sind die Geraden g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass die Geraden g und h parallel und nicht identisch sind.

b) Bestimme den Abstand zwischen den zwei Geraden.

Vorgehensweise: Lineares Gleichungssystem $g \cap h$ mit Parametern r, s als Variablen -> keine Lösung, parallele Richtungsvektoren: parallele Geraden, g ≠ h; Abstand d(g, h) = d(P, g) mit Pεg und Orthogonaliätsbedingung, d.h.: $\vec{PF_r} \perp \vec{u_1}$ mit laufendem Punkt F_rεg und Richtungsvektor $\vec{u_1}$ der Geraden g.

Lösung: a) Lineares Gleichungssystem -> g || h, g ≠h; b) Geradengleichung g, Punkt P(-4|-3|3)εh -> Orthogonalitätsbedingung -> r = 0 -> Lotfußpunkt F(-2|-2|1) -> Abstand d(g, h) = d(P, g) = d(P, F) = $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$ = 3 LE.

Aufgabe 21: Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme zu den Punkten A(0|0|7), B(1|-5|-8) und C(-4|-2|0) jeweils den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

Vorgehensweise: Im Falle der Parallelität einer Ebene E zu einer der (x_1-x_2-, x_1-x_3-, x_2-x_3-) Grundebenen des Koordinatensystems ist der Betrag der Differenz der (x_3-, x_2-, x_1-) Koordinaten von Punkt und Ebenengleichung der gesuchte Abstand.

Lösung: Abstände: d(A, E) = |7-(-4)| = 11 LE, d(B, E) = |-8-(-4)| = |-4| = 4 LE, d(C, E) = |0-(-4)| = |-4| = 4 LE.

Aufgabe 22: Gegeben seien die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(1|6|0).

a) Zeige, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene E steht.

b) Berechne den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.

Vorgehensweise: Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{u_1} + s\vec{u_2}$, Skalarprodukte: $\vec{u_1} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{u_2} \cdot \vec{n} = 0$ -> Orthogonalität von Vektor und Ebene; Lotgerade l: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ -> Schnittpunkt F zwischen Lotgerade l und Ebene E als Lotfußpunkt -> Abstand d(P, E) = d(P, F) = $\left|\vec{PF}\right|$.

Lösung: a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$ -> $\vec{n} \perp$ E; b) Punkt P(1|6|0) -> Lotgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ -> lineares Gleichungssystem $g \cap E$ -> t = 1 -> Lotfußpunkt F(2|4|3) -> Abstand d(P, E) = d(P, F) = $\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ LE.

Aufgabe 23: Für die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist deren Parallelität festzustellen und deren Abstand zueinander zu bestimmen.

Vorgehensweise: Linearkombination der Spannvektoren der Ebene E als Richtungsvektor der Geraden g -> g || E; Stützvektor der Geradengleichung $\vec{OP}$ mit Punkt Pεg, zur Ebene E orthogonaler Vektor $\vec{n}$ -> Lotgerade l: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ -> Schnittpunkt F zwischen Lotgerade l und Ebene E als Lotfußpunkt -> Abstand d(g, E) = d(P, E) = d(P, F) = $\left|\vec{PF}\right|$.

Lösung: Linearkombination $\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\0\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$ -> g || E; Punkt P(-6|17|8)εg, orthogonaler Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$ -> Lotgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\17\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$ -> Lotfußpunkt F(-8|1|0) -> Abstand d(g, E) = d(P, E) = d(P, F) = $\left\|\begin{pmatrix}-2\\-16\\-8\end{pmatrix}\right\|$ = 18 LE.

Aufgabe 24: Die Punkte A(4|19|-17), B(-8|10|3), C(4|19|3) sind die Ecken des Dreiecks ΔABC.

a) Berechne den Umfang des Dreiecks ΔABC.

b) Zeige, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist, und berechne alle Winkel.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

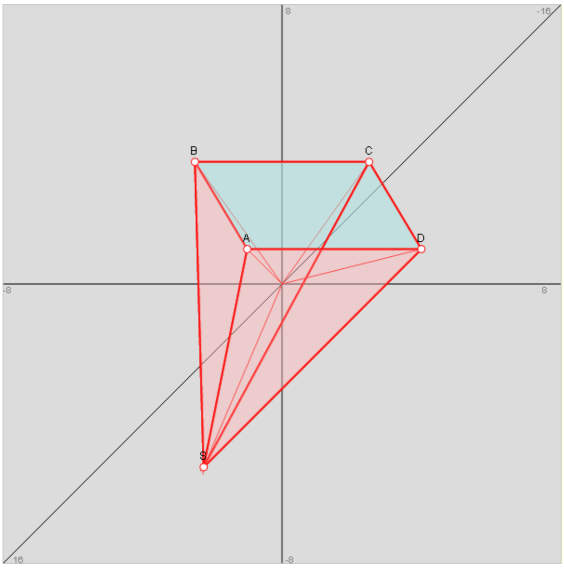
Vorgehensweise: Dreieck: Differenzvektoren und deren Beträge als Seitenlängen a, b, c -> Umfang u = a+b+c; Satz des Pythagoras $a^2+b^2 = c^2$; Winkelberechnung gemäß: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$ für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$; Flächeninhalt A = ab/2.

Lösung: a) ΔABC -> Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ -> $\left|\vec{BC}\right|$ = a = 15 LE, $\left|\vec{AC}\right|$ = b = 20 LE, $\left|\vec{AB}\right|$ = c = 25 LE -> Umfang u = 60 LE; b) $15^2+20^2 = 25^2$ -> rechter Winkel γ bei C, Winkel α = 36,87°, β = 53,13°; c) Flächeninhalt A = 15·20/2 = 150 FE.

Aufgabe 25: a) Ergänze das Dreieck ABC mit A(2|0|2), B(5|0|6), C(5|5|6) durch einen geeigneten Punkt D zu einem Parallelogramm und zeige, dass dieses Parallelogramm ein Quadrat ist.

b) Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer quadratischen Pyramide, die den Punkt S(9,5|2,5|-0,5) als Spitze hat. Zeichne die Pyramide in ein rechtwinkliges x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

c) Zeige, dass der Körper ABCDS eine regelmäßige Pyramide ist. Berechne die Länge der Höhe und der Seitenkanten der Pyramide. Berechne den Rauminhalt der Pyramide.



Vorgehensweise: Dreieck ABC -> Parallelogramm ABCD mit: $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$; Parallelogramm als Quadrat auf Grund eines rechten Winkels z.B. bei der Ecke A und auf Grund zwei gleich langer Seiten, die sich an der Ecke A treffen; Quadratmitte M, Vektor $\vec{MS}$ senkrecht auf Quadrat; Pyramidenvolumen V = Gh/3 mit G als Grundfläche und Höhe h.

Lösung: a) A, B, C -> D(2|5|2), Quadrat mit Seitenlänge 5; c) Grundflächenmitte M(3,5|2,5|4), Vektor $\vec{MS} \perp$ Grundflache -> Pyramide regelmäßig, h = $|\vec{MS}|$ = 7,5 LE, G = 5^2 = 25 FE -> V = 62,5 VE.

◄ b)

Abkürzungen: ⊥ = orthogonal, || = parallel, ε, ∉ = Element, nicht Element von, FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten, LGS = lineares Gleichungssystem, PF = Parameterform, VE = Volumeneinheiten.