**Michael Buhlmann**

# Mathematik-Aufgabenpool
## > Wachstumsprozesse III

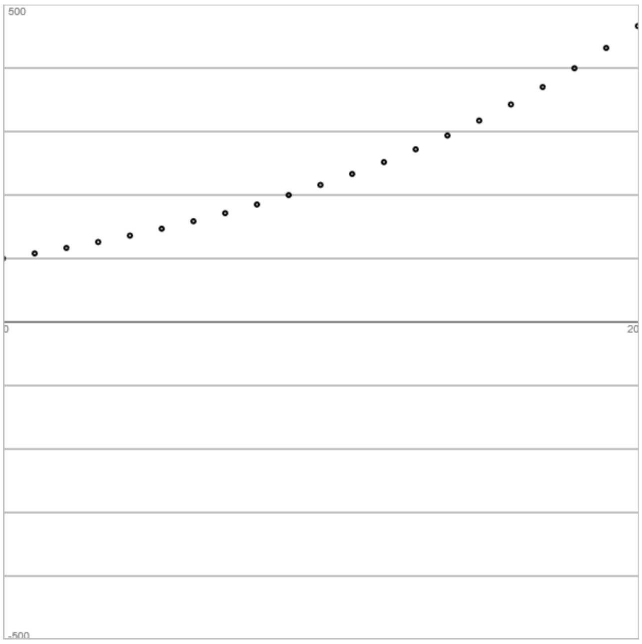
---

**Einleitung**: Wachstumsprozesse lassen sich mathematisch beschreiben durch:

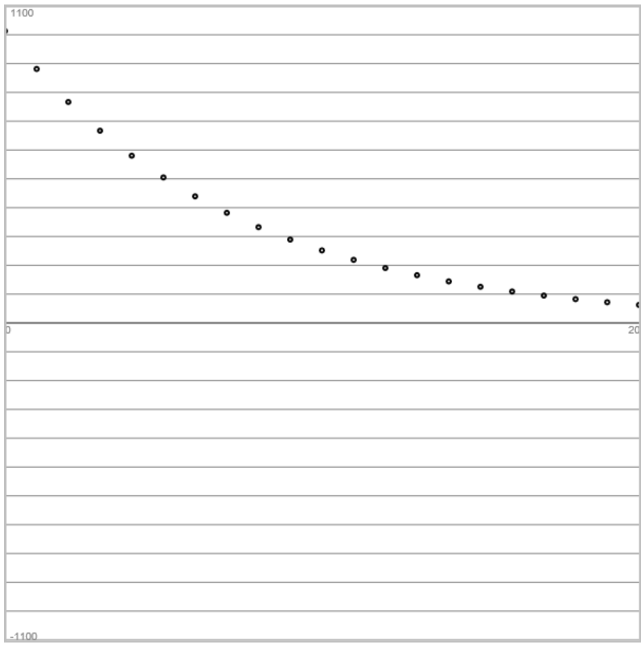
$$W_n = W_0 \cdot q^n ,$$

wobei $W_0$ den Anfangswert (Anfangsbestand), $W_n$ den Endwert (Endbestand, Bestand) nach n (u.a. Zeit-) Schritten (Abschnitten) bedeutet, q den Prozent- oder Wachstumsfaktor (Wachstumsrate) darstellt. Bezeichnet p den Prozentsatz, um den die Werte $W_n$ im Wachstumsprozess zu- (p positiv) oder abnehmen (p negativ) (Wachstum, Zerfall um p %), so errechnet sich der Prozentfaktor q als:

$$q = 1 + \frac{p}{100} .$$




**Verzinsung eines Kapitals**
($W_0$ = 100,00 €, p = 8%, n = 0, … 20 Jahre): $W_n = 100 \cdot 1{,}08^n$




**Abnahme des Luftdrucks**
($W_0$ = 1013 hPa, p = -13% pro Höhenkilometer, n = 0, … 20 Höhenkilometer): $W_n = 1013 \cdot 0{,}87^n$

Es gilt noch die
**Formelsammlung**:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wachstumsfaktor | $q = 1 + \frac{p}{100}$ | $p = 100q - 100$ [%] | |
| Wachstum | $W_n = W_0 \cdot q^n$ | $W_0 = \frac{W_n}{q^n}$ | $q = \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$ |

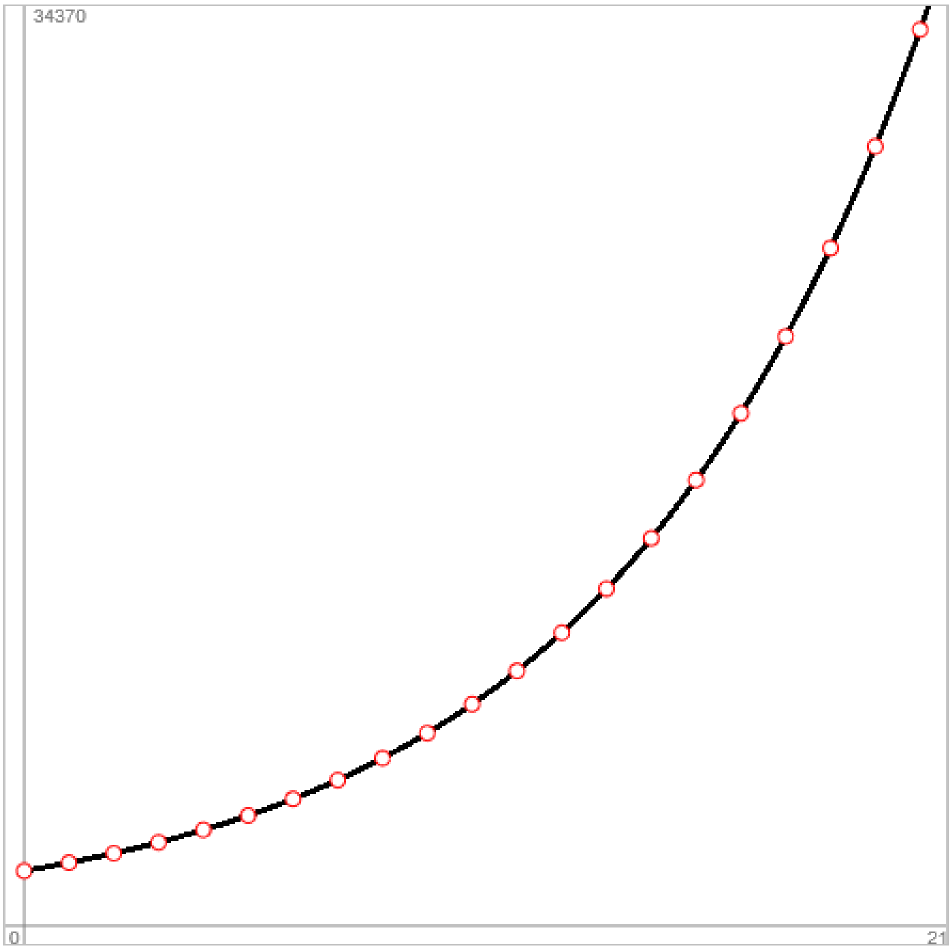
**Aufgabe 1**: 2000 Bakterien wachsen unter günstigen Bedingungen um 15 % die Stunde.

a) Wie viel Bakterien sind nach 2, 4 und 10 Stunden vorhanden?
b) Wann wird die Zahl von 20000 Bakterien überschritten?
c) Zeichne den Graphen der Wachstumsfunktion.

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: a) q = 1,15 -> $W_2$ = 2645, $W_4$ = 3498, $W_{10}$ = 8091 Bakterien; b) $W_{16}$ = 18715, $W_{17}$ = 21523 Bakterien; c) Graph:

| Wertetabelle: | |
|---|---|
| n | $W_n$ |
| 0 | 2000 |
| 1 | 2300 |
| 2 | 2645 |
| 3 | 3041.75 |
| 4 | 3498.0125 |
| 5 | 4022.7144 |
| 6 | 4626.1215 |
| 7 | 5320.0398 |
| 8 | 6118.0457 |
| 9 | 7035.7526 |
| 10 | 8091.1155 |
| 11 | 9304.7828 |
| 12 | 10700.5002 |
| 13 | 12305.5752 |
| 14 | 14151.4115 |
| 15 | 16274.1233 |
| 16 | 18715.2417 |
| 17 | 21522.528 |
| 18 | 24750.9072 |
| 19 | 28463.5433 |
| 20 | 32733.0748 |




**Aufgabe 2**: Der irdische Luftdruck in Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1000 Hektopascal (hPa). Pro Kilometer Höhe verringert sich der Luftdruck durchschnittlich um jeweils 13 %.

a) Wie hoch ist der Luftdruck in 2000 Metern Meereshöhe?
b) Wie hoch ist der Luftdruck auf der Zugspitze (Meereshöhe: ca. 3000 Meter)?
c) In welcher Höhe wird ein Luftdruck von 300 hPa unterschritten?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Wert/Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 0,87 -> a) $W_2$ = 756,9 hPa, b) $W_3$ = 658,5 hPa; c) $W_8$ = 328,2, $W_9$ = 285,5 hPa.

**Aufgabe 3**: Beim radioaktiven Zerfall halbiert sich die Menge von Strontium-96 ungefähr jede Sekunde. Wenn zu Anfang 250 Milligramm (mg) des Elements vorhanden waren, wie groß ist der Bestand an Strontium-96 nach 4, 8 und 12 Sekunden?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: p = -50%, q = 0,5 -> $W_4$ = 15,625, $W_8$ = 0,9766, $W_{12}$ = 0,061 mg.

**Aufgabe 4**: Eine Wasserhyazinthenart in einem See verdoppelt jede Woche ihr Volumen. Anfangs ist der See im Bereich von 5 Quadratmetern ($m^2$) durch die Hyazinthe bedeckt.

a) Wie groß ist die von der Pflanze bedeckte Fläche nach 4, 6 und 10 Wochen?

b) Wann bedecken 640 $m^2$ der Pflanze den See, wann 2560 $m^2$?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: p = 100%, q = 2 -> a) $W_4$ = 80, $W_6$ = 320, $W_{10}$ = 5120 $m^2$; b) $W_7$ = 640, $W_9$ = 2560 $m^2$.

**Aufgabe 5**: Ein Hektar Wald enthielt im Jahr 2010 300 Kubikmeter ($m^3$) Nutzholz. Bis zum Jahr 2011 kamen etwa 5 $m^3$ Holz hinzu. Wie viel Holz ist im Jahr 2015 im Wald vorhanden, wenn von exponentiellem Wachstum ausgegangen wird? Wie viel Holz kann in diesem Jahr geschlagen werden, ohne die Substanz des Waldes anzugreifen?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich nach Berechnung des Prozentsatzes p als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: p% = 5:300 = 0,0167, p = 1,67%, q = 1,0167 -> $W_5$ = 325,9 $m^3$ -> 325,9–300 = 25,9 $m^3$.

**Aufgabe 6**: Nach dem Kauf eines Neuwagens kann für die ersten Jahre ein Wertverlust des Fahrzeugs von rund 18 % pro Jahr angenommen werden.

a) Wie viel wert ist beim einem Kaufpreis von 15400 Euro (€) ein Fahrzeug nach 2, 4 und 5 Jahren?
b) Wie hoch war der Kaufpreis eines Fahrzeuges, das nach drei Jahren noch 10972,22 € wert ist?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Wert/Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 0,82 -> a) $W_2$ = 10354,96, $W_4$ = 6962,68, $W_5$ = 5709,39 €; b) $W_0$ = 19900,00 €.

**Aufgabe 7**: Ein Kapital in Höhe von 80000 Euro (€) wird bei einem Aktienfond angelegt, der eine durchschnittliche Rendite von 2,25 % pro Jahr verspricht. Wie entwickelt sich das Kapital über die nächsten 8 Jahre? Um wie viel Prozent ist das Anfangskapital in den 8 Jahren gewachsen?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Wert/Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 1,0225 -> $W_8$ = 95586,39 -> $W_8$:$W_0$ = 1,195 -> prozentuale Steigerung +19,5 %.

**Aufgabe 8**: Ein Kapital in Höhe von 24000 Euro (€) befindet sich auf einem Sparbuch und unterliegt einem Strafzins von -0,1 % sowie der allgemeinen Inflationsrate von 2 %. Wie viel ist das Kapital nominal und real nach 5 Jahren Niedrigzinsphase noch wert?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Wert/Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: Nominal: q = 0,999 -> $W_5$ = 23880,24 €; real: q = 0,979 -> $W_5$ = 21583,64 €.

**Aufgabe 9**: Im Jahr 2017 wurden am Obersee des Bodensees nur noch 195 Tonnen (t) Fisch gefangen. Bis zum Jahr 2027 soll der Ertrag durch Ausbringung von Fischlaich auf 600 Tonnen gesteigert werden. Welcher prozentualen jährlichen Steigerungsrate entspricht dies? Wie viel Tonnen Fisch können voraussichtlich im Jahr 2020 am Obersee gefangen werden?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 1,19 -> p = 19 %, $W_3$ = 328,6 t.

**Aufgabe 10**: Der Bestand an Kraftfahrzeugen (Kfz) in der Bundesrepublik Deutschland betrug am 1. Januar 2018 687 Kfz pro 1000 Einwohner, am 1. Januar 2019 692 Kfz pro 1000 Einwohner. Unter der Voraussetzung von exponentiellem Wachstum soll der entsprechende Bestand pro 1000 Einwohner für das Jahr 2025 berechnet werden.

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 692:687 = 1,0073 -> p = 0,73 %, $W_7$ = 723 Kfz/1000 Einwohner.

**Aufgabe 11**: Der irdische Klimawandel bedingt ein Ansteigen der Weltdurchschnittstemperatur mit vielen negativen Auswirkungen auf das irdische Ökosystem und die Menschheit. Die globale Erwärmung wird u.a. mit 10-Jahres-Zeiträumen von Temperaturdifferenzen gemessen; Bezugszeitraum sollen hier die Jahre 1950-1959 sein, die Weltdurchschnittstemperatur betrug damals 12,88 Grad Celsius (°C). Langfristig zeichnet sich eine exponentielle Erhöhung der Weltdurchschnittstemperatur um 0,12 % pro Jahrzehnt ab.

a) Um wie viel wird sich die Weltdurchschnittstemperatur im Zeitraum 2020-2029 gegenüber der des Zeitraums 1950-1959 erhöhen?
b) Wird das Klimaziel, die Erwärmung vom Jahr 1950 bis zum Jahr 2100 auf unter 2 °C zu begrenzen, unter den vorgenannten Voraussetzungen erreicht?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Wert/Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$.

**Lösung**: q = 1,0012 -> $W_7$ = 14 °C, $W_{15}$ = 15,4 °C -> 15,4-12,88 = 2,5 °C -> Klimaziel wird nicht erreicht.

**Aufgabe 12**: In einem süddeutschen Naturschutzgebiet wurde über mehrere Jahre die Entwicklung der Bestände von einzelnen Vogelarten beobachtet. Dabei wurden folgende Änderungen beim Bestand festgestellt:

| Vogelart (Auswahl) | Anfangsbestand (Jahr 2015) | Prozentuale Veränderung (jährlich) |
|---|---|---|
| Amsel | 2200 | -25,0 % |
| Ente | 450 | +1,0 % |
| Habicht | 20 | -1,5 % |
| Milan | 25 | -2,0 % |
| Meise | 4700 | -4,5 % |
| Reiher | 80 | -2,5 % |
| Schwalbe | 720 | -4,0 % |
| Sperling | 3400 | +0,0 % |
| Storch | 30 | +0,5 % |
| Teichhuhn | 150 | -3,0 % |

a) Wie groß war der Anfangsbestand der ausgewählten Vogelarten insgesamt?

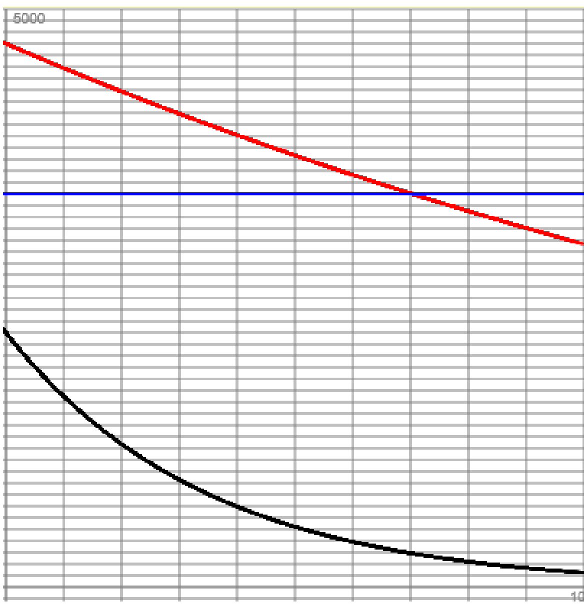
b) Wie viel Amseln werden voraussichtlich im Jahr 2025 im Biotop leben? Wie groß wird wahrscheinlich der Bestand an Reihern bzw. Störchen im Jahr 2020 sein?

c) Stelle die Entwicklung dreier ausgewählter Vogelarten in den Jahren 2015 bis 2025 grafisch dar.

d) Wie groß ist der Gesamtbestand der ausgewählten Vogelarten im Jahr 2020? Welche Unterschiede sind im Vergleich zum Jahr 2015 festzustellen? Was könnte das allgemein für die Entwicklung der Vogelbestände in Mitteleuropa in den kommenden Jahren bedeuten?

**Vorgehensweise**: Der Wachstumsfaktor q ermittelt sich als: $q = 1 + \frac{p}{100}$, der Bestand als: $W_n = W_0 \cdot q^n$. Die Prozentrechnung beinhaltet die Formeln: $W = \frac{p \cdot G}{100}$, $p = \frac{W \cdot 100}{G}\%$, $G = \frac{W \cdot 100}{p}$ mit G als Grundwert, W als Prozentwert, p als Prozentsatz.

**Lösung**: a) $W_{0,gesamt}$ = 14780; b) q = 0,75 -> $W_{10}$ = 124 Amseln; q = 0,975 -> $W_5$ = 70 Reiher; q = 1,005 -> $W_5$ = 31 Störche;
c) Graphen, z.B.: Amsel, Meise, Sperling -> siehe rechts;
d) Endbestände (2020): Amsel (522), Ente (473), Habicht (19), Milan (23), Meise (3733), Reiher (70), Schwalbe (587), Sperling (3400), Storch (31), Teichhuhn (129), $W_{5,gesamt}$ = 8987 -> prozentuale Abnahme (2015/2020) -39,2 %. Vögel wie andere Tiere, wie Wälder und Pflanzen sind also durch Mensch und den durch Menschen verursachten Klimawandel höchst gefährdet.




www.michael-buhlmann.de / 09.2019 / Mathematik-Aufgabenpool: Wachstumsprozesse III / Aufgaben 879-890