

Mathematik-Aufgabenpool

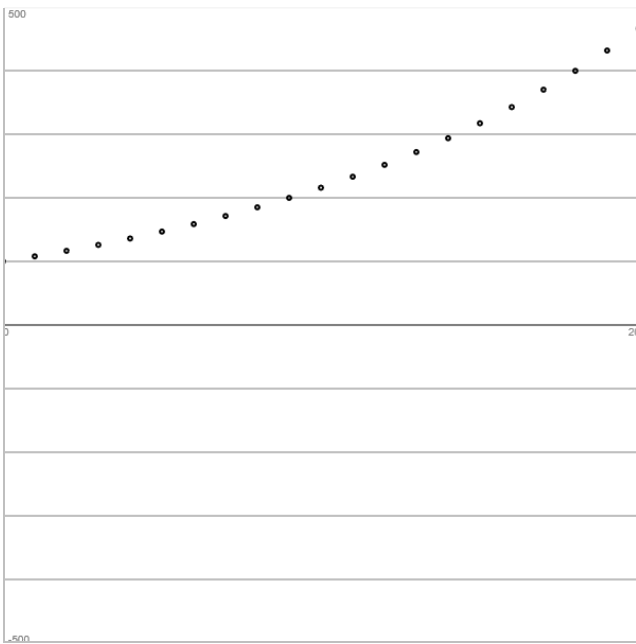
> Wachstumsprozesse II

Einleitung: Wachstumsprozesse lassen sich mathematisch beschreiben durch:

$$W_n = W_0 \cdot q^n,$$

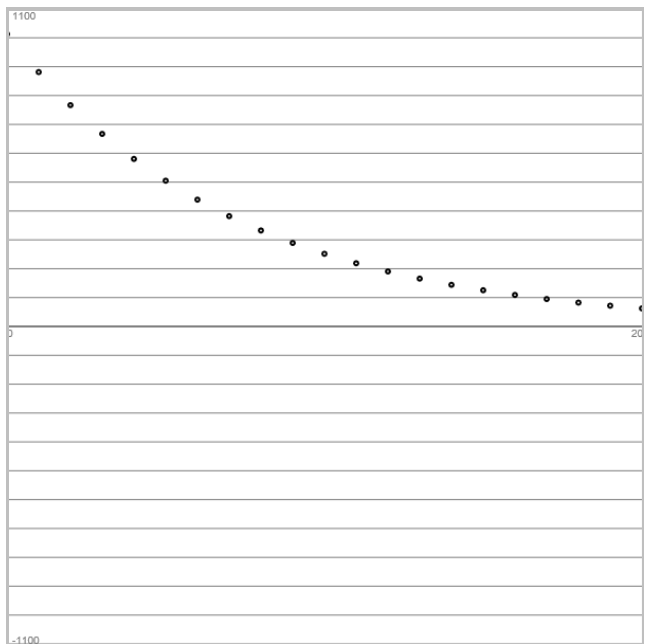
wobei W_0 den Anfangswert (Anfangsbestand), W_n den Endwert (Endbestand, Bestand) nach n (u.a. Zeit-) Schritten (Abschnitten) bedeutet, q den Prozent- oder Wachstumsfaktor (Wachstumsrate) darstellt. Bezeichnet p den Prozentsatz, um den die Werte W_n im Wachstumsprozess zu- (p positiv) oder abnehmen (p negativ) (Wachstum, Zerfall um p %), so errechnet sich der Prozentfaktor q als:

$$q = 1 + \frac{p}{100}.$$



Verzinsung eines Kapitals

($W_0 = 100,00$ €, $p = 8\%$, $n = 0, \dots, 20$ Jahre): $W_n = 100 \cdot 1,08^n$



Abnahme des Luftdrucks

($W_0 = 1013$ hPa, $p = -13\%$ pro Höhenkilometer, $n = 0, \dots, 20$ Höhenkilometer): $W_n = 1013 \cdot 0,87^n$

Es gilt noch die

Formelsammlung:

Wachstumsfaktor	$q = 1 + \frac{p}{100}$	$p = 100q - 100$ [%]	
Wachstum	$W_n = W_0 \cdot q^n$	$W_0 = \frac{W_n}{q^n}$	$q = \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$
Zeitschritte	$n = \frac{\ln\left(\frac{W_n}{W_0}\right)}{\ln(q)}$		

Aufgabe 1: Bestimme den Wachstumsfaktor q:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1	7.9 %	
2	-7 %	
3	2.9 %	
4	2 %	
5	9 %	
6	5.8 %	
7	9.1 %	
8	-2 %	
9	6.2 %	
10	-1 %	
11	8 %	
12	4.5 %	
13	-3.6 %	
14	6.8 %	
15	4 %	
16	10 %	
17	-2.2 %	
18	-5.5 %	
19	2.1 %	
20	8 %	

Vorgehensweise: Zur Ermittlung des Wachstumsfaktors q ist der (positive, negative) Prozentsatz p durch 100 zu teilen und zur Zahl 1 hinzuaddieren.

Lösungen:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1	7.9 %	1.079
2	-7 %	0.93
3	2.9 %	1.029
4	2 %	1.02
5	9 %	1.09
6	5.8 %	1.058
7	9.1 %	1.091
8	-2 %	0.98
9	6.2 %	1.062
10	-1 %	0.99
11	8 %	1.08
12	4.5 %	1.045
13	-3.6 %	0.964
14	6.8 %	1.068
15	4 %	1.04
16	10 %	1.1
17	-2.2 %	0.978
18	-5.5 %	0.945
19	2.1 %	1.021

20	8 %	1.08
----	-----	------

Aufgabe 2: Bestimme den Prozentsatz p:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1		1.121
2		1.22
3		1.365
4		1.059
5		1.37
6		0.818
7		0.721
8		0.83
9		1.31
10		1.256
11		0.89
12		0.7
13		0.912
14		1.05
15		1.231
16		1.253
17		1.26
18		1.215
19		1.335
20		0.991

Vorgehensweise: Zur Ermittlung des Prozentsatzes p ist der Wachstumsfaktor q mit 100 zu multiplizieren und vom entstehenden Produkt 100 abzuziehen. Der Prozentsatz p drückt sich in Prozent (%) aus.

Lösungen:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1	12.1 %	1.121
2	22 %	1.22
3	36.5 %	1.365
4	5.9 %	1.059
5	37 %	1.37
6	-18.2 %	0.818
7	-27.9 %	0.721
8	-17 %	0.83
9	31 %	1.31
10	25.6 %	1.256
11	-11 %	0.89
12	-30 %	0.7
13	-8.8 %	0.912
14	5 %	1.05
15	23.1 %	1.231
16	25.3 %	1.253

17	26 %	1.26
18	21.5 %	1.215
19	33.5 %	1.335
20	-0.9 %	0.991

Aufgabe 3: Bestimme den Prozentsatz p bzw. den Wachstumsfaktor q:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1		0.843
2		1.18
3		0.76
4	29.4 %	
5		0.559
6	30 %	
7		1.47
8	41 %	
9	-18.5 %	
10		1.11
11	36 %	
12		1.24
13		1.13
14	-38 %	
15		0.89
16	36 %	
17	-43.7 %	
18	32.2 %	
19		1.13
20		0.541

Vorgehensweise: Zur Ermittlung des Prozentsatzes p ist der Wachstumsfaktor q mit 100 zu multiplizieren und vom entstehenden Produkt 100 abzuziehen. Der Prozentsatz p drückt sich in Prozent (%) aus. – Zur Ermittlung des Wachstumsfaktors q ist der (positive, negative) Prozentsatz p durch 100 zu teilen und zur Zahl 1 hinzuzuaddieren.

Lösungen:

Nr.	Prozentsatz p=	Wachstumsfaktor q=
1	-15.7 %	0.843
2	18 %	1.18
3	-24 %	0.76
4	29.4 %	1.294
5	-44.1 %	0.559
6	30 %	1.3
7	47 %	1.47
8	41 %	1.41
9	-18.5 %	0.815
10	11 %	1.11
11	36 %	1.36
12	24 %	1.24
13	13 %	1.13
14	-38 %	0.62
15	-11 %	0.89
16	36 %	1.36
17	-43.7 %	0.563

18	32.2 %	1.322
19	13 %	1.13
20	-45.9 %	0.541

Aufgabe 4: Berechne den Wachstumsfaktor und den Endwert/-bestand W_n :

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritte n =	Endwert/-bestand W_n =
1	8100	9 %		17	
2	4000	-5 %		13	
3	7000	-0.9 %		16	
4	9000	1 %		11	
5	3500	-6.6 %		11	
6	9900	-6.5 %		10	
7	54	2 %		7	
8	1200	10 %		22	
9	7000	1 %		3	
10	7500	-7 %		21	
11	1600	-6 %		6	
12	1700	7.1 %		16	
13	2800	-6 %		21	
14	7400	7 %		13	
15	9500	-5 %		6	
16	3900	-4 %		13	
17	6200	9.1 %		24	
18	7100	-0.2 %		4	
19	5700	-2 %		26	
20	6900	-9 %		13	

Vorgehensweise: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Endwert/-bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

Lösungen:

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritte n =	Endwert/-bestand W_n =
1	8100	9 %	1.09	17	35053.83
2	4000	-5 %	0.95	13	2053.37
3	7000	-0.9 %	0.991	16	6057.26
4	9000	1 %	1.01	11	10041.02
5	3500	-6.6 %	0.934	11	1651.52
6	9900	-6.5 %	0.935	10	5055.35
7	54	2 %	1.02	7	62.03
8	1200	10 %	1.1	22	9768.33
9	7000	1 %	1.01	3	7212.11
10	7500	-7 %	0.93	21	1633.82
11	1600	-6 %	0.94	6	1103.79
12	1700	7.1 %	1.071	16	5094.25
13	2800	-6 %	0.94	21	763.56
14	7400	7 %	1.07	13	17832.85

15	9500	-5 %	0.95	6	6983.37
16	3900	-4 %	0.96	13	2293.99
17	6200	9.1 %	1.091	24	50140.16
18	7100	-0.2 %	0.998	4	7043.37
19	5700	-2 %	0.98	26	3370.95
20	6900	-9 %	0.91	13	2024.82

Aufgabe 5: Berechne den Wachstumsfaktor und den Endwert/-bestand W_n :

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritte n =	Endwert/-bestand W_n =
1	7100	4.5 %		27	
2	4600	0.4 %		22	
3	7300	16 %		13	
4	2100	-6 %		7	
5	6800	-18 %		11	
6	8700	5.5 %		15	
7	1100	-1.6 %		4	
8	3500	-9 %		12	
9	8000	-2 %		6	
10	7000	9.1 %		9	
11	1500	-13.4 %		14	
12	5700	19 %		17	
13	8000	-15 %		13	
14	5700	8.9 %		17	
15	3100	3.3 %		13	
16	1100	1 %		11	
17	8500	-1 %		20	
18	3200	4 %		11	
19	5300	-5 %		16	
20	3100	13 %		26	

Vorgehensweise: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Endwert/-bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

Lösungen:

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritte n =	Endwert/-bestand W_n =
1	7100	4.5 %	1.045	27	23302.27
2	4600	0.4 %	1.004	22	5022.26
3	7300	16 %	1.16	13	50266.28
4	2100	-6 %	0.94	7	1361.8
5	6800	-18 %	0.82	11	766.41
6	8700	5.5 %	1.055	15	19422.55
7	1100	-1.6 %	0.984	4	1031.27
8	3500	-9 %	0.91	12	1128.66
9	8000	-2 %	0.98	6	7086.74
10	7000	9.1 %	1.091	9	15329.25
11	1500	-13.4 %	0.866	14	200.14

12	5700	19 %	1.19	17	109691.56
13	8000	-15 %	0.85	13	967.24
14	5700	8.9 %	1.089	17	24285.6
15	3100	3.3 %	1.033	13	4727.87
16	1100	1 %	1.01	11	1227.24
17	8500	-1 %	0.99	20	6952.21
18	3200	4 %	1.04	11	4926.25
19	5300	-5 %	0.95	16	2332.67
20	3100	13 %	1.13	26	74370.59

Aufgabe 6: Berechne den Wachstumsfaktor und den Endwert/-bestand W_n :

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritte n =	Endwert/-bestand W_n =
1	38942.84	13 %		15	
2	26079.68	-4.7 %		14	
3	37563.58	7.6 %		12	
4	10278.21	-7.5 %		7	
5	40667.77	2 %		6	
6	39604.78	10.6 %		7	
7	45978.24	-3 %		18	
8	36593.51	5.8 %		10	
9	39944.08	9.1 %		18	
10	42045.3	-6.4 %		20	
11	20129.1	-3 %		8	
12	34730.73	-5.7 %		11	
13	31697.67	-15 %		17	
14	27853.95	-9 %		11	
15	26706.79	-2.2 %		17	
16	24686.47	8 %		7	
17	44407.5	-9.8 %		10	
18	12574.01	-6.8 %		16	
19	15722.12	-12 %		17	
20	19452.79	-7.5 %		14	

Vorgehensweise: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Endwert/-bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

Lösungen:

Nr.	Anfangswert W_0 =	Prozentsatz p =	Wachstumsfaktor q =	Zeitschritt n =	Endwert/-bestand W_n =
1	38942.84	13 %	1.13	15	243559.05
2	26079.68	-4.7 %	0.953	14	13292.38
3	37563.58	7.6 %	1.076	12	90472.01
4	10278.21	-7.5 %	0.925	7	5955.38
5	40667.77	2 %	1.02	6	45798.51
6	39604.78	10.6 %	1.106	7	80173.99
7	45978.24	-3 %	0.97	18	26573.18
8	36593.51	5.8 %	1.058	10	64307.37

9	39944.08	9.1 %	1.091	18	191556.96
10	42045.3	-6.4 %	0.936	20	11200.42
11	20129.1	-3 %	0.97	8	15776.05
12	34730.73	-5.7 %	0.943	11	18211.37
13	31697.67	-15 %	0.85	17	2000.55
14	27853.95	-9 %	0.91	11	9870.57
15	26706.79	-2.2 %	0.978	17	18297.1
16	24686.47	8 %	1.08	7	42308.27
17	44407.5	-9.8 %	0.902	10	15831.49
18	12574.01	-6.8 %	0.932	16	4075.01
19	15722.12	-12 %	0.88	17	1789.44
20	19452.79	-7.5 %	0.925	14	6530.8

Aufgabe 7: Berechne jeweils die fehlenden Größen zum Wachstum:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1		-8 %		14	124.48
2		-7 %		13	202.43
3	500	-8.3 %		9	
4			1.078	15	1789.41
5	630	-8 %		16	
6			0.95	9	271.01
7			1.07	17	1516.23
8			1.01	13	1115.33
9	770		1.07	17	
10	410		1.086	8	
11	470		0.99	11	
12	890		1	11	
13	180	1.6 %		17	
14			1.04	11	1169.99
15			1.047	17	414.81
16			0.929	10	205.89
17	860		0.947	13	
18		7 %		9	569.92
19	350	7 %		5	
20			1.05	15	1226.57

Vorgehensweise: Es sind die (umgestellten) Formeln aus der Formelsammlung anzuwenden.

Lösungen:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	400	-8 %	0.92	14	124.48
2	520	-7 %	0.93	13	202.43
3	500	-8.3 %	0.917	9	229.24
4	580	7.8 %	1.078	15	1789.41
5	630	-8 %	0.92	16	165.94
6	430	-5 %	0.95	9	271.01

7	480	7 %	1.07	17	1516.23
8	980	1 %	1.01	13	1115.33
9	770	7 %	1.07	17	2432.29
10	410	8.6 %	1.086	8	793.27
11	470	-1 %	0.99	11	420.81
12	890	0 %	1	11	890
13	180	1.6 %	1.016	17	235.76
14	760	4 %	1.04	11	1169.99
15	190	4.7 %	1.047	17	414.81
16	430	-7.1 %	0.929	10	205.89
17	860	-5.3 %	0.947	13	423.69
18	310	7 %	1.07	9	569.92
19	350	7 %	1.07	5	490.89
20	590	5 %	1.05	15	1226.57

Aufgabe 8: Berechne jeweils die fehlenden Größen zum Wachstum:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1			0.91	19	225.19
2		6 %		14	6094.29
3	6803.73	10 %		3	
4		2.4 %		18	6350.94
5			0.811	11	820.53
6		9.9 %		10	17663.08
7		-0.9 %		4	9048.12
8			0.989	8	8782.6
9	6877.7		1.08	8	
10		7 %		14	24423.46
11		-13.9 %		9	2556.94
12			1.016	17	5924.9
13		15 %		14	52681.25
14	5909.51	-11 %		6	
15	3365.23		1.11	18	
16			1.23	5	7196.93
17	4330.98		0.9	12	
18		19.7 %		16	111815.18
19	7406.9		0.85	10	
20		-1 %		10	1426.83

Vorgehensweise: Es sind die (umgestellten) Formeln aus der Formelsammlung anzuwenden.

Lösungen:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	1351.36	-9 %	0.91	19	225.19
2	2695.51	6 %	1.06	14	6094.29
3	6803.73	10 %	1.1	3	9055.76
4	4144.18	2.4 %	1.024	18	6350.94

5	8219.83	-18.9 %	0.811	11	820.53
6	6872.1	9.9 %	1.099	10	17663.08
7	9381.32	-0.9 %	0.991	4	9048.12
8	9595.17	-1.1 %	0.989	8	8782.6
9	6877.7	8 %	1.08	8	12730.14
10	9471.84	7 %	1.07	14	24423.46
11	9833.12	-13.9 %	0.861	9	2556.94
12	4523.64	1.6 %	1.016	17	5924.9
13	7445.37	15 %	1.15	14	52681.25
14	5909.51	-11 %	0.89	6	2936.92
15	3365.23	11 %	1.11	18	22020.56
16	2556.36	23 %	1.23	5	7196.93
17	4330.98	-10 %	0.9	12	1223.2
18	6294.98	19.7 %	1.197	16	111815.18
19	7406.9	-15 %	0.85	10	1458.23
20	1577.68	-1 %	0.99	10	1426.83

Aufgabe 9: Berechne jeweils die fehlenden Größen zum Wachstum:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	87000		1.095	11	
2	49000		0.933		19891.04
3	96000	-8 %		12	
4	17000		1.072		48235.94
5	11000	11 %			22837.76
6		-7 %		11	13953.21
7	34000		0.983		27677.13
8	87000	6 %			123411.16
9	98000	14.3 %		13	
10	29000	-13.5 %		15	
11	68000		1.059	12	
12	23000		0.86	15	
13		-2.6 %		9	67846.75
14	54000		1.145		139326
15	1500	2.2 %			1905.68
16		4 %		13	106564.7
17		15 %		13	141514.12
18	4600	-3 %		8	
19	86000	1 %			93125.68
20			1.126	6	112096.75

Vorgehensweise: Es sind die (umgestellten) Formeln aus der Formelsammlung anzuwenden. Dies gilt insbesondere für die Ermittlung der Zeitschritte n .

Lösungen:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	87000	9.5 %	1.095	11	236088.35
2	49000	-6.7 %	0.933	13	19891.04

3	96000	-8 %	0.92	12	35295.97
4	17000	7.2 %	1.072	15	48235.94
5	11000	11 %	1.11	7	22837.76
6	31000	-7 %	0.93	11	13953.21
7	34000	-1.7 %	0.983	12	27677.13
8	87000	6 %	1.06	6	123411.16
9	98000	14.3 %	1.143	13	556963.93
10	29000	-13.5 %	0.865	15	3293.36
11	68000	5.9 %	1.059	12	135288.36
12	23000	-14 %	0.86	15	2394.44
13	86000	-2.6 %	0.974	9	67846.75
14	54000	14.5 %	1.145	7	139326
15	1500	2.2 %	1.022	11	1905.68
16	64000	4 %	1.04	13	106564.7
17	23000	15 %	1.15	13	141514.12
18	4600	-3 %	0.97	8	3605.22
19	86000	1 %	1.01	8	93125.68
20	55000	12.6 %	1.126	6	112096.75

Aufgabe 10: Berechne jeweils die fehlenden Größen zum Wachstum:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	246.59	-3 %			84.92
2		-3.4 %		32	364.6
3	8479.51		0.96	22	
4	4288.09	16.6 %			1712014.18
5	7408.32		1.093	37	
6	7618.97	3 %			20208.06
7	8460.89	7 %			42916.74
8	1453.94		0.92		85.38
9	912.09	9.2 %			4446.78
10	1497.46	-16 %			371.18
11	361.58		0.88	22	
12	344.41	1 %			492.77
13	8087.08		0.89		1582.17
14	1097.47		1.042		2398.17
15	2423.12	1 %		29	
16	8331.73	-13 %		22	
17	665.68		0.83	39	
18	9999.87		1.04		14232.93
19	2074.84		0.815	9	
20	8507.33	-11.6 %			564.6

Vorgehensweise: Es sind die (umgestellten) Formeln aus der Formelsammlung anzuwenden. Dies gilt insbesondere für die Ermittlung der Zeitschritte n .

Lösungen:

Nr.	Anfangswert $W_0=$	Prozentsatz $p=$	Wachstumsfaktor $q=$	Zeitschritte $n=$	Endwert/-bestand $W_n=$
1	246.59	-3 %	0.97	35	84.92
2	1102.93	-3.4 %	0.966	32	364.6
3	8479.51	-4 %	0.96	22	3454.12
4	4288.09	16.6 %	1.166	39	1712014.18
5	7408.32	9.3 %	1.093	37	198914.17
6	7618.97	3 %	1.03	33	20208.06
7	8460.89	7 %	1.07	24	42916.74
8	1453.94	-8 %	0.92	34	85.38
9	912.09	9.2 %	1.092	18	4446.78
10	1497.46	-16 %	0.84	8	371.18
11	361.58	-12 %	0.88	22	21.72
12	344.41	1 %	1.01	36	492.77
13	8087.08	-11 %	0.89	14	1582.17
14	1097.47	4.2 %	1.042	19	2398.17
15	2423.12	1 %	1.01	29	3233.66
16	8331.73	-13 %	0.87	22	389.19
17	665.68	-17 %	0.83	39	0.46
18	9999.87	4 %	1.04	9	14232.93
19	2074.84	-18.5 %	0.815	9	329.16
20	8507.33	-11.6 %	0.884	22	564.6

www.michael-buhlmann.de / 03.2019 / Mathematik-Aufgabenpool: Wachstumsprozesse II / Aufgaben 821-830