Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Einleitung: Die (mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffen die Aufgaben Zufallsexperimente (Wahrscheinlichkeitsbaum, Ergebnisse und Ereignisse, Zufallsgrößen, Erwartungswert) und speziell verteilte Zufallsvariablen (Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung, Normalverteilung).

Aufgabe 1 (mit Hilfsmitteln): a) In einem Stapel von 10 Spielkarten befinden sich den übrigen Karten auch Asse. Wie groß ist die Anzahl der Asse, wenn die Wahrscheinlichkeit, gleichzeitig ein Ass und eine der übrigen Karten zu ziehen, 8/15 betragen soll?

Im Folgenden befinden sich unter den 10 Spielkarten vier Asse.

b) Es wird folgendes Spiel durchgeführt: Bei einem Einsatz von € 1,- werden dem Speiler ausbezahlt: € 2,-, wenn zwei Asse gezogen werden; € 1,-, wenn genau ein Ass aufgedeckt wird. Mit welchem durchschnittlichen Verlust pro Spiel muss der Spieler rechnen? Ändere die Auszahlung im Fall, dass zwei Asse gezogen werden, so ab, dass das Spiel fair ist.

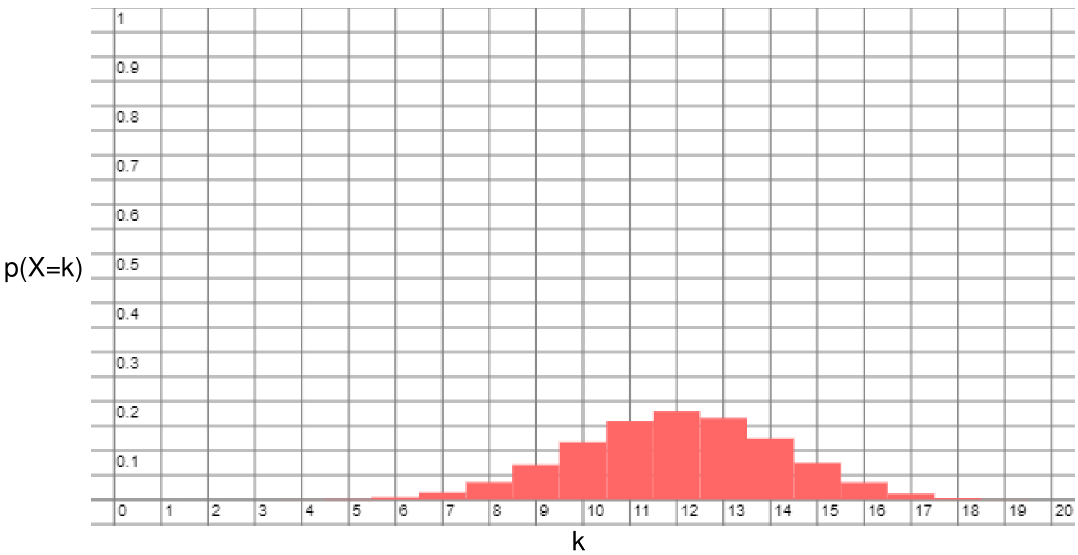
c) Das Spiel, bei dem zwei von 10 Spielkarten gleichzeitig gezogen werden, wird mehrfach wiederholt. Dabei wird gezählt, wie oft der Spieler einen positiven Gewinn erzielt. Begründe, dass dieses Zufallsexperiment ein Bernoulli-Experiment ist.

d) Das Spiel, bei dem zwei von 10 Spielkarten gleichzeitig gezogen werden, wird 30-mal gespielt, die Anzahl der positiven Gewinne gezählt. Berechne für die folgenden Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

A: Es wird genau 6-mal ein positiver Gewinn erzielt.
B: Es werden insgesamt 59 Asse gezogen.
C: Mehr als 7-mal wird ein positiver Gewinn erzielt.
D: Je zwei Asse zusammen werden mindestens 3-mal und weniger als 10-mal gezogen.

Wie oft werden im Durchschnitt zwei Asse zusammen gezogen?

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sei das nachstehende Histogramm einer B(n,p)-binomialverteilten Zufallsvariablen X.



a) Bestimme die ungefähren Werte der folgenden Wahrscheinlichkeiten: p(X=8), p(X≠13), p(9<X<12).

b) Es ist n = 20, und der Erwartungswert μ der Zufallsvariablen X ist ganzzahlig. Berechne die Wahrscheinlichkeit p und die Standardabweichung σ.

c) Welche Ereignisse A, B, C werden unter den Voraussetzung der B(20; 0.6)-binomialverteilten Zufallsvariablen X durch die folgenden Wahrscheinlichkeiten beschrieben?

p(A) = $\binom{20}{10}\cdot 0{,}24^{10}$, p(B) = $1-0{,}4^{20}$, p(C) = $\binom{20}{17}\cdot 0{,}6^{17}\cdot 0{,}4^{3}+\binom{20}{18}\cdot 0{,}6^{18}\cdot 0{,}4^{2}+8\cdot 0{,}6^{19}$.

d) Die normalverteilte Zufallsvariable Y hat denselben Erwartungswert μ wie die Zufallsgröße X und die Standardabweichung σ = 2. Skizziere die Dichtefunktion der Gaußschen Glockenkurve zur Zufallsvariable Y unter Hervorhebung der besonderen Kurvenpunkte.

e) Berechne p(μ-σ≤Y<μ+2σ). Stelle die Wahrscheinlichkeit in der Skizze der Dichtefunktion dar.

Lösungen: 1a) Wahrscheinlichkeitsbaum (A[ss], n[icht]A[ss]; ohne Zurücklegen) -> Bruchgleichung 2·x/10·(10-x)/9 = 8/15 ⇔ x = 4, x = 6 -> 4 oder 6 Asse unter den 10 Spielkarten.

1.	2.		Versuchsdurchführung(en)		
	3/9 A	>	p(**A; A**) =	0.1333333	**1**
4/10 **A**					
	6/9 **nA**	>	p(**A; nA**) =	0.2666667	**2**
	4/9 **A**	>	p(**nA; A**) =	0.2666667	**3**
6/10 **nA**					
	5/9 **nA**	>	p(**nA; nA**) =	0.3333333	**4**
			Summe:	1	

b) Tabelle: 2xA: € 2,-, p=2/15, 1xA: € 1,-, p=8/15, sonst: € 0,-, p=5/15 -> Erwartungswert E = 2·2/15 + 1·8/15 + 0 – 1 = -0,20 € als durchschnittlicher Verlust; faires Spiel -> E = x·2/15 + 1·8/15 + 0 – 1 = 0 ⇔ x = 3,50 € als Auszahlungsbetrag; c) Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = 2xA = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p=2/15 als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel; d) n=30, p=2/15, X Zufallsgröße „Anzahl 2xA" -> Wahrscheinlichkeiten p(A) = p(X=6) = 0.1076, p(B) = p(X=29) = $1.1\cdot 10^{-24}$, p(C) = p(X>7) = 1 – p(X≤7) = 0.0387, p(D) = p(3≤X<10) = p(X≤9) – p(X≤2) = 0.7784, Erwartungswert μ = 30·2/15 = 4 als Durchschnitt.

2a) p(X=8) = 0.0355, p(X≠13) = 1 – p(X=13) = 0.8342, p(9≤X<12) = p(X=10) + p(X=11) = 0.2769; b) Rechteck mit der größten Höhe im Histogramm -> μ = 12 = np = 20·p ⇔ p = 0,6 -> σ = $(np(1-p))^{0,5}$ = 2.19; c) p(A) = p(X=10), p(B) = p(X≥1), p(C) = p(17≤X≤19); e) p(10≤Y<16) = 0.8186; d), e) Skizze: