

# Mathematik-Aufgabenpool

## > Aufgaben zur Vektorrechnung I

---

**Einleitung:** Die (mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Vektorrechnung (analytische Geometrie) betreffen die Aufgaben Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Konstruktion und Lage zueinander, Figuren (Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze) und Körper (Quader, Pyramiden).

**Aufgabe 1** (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Ebene

$$E: 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$$

und der Punkt  $S(3|4|7)$ .

a) Die Spurpunkte  $A$  ( $x_1$ -Achse),  $B$  ( $x_2$ -Achse),  $C$  ( $x_3$ -Achse) der Ebene  $E$  bilden zusammen mit Punkt  $S$  eine Dreieckspyramide  $ABCS$  mit Grundfläche  $ABC$  und Spitze  $S$ . Zeichne die Pyramide in ein kartesisches  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem ein.

b) Zeige, dass das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig ist und berechne dessen Flächeninhalt. Zeige weiter, dass der Vektor  $\vec{CS}$  senkrecht auf der Grundfläche steht. Berechne das Volumen der Pyramide.

c) Bestimme die Ebene  $F$  durch die Ecken  $A$ ,  $C$ ,  $S$  der Pyramidenfläche. Gib die Schnittgerade  $g$  zwischen den Ebenen  $E$  und  $F$  an.

d) Berechne den Abstand der Ebene  $F$  zur Pyramidenecke  $B$ .

**Aufgabe 2** (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Ebene

$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 10$$

und die Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Weise nach, dass die Ebene  $E$  und die Gerade  $g$  zueinander parallel sind und die Gerade nicht auf der Ebene liegt.

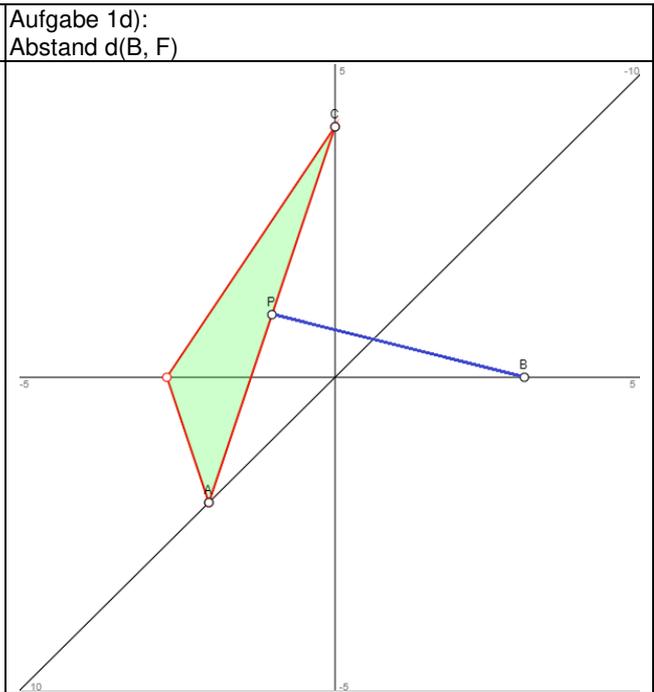
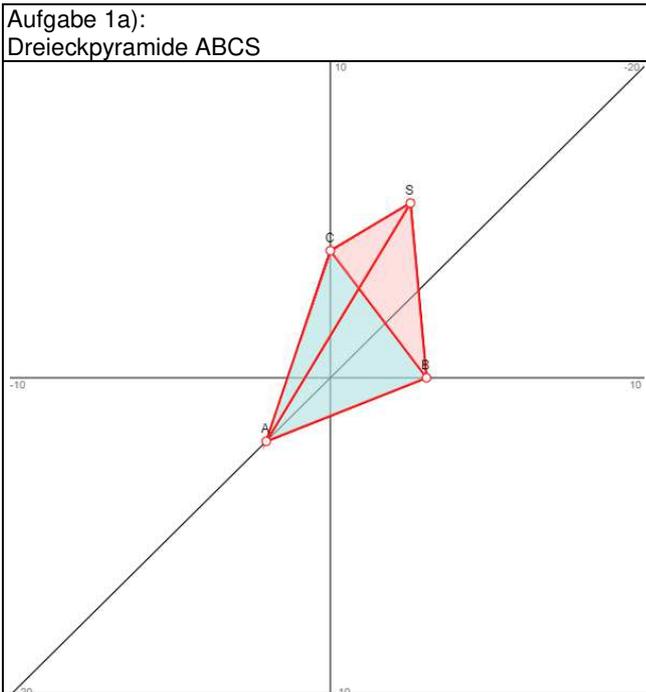
b) Gib die Gleichung einer Ebene  $F$  an, die parallel zur Ebene  $E$  liegt und die Gerade  $g$  beinhaltet. Wie groß ist der Abstand zwischen beiden Ebenen? Was lässt sich zum Abstand zwischen der Ebene  $E$  und der Gerade  $g$  sagen?

c) Zeige, dass sich die Geraden  $g$  und  $h$  im Schnittpunkt  $S(5|-4|10)$  schneiden.

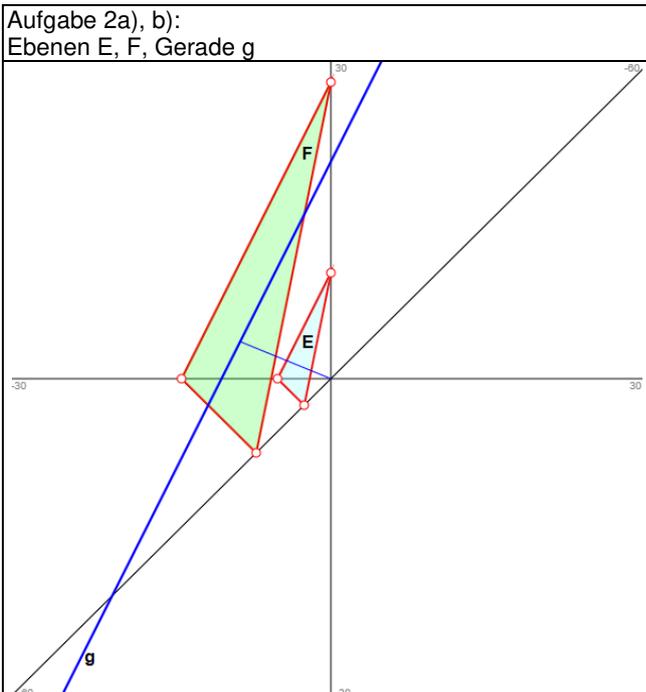
d) Die Geraden  $g$  und  $h$  spannen eine Ebene  $K$  auf. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene  $K$  an.

e) Berechne den Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Ebenen  $E$  und  $K$ .

**Lösungen:** 1b) Spurpunkte  $A(4|0|0)$ ,  $B(0|3|0)$ ,  $C(0|0|4)$   $\rightarrow |AB^{\rightarrow}| = |BC^{\rightarrow}| = 5$ ,  $|AC^{\rightarrow}| = 4\sqrt{2} \Rightarrow G = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}/2 = 2\sqrt{34} \approx 11,66$  FE,  $CS^{\rightarrow} = (3 \ 4 \ 3)^T$  = Normalenvektor der Ebene  $\rightarrow$  Orthogonalität  $\rightarrow h = |CS^{\rightarrow}| = \sqrt{34} = 5,83$  LE, Volumen  $V = Gh/3 = 22 \frac{2}{3}$  VE; c) Punkte A, C, S  $\rightarrow$  Ebene F:  $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8$   $\rightarrow$  Schnittgerade  $E \cap F = g$  als Spurgerade durch A und C  $\rightarrow g: x^{\rightarrow} = (4 \ 0 \ 0)^T + t \cdot (-4 \ 0 \ 4)^T$ ; d) Lotgerade  $h \perp F$  durch B,  $h \cap F = \{P\}$  mit  $P(2|0|2)$  und Abstand  $d(B,F) = d(B,P) = |BP^{\rightarrow}| = \sqrt{17} = 4,12$  LE.



2a)  $g \cap E \rightarrow 2 \cdot 5 - 2(-6+2t) + (6+4t) = 10 \Leftrightarrow 28 = 10 \rightarrow$  keine Lösung  $\rightarrow g \parallel E$ ,  $g \not\subset E$ ; b)  $P(5|-6|6) \in g \rightarrow E \parallel F: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 28$ , Abstand  $d(E,F) = d(E,g) = d(P,E) = 6$  LE; c)  $g \cap h = \{S\}$  mit  $S(5|-4|10)$  ( $r=1$ ,  $s=-2$ ); d) Geraden  $g, h \rightarrow$  Ebene  $E: x^{\rightarrow} = (5 \ 4 \ -10)^T + r \cdot (0 \ 2 \ 4)^T + s \cdot (1 \ 2 \ 0)^T$  (PF)  $\rightarrow E: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$  (KF); e) Ebenen E, K  $\rightarrow$  Schnittwinkel  $\varphi = 19^\circ$ .



(FE = Flächeneinheiten, KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheiten, PF = Parameterform, VE = Volumeneinheiten)