

Matrizen, Determinanten

Gegeben seien im Folgenden quadratische $n \times n$ -Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n . Die Matrizen stellen auf einem reellen (komplexen) Vektorraum

\mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n) als Menge n -dimensionaler Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine endomorphe Abbildung

$f: \mathbf{R}^n$ (\mathbf{C}^n) \rightarrow \mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n) dar. Die identische Abbildung $i: \mathbf{R}^n$ (\mathbf{C}^n) \rightarrow \mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n) wird durch die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) definiert.

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix ist eine quadratische Tabelle, die der Matrix A einen reellen (komplexen) Wert, nämlich $\det(A) = |A|$, zuordnet. Es gilt:

$n=1$: $|a_{11}| = a_{11}$

$n=2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n=3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

$n > 3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-12} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(o.ä., Entwicklungssatz für Determinanten).

Eigenwerte, Eigenvektoren

Für eine quadratische $n \times n$ -Matrix A und die $n \times n$ -Einheitsmatrix E heißt $A - \lambda E$ die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ , $\det(A - \lambda E)$ die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren \vec{x} , die unter der Matrix A als Abbildung um das λ -Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

- Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum $\sigma(A)$. Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius $\rho(A)$.
- Die Spur der Matrix A $\text{Sp}(A)$ ist die Summe ihrer Eigenwerte.
- Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
- Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („ A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
- Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k ($1 \leq k \leq n$) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
- Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***)$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4 , ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A , so heißt ein Vektor \vec{x} , der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ . Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$ zum Eigenwert λ . Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

Beispiele:

a) Zur quadratischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ist die charakteristische Matrix: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$.

Wir bilden die charakteristische Gleichung und stellen sie nach λ um:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = 3 \pm \sqrt{16} = 3 \pm 4 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 7$$

Eigenwerte der Matrix sind: $\lambda = -1, \lambda = 7$. Zu den Eigenwerten bilden wir die Eigenvektoren wie folgt:

$$\underline{\lambda = -1}: (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A + E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ ergibt das lineare Gleichungssystem: } 5x_1 + 5x_2 = 0, 3x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \text{ mit } x_2 = t \text{ (als reeller Parameter), } x_1 = -t \text{ und}$$

daher die Eigenvektoren $t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\underline{\lambda = 7}: (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - 7E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ ergibt das lineare Gleichungssystem: } -3x_1 + 5x_2 = 0, 3x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = 5x_2/3 \text{ mit } x_2 = t \text{ (als reeller}$$

Parameter), $x_1 = 5t/3$ und daher die Eigenvektoren $t \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot t \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 35/3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

b) Die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ besitzt auf Grund ihrer Diagonalgestalt die Eigenwerte: $\lambda = -2, \lambda = 1, \lambda = 3$. Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmen sich als:

$$\underline{\lambda = -2}: (A + 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 1}: (A - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 3}: (A - 3E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (t als reeller Parameter).}$$

Bei Matrizen A in Diagonalgestalt sind also die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des dreidimensionalen

Koordinatensystems Eigenvektoren. Die Eigenvektoren stehen jeweils senkrecht aufeinander, weil die Diagonalmatrix symmetrisch ist.

c) Die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ besitzt auf Grund ihrer Dreiecksgestalt die Eigenwerte:

$\lambda = 2$ (doppelt), $\lambda = 6$ (einfach). Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmen sich als:

$$\underline{\lambda=2}: (A - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda=6}: (A - 6E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (mit reellen Parametern } r, s, t),$$

mithin als: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum $\text{Eig}(A, 2)$ ist zwei-, der Eigenraum $\text{Eig}(A, 6)$ eindimensi-

onal; die Eigenräume entsprechen den Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ bzw. } (A - 6E) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

d) Die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ hat keine reellen Eigenwerte, da gilt:

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 13 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2 - \lambda)(4 - \lambda) + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1,5 \pm \sqrt{1^2 - 5} = 1,5 \pm \sqrt{-4} = 1,5 \pm 2i \Leftrightarrow \lambda = 1,5 - 2i, \lambda = 1,5 + 2i \text{ (} i = \sqrt{-1} \text{ als komplexe Einheit).}$$

Die komplexen Eigenwerte lauten hier also: $\lambda = 1,5 - 2i, \lambda = 1,5 + 2i$, das Spektrum beläuft sich auf:

$$\sigma(A) = \{1,5 - 2i, 1,5 + 2i\}, \text{ der Spektralradius auf: } \rho(A) = |1,5 - 2i| = |1,5 + 2i| = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = \sqrt{2,25 + 4} = \sqrt{6,25} = 2,5.$$