Michael Buhlmann

Mathematik-Berufskolleg
> Analysis II

Einleitung: Die Mathematik-Prüfung zum Berufskolleg beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale, Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): a) Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 4{,}5$ auf Symmetrie und Nullstellen.

b) Im Funktionsterm $g(x) = 3 \cdot \sin(bx) - d$ sind die Koeffizienten b und d zu bestimmen. Dabei beträgt die Periode der trigonometrischen Funktion 4, und die Tiefpunkte des zugehörigen Schaubilds liegen auf der x-Achse des x-y-Koordinatensystems.

c) Berechne die Tangente an die Funktion $h(x) = 4e^{2x} - 8e^{-x}$ an der Stelle x = 0.

d) Löse die Exponentialgleichung:

$$3e^x = 5e^{-2x}.$$

e) Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ + 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ - x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

f) Bestimme zur Funktion $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) - 1$ die Stammfunktion K(x) mit K(1) = 2.

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Betrachtet wird eine Polynomfunktion f(x) 3. Grades.

a) Der Graph der Funktion $f(x) = a(x-b)(x-c)^2$ hat folgendes Aussehen:

Bestimme die Koeffizienten a, b, c.

b) Zeige, dass der Funktionsterm von f(x) in a) identisch ist mit:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4{,}5x - 2\,.$$

Untersuche die Funktion f(x) auf Extrempunkte und Wendepunkte.

c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f(x) und den Achsen des x-y-Koordinatensystems im 4. Quadranten. Die Tangente im Punkt P an die Funktion f(x) teilt diese Fläche in zwei Teile. Berechne die Inhalte der Teilflächen.

Eine Exponentialfunktion ist vom Typ $g(t) = -de^{-0{,}2t} + e$.

d) Die Funktion g(t) beschreibt die Temperaturabnahme eines Heißgetränks mit Anfangstemperatur 90 °C bei Zimmertemperatur 20 °C ab einem Anfangszeitpunkt t = 0 (t in Minuten, g(t) in °C). Bestimme d und e.

e) Wie hoch ist die Temperatur des Getränks 10 Minuten nach dem Einschenken? Um wie viel ist die Temperatur nach 15 Minuten im Vergleich zur Anfangstemperatur zurückgegangen? Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Temperatur des Getränks nur noch 40 °C? Bestimme die momentane Temperaturabnahme zu den Zeitpunkten t = 0 und t = 5. Bestimme die durchschnittliche Temperaturabnahme in den ersten fünf Minuten nach dem Anfangszeitpunkt.

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$.

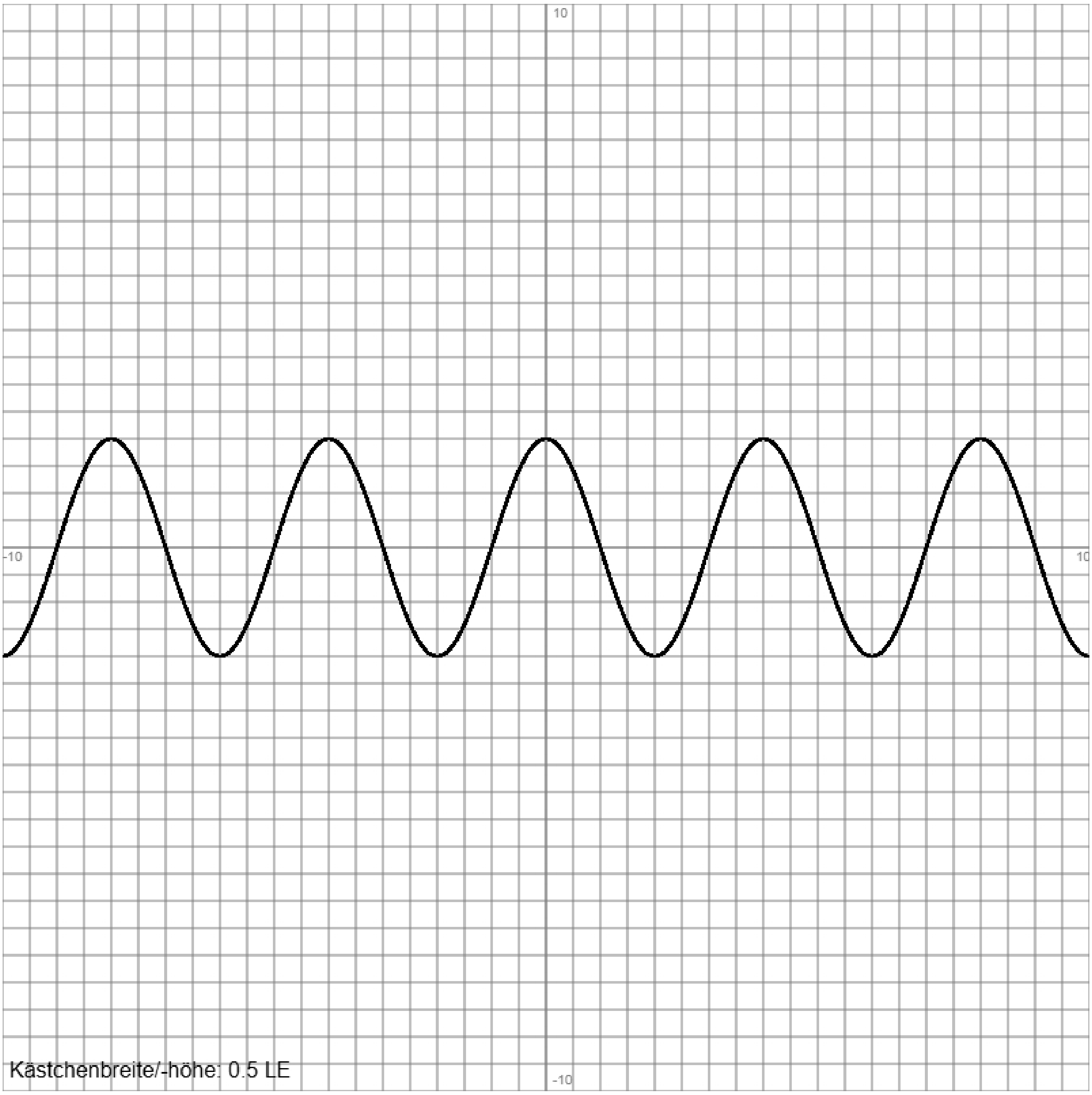
a) Berechne die Nullstellen der Funktion f(x). Zeichne das Schaubild der Funktion in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

b) Zeige, dass die Gerade y = 3x – 6 eine Tangente an die Funktion f(x) darstellt.

c) Der Graph der Funktion f(x) schließt mit der x-Achse zwei Flächen ein. Berechne, wie viel Prozent der kleinere Flächeninhalt vom größeren ausmacht.

Betrachtet werden im Folgenden eine Kosinusfunktion g(x) und eine Sinusfunktion h(x)

d) Bestimme den Funktionsterm von g(x), wenn das nachstehende Schaubild die Funktion darstellt:



e) Die Funktion h(x) besitzt den Hochpunkt H(2|5) und den unmittelbar aufeinanderfolgenden Tiefpunkt T(4|2). Zeichne die Funktion h(x) in das obige x-y-Koordinatensystem ein.

f) Zeige, dass die Hochpunkte der Funktion g(x) die Wendepunkte der Funktion h(x) sind.

g) Die Schaubilder der Funktionen g(x) und h(x) schließen zwischen x = 0 und x = 4 eine Fläche ein. Markiere die Fläche im x-y-Koordinatensystem. Berechne den Flächeninhalt.

Lösungen: 1a) f(-x) = f(x) auf Grund der geraden Exponenten in den Potenzen -> f(x) ist symmetrisch zur y-Achse, f(x) = 0 (Substitution) => x = ±1, x = ±3 als Nullstellen; b) Periode p = 4 -> b = π/2, Tiefpunkte als Nullstellen -> d = 3, Funktion: g(x) = 3sin(πx/2)-3; c) Tangente: t: y = 16x-4; d) Lösung: x = ln(5/3)/3; e) Lineares Gleichungssystem:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 0 \\ + & 2x_1 & - & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \\ - & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(2) - 2*(1) / 1*(3) + 1*(1) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(3) + 2*(2) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 0 \\ & & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & + & 9x_3 & = & 27 \end{array}$$

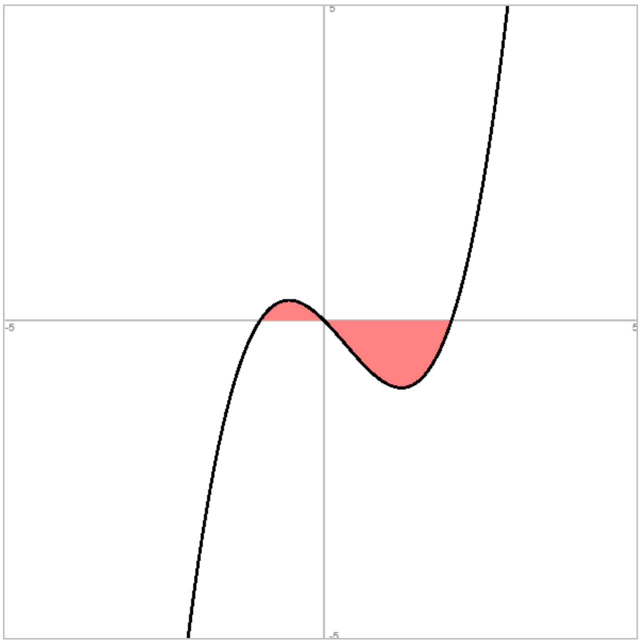
Lösungen des linearen Gleichungssystems:

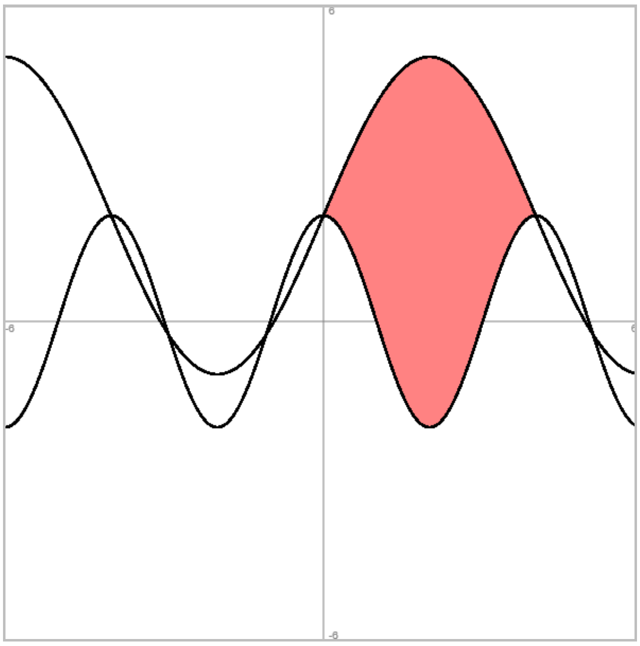
$x_3 = 3$
$x_2 = 2$
$x_1 = 1$

f) K(x) = -cos(πx/2)/π-x+C, K(1) = 2 => C = 3 -> K(x) = -cos(πx/2)/π-x+3.

2a) Nullstellen x = 1 (doppelt), x = 4 (einfach), Punkt P(0|-2) -> a = 0,5, b = 4, c = 1 -> $f(x) = 0{,}5(x-1)^2(x-4)$; b) Umformungen: $f(x) = 0{,}5(x-1)^2(x-4) = 0{,}5(x^2-2x+1)(x-4) = 0{,}5(x^3-4x^2-2x^2+8x+x-4) = 0{,}5(x^3-6x^2+9x-4) = 0{,}5x^3-3x^2+4{,}5x-2$, Ableitungen: $f'(x) = 1{,}5x^2-6x+4{,}5$, $f''(x) = 3x-6$, $f'''(x) = 3$ -> Hochpunkt H(1|0), Tiefpunkt T(3|-2), Wendepunkt W(2|-1); c) Fläche zwischen Funktion und Achsen: $A = -\int_0^1 f(x)dx = 0{,}625$ FE, Tangente t: y = 4,5x-2 -> Tangentendreieck mit den Achsen: $A_1 = 0{,}5\cdot4/9\cdot2 = 4/9$ FE, Restfläche: $A_2 = A-A_1 = 0{,}625-4/9 = 13/72$ FE; d) Waagerechte Asymptote y = 20 -> c = 20, Anfangstemperatur g(0) = 90 -> a = 70, Funktion: $g(t) = 70e^{-0,2t}+20$; e) g(10) = 29,47 °C, 90-g(15) = 66,51 °C, g(t) = 40 => t = 6,26 Minuten, $g'(t) = -14e^{-0,2t}$ -> momentane Änderungsraten g'(0) = -14 °C/Minute, g'(5) = -5,15 °C/Minute, durchschnittliche Änderungsrate m = (g(5)-g(0))/(5-0) = -8,85 °C/Minute.

3a) Nullstellen x = -1, x = 0, x = 2; b) Ansatz. $f'(x) = 1{,}5x^2-x-1 = 3 = y'$ => [x = -4/3], x = 2 mit f(2) = y(2) = 0; c) Flächeninhalte: $A_1 = {}_{-1}\int^0 f(x)\,dx = 5/24$ FE, $A_2 = -{}_0\int^2 f(x)dx = 4/3$ FE -> $A_1/A_2 = 0{,}15625 = 15{,}625$ %; d) Mittellinie d = 0, Amplitude a = 2, Periode p = 4 -> g(x) = 2·cos(πx/2); e) Mittellinie d = 2, Amplitude a = 3, Periode p = 8 -> h(x) = 3·sin(πx/4)+2; f) g'(0) = h''(0) = 0, g'(4) = h''(4) = 0 usw.; g) $A = {}_0\int^4 (h(x)-g(x))dx \approx [-12\cos(\pi x/4)/\pi+4\sin(\pi x/2)/\pi+2x]_0^4 = 24/\pi+8 \approx$ 15,64 FE. – Aufgabe 3a), d); 3e), g):





(°C = Grad Celsius, FE = Flächeneinheiten)