Michael Buhlmann

Mathematik-Berufskolleg
> Analysis I

Einleitung: Die Mathematik-Prüfung zum Berufskolleg beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale, Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): a) Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion:

Begründe, dass nur einer der folgenden Funktionsterme zum abgebildeten Graphen gehört:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-6x^2+11x,\ g(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)^2,\ h(x)=\frac{3}{2}x^2(x-4)^2,\ i(x)=\frac{3}{4}x^2(4-x).$$

b) Es ist $f(x)=\frac{1}{4}x^3-6x^2+11x$. Berechne alle Nullstellen der Funktion.

c) Berechne den Inhalt der Fläche, die die Funktion $g(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)^2$ und die x-Achse im 4. Quadranten des x-y-Koordinatensystems einschließen.

d) Gegeben ist die Exponentialfunktion $k(x)=e^{-4x}-1$. Zeige: Die Funktionen g(x) und k(x) haben im Ursprung des x-y-Koordinatensystems eine gemeinsame Tangente.

e) Eine trigonometrische Funktion q(x) hat mit der Funktion $g(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)^2$ den Hochpunkt gemeinsam und besitzt den Tiefpunkt T(2|-6). Bestimme einen Funktionsterm von q(x). Gib die Periode und die Amplitude an sowie die Wendepunkte der Funktion im Intervall [0; 4].

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Es ist $f(x)=2x^3-\frac{1}{4}x^4$ eine Polynomfunktion 4. Grades.

a) Berechne die Nullstellen, den Extrempunkt, die Wendepunkte von f(x). Was stellt einer der Wendepunkte noch dar? Zeichne den Graphen der Funktion in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

b) Die Senkrechte im Hochpunkt von f(x) teilt die Fläche zwischen Funktion und x-Achse in zwei Teile. Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte zueinander.

Gegeben ist die Exponentialfunktion $g(x)=-2e^{-0,5x}+5$

c) Berechne die Schnittpunkte von g(x) mit den Achsen des x-y-Koordinatensystems. Gib die Asymptote der Funktion an.

d) Der Inhalt der Fläche zwischen Funktion g(x), Asymptote, y-Achse und Senkrechter x = 4 soll berechnet werden. Welcher der nachstehenden Ansätze ist richtig?

A = $\int_0^4 g(x)dx$ A = $\int_0^4 (g(x)-5)dx$ A = $\int_0^4 (5-g(x))dx$

Berechne den gesuchten Flächeninhalt.

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): Im Folgenden sei $f(x)=2\cdot\sin(\frac{\pi}{4}x)+1$ eine Sinusfunktion.

a) Zeichne die Funktion f(x) in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem. Zeige, dass f(x) an der Stelle x = 6 einen Tiefpunkt besitzt und gib die Koordinaten des Tiefpunkts an.

b) Berechne im ersten Wendepunkt mit positiver x-Koordinate die Wendetangente.

c) Die Funktion f(x) soll durch eine quadratische Funktion p(x) angenähert werden, so dass beide Funktionen einen gemeinsamen Hochpunkt H(2|3) besitzen und p(x) durch den Tiefpunkt an der Stelle x = 6 verläuft. Bestimme die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion.

Gegeben ist die Funktion $g(x) = e^{-x} + x + 2$.

d) Berechne den Extrempunkt von g(x). Zeige, dass g(x) über keine Nullstellen verfügt. Zeige, dass g(x) überall links gekrümmt ist.

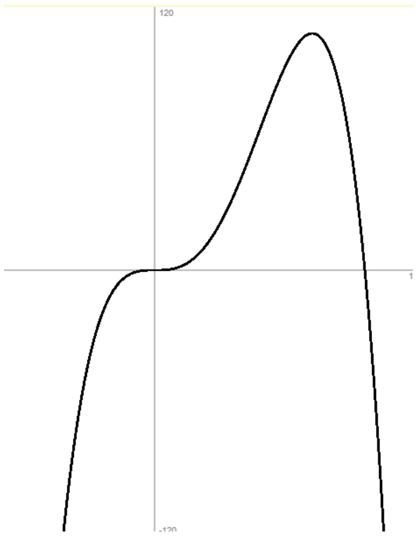
e) Gesucht ist die Stammfunktion G(x) zur Funktion g(x) mit G(-1) = -e.

f) Schneidet die Tangente an die Funktion g(x) an der Stelle x = -2 die positive x-Achse des x-y-Koordinatensystems? Berechne.

Lösungen: 1a) Graph -> g(x) mit einfacher Nullstelle bei x = 0, doppelter Nullstelle bei x = 4, x->-∞: g(x)->+∞, x->+∞: g(x)->-∞, Punkt P auf g(x); die anderen Funktionen kommen nicht infrage; b) f(x) = $x^3/4-6x^2+11x = x(x^2/4-6x+11) = 0$ -> x=0, x=2, x=22 als Nullstellen; c) $\int_0^4 f(x)\,dx = -5\ 1/3$ -> A = 5 1/3 FE; d) Berührpunkt O(0|0) mit g(0) = k(0) = 0, g'(0) = k'(0) = -4; e) q(x) = a·cos(bx)+d, T(2|-6), H(4|0) -> d=-3, a=3, p/2=2, b=π/2 -> Kosinusfunktion q(x) = 3·cos(πx/2)-3 -> p=4, a=3, Wendepunkte W(1|-3), W(3|-3).

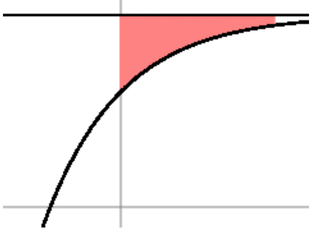
2a) Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	12	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
4	64	32	0	-12	Wendepunkt W(4|64)
6	108	0	-36	-24	Hochpunkt H(6|108)
8	0	-128	-96	-36	Nullstelle N(8|0)



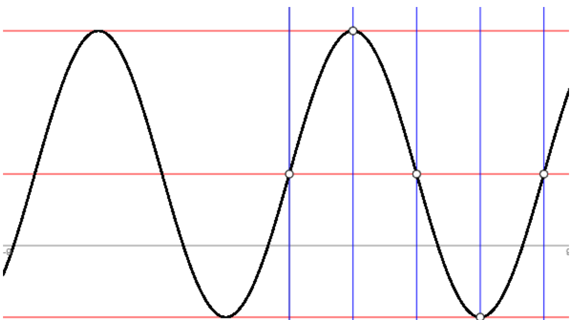
b) $A_1 = \int_0^4 f(x)\,dx = 259{,}2$ FE, $A_2 = \int_6^8 f(x)\,dx = 150{,}4$ FE -> $A_1:A_2 = 81/47$.

c) Achsenschnittpunkte: N(-1,3|0), S_y(0|3), waagerechte Asymptote y = 5;



d) A = $\int_0^4 (5 - g(x))dx$ = 3,46 FE.

3a) Graph ->



; f'(6)=0, f''(6)>0 -> Tiefpunkt T(6|-1); b) Wendepunkt W(3|1) -> Wendetangente t: y = -πx/2+2π+1 = -1.5708x + 7.2832; c) Bestimmungsaufgabe: H(2|3), T(6|-1), p(x) = ax^2+bx+c, p'(x) = 2ax+b -> p(2)=3, p'(2)=0, p(6)=-1 -> p(x) = $-0{,}25x^2+x+2$ gemäß Gaußverfahren:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ \; 4a + 2b + 1c = 3$

$+ \; 4a + 1b = 0$

$+ \; 36a + 6b + 1c = -1$

<u>Anfangstableau</u>:

a	b	c	R.S.
4	2	1	3
4	1	0	0
36	6	1	-1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 9*(*1*) /

4	2	1	3
0	-1	-1	-3
0	-12	-8	-28

<u>2. Schritt</u>: -1*(*3*) + 12*(*2*) /

4	2	1	3
0	-1	-1	-3
0	0	-4	-8

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ \; 4a + 2b + 1c = 3$

$- \; 1b - 1c = -3$

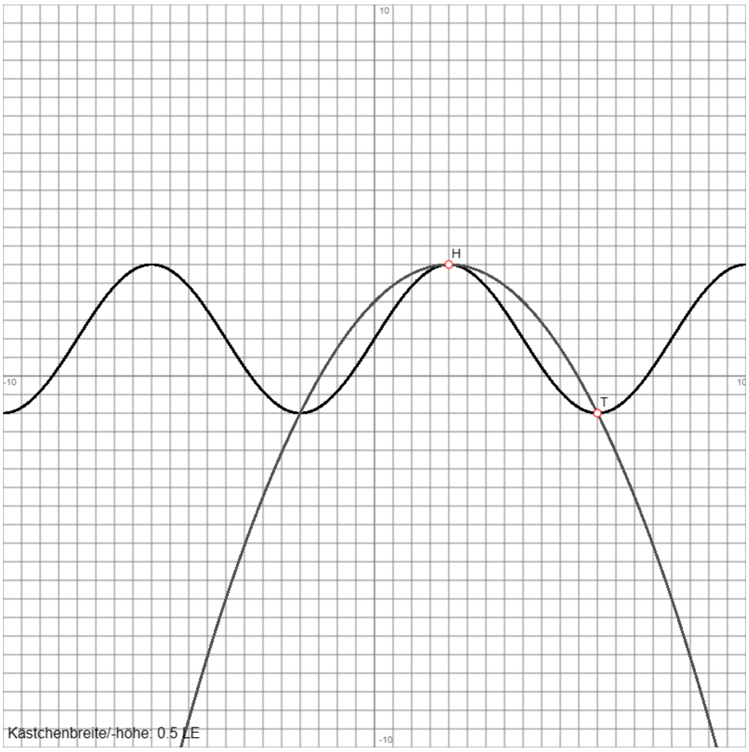
$- \; 4c = -8$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

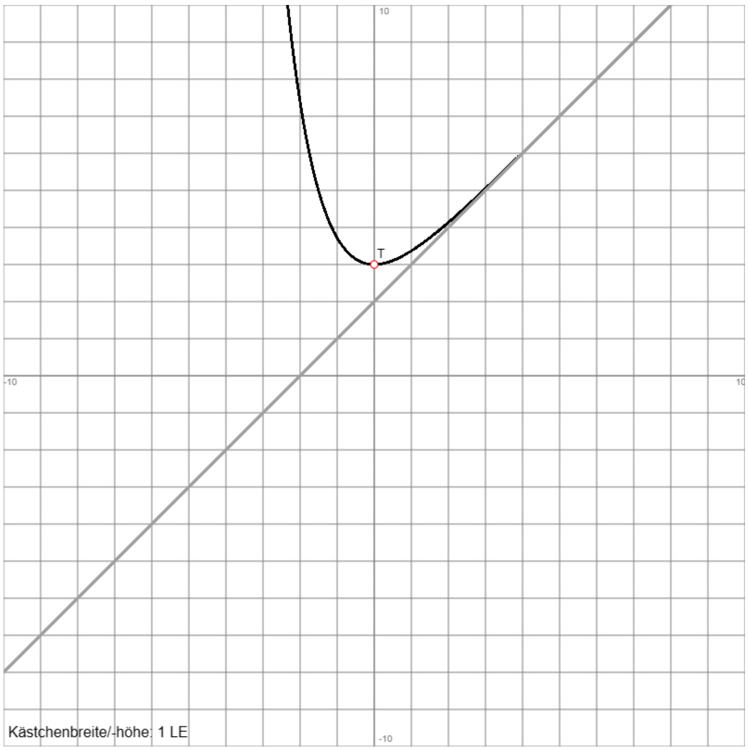
$c = 2$

$b = 1$

$a = -0.25$



d) $f'(x) = -e^{-x}+1$, $f''(x) = e^{-x}$ -> Tiefpunkt T(0|3) oberhalb der x-Achse -> keine Nullstellen, $f''(x) > 0$ -> Linkskrümmung für alle reellen Stellen; e) Integration: $G(x) = -e^{-x}+x^2/2+2x+C$, G(0) = -e -> $G(x) = -e^{-x}+x^2/2+2x+1{,}5$; f) Punkt P(-2|7,39) -> Tangente t: y = -6.389056x - 5.389056 -> y-Achsenabschnitt der Tangente negativ -> Nullstelle der Tangente im Negativen -> positive x-Achse wird nicht geschnitten.



(FE = Flächeneinheiten)