Michael Buhlmann

Mathematik > Matrizenrechnung > Eigenwert, Eigenvektor

Matrizen, Determinanten

Gegeben seien im Folgenden quadratische *n*x*n*-Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Die Matrizen stellen auf einem reellen (komplexen) Vektorraum **R**^{n} (**C**^{n}) als Menge n-dimensionaler Vektoren $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ eine endomorphe Abbildung f: **R**^{n} (**C**^{n}) -> **R**^{n} (**C**^{n}) dar. Die identische Abbildung i: **R**^{n} (**C**^{n}) -> **R**^{n} (**C**^{n}) wird durch die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) definiert.

Die Determinante einer *n*x*n*-Matrix ist eine quadratische Tabelle, die der Matrix A einen reellen (komplexen) Wert, nämlich det(A) = |A|, zuordnet. Es gilt:

n=1: $|a_{11}| = a_{11}$

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} ... a_{2n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n-11} ... a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(o.ä., Entwicklungssatz für Determinanten).

Eigenwerte, Eigenvektoren

Für eine quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

det(A–λE) = 0 (*)

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sich voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

Beispiele:

a) Zur quadratischen Matrix A = $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ist die charakteristische Matrix: A–λE = $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Wir bilden die charakteristische Gleichung und stellen sie nach λ um:

det$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ = 0 ⇔ (4–λ)(2–λ) – 15 = 0 ⇔ λ^2 – 6λ + 8 – 15 = 0 ⇔ λ^2 – 6λ – 7 = 0 ⇔

$\lambda = 3 \pm \sqrt{3^2+7} = 3 \pm \sqrt{16} = 3 \pm 4$ ⇔ λ = -1, λ = 7

Eigenwerte der Matrix sind: λ = -1, λ = 7. Zu den Eigenwerten bilden wir die Eigenvektoren wie folgt:

<u>λ=-1</u>: $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ ⇔ $(A+E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ ⇔ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ergibt das lineare Gleichungssystem: $5x_1+5x_2 = 0$, $3x_1+3x_2 = 0$ ⇔ $x_1+x_2 = 0$ ⇔ $x_1 = -x_2$ mit $x_2 = t$ (als reeller Parameter), $x_1 = -t$ und daher die Eigenvektoren $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>λ=7</u>: $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ ⇔ $(A-7E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ ⇔ $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ergibt das lineare Gleichungssystem: $-3x_1+5x_2 = 0$, $3x_1-5x_2 = 0$ ⇔ $3x_1-5x_2 = 0$ ⇔ $3x_1 = 5x_2$ ⇔ $x_1 = 5x_2/3$ mit $x_2 = t$ (als reeller Parameter), $x_1 = 5t/3$ und daher die Eigenvektoren $t\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot t\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 35/3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

b) Die quadratische Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ besitzt auf Grund ihrer Diagonalgestalt die Eigenwerte: λ = -2, λ = 1, λ = 3. Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmen sich als:

<u>λ=-2</u>: $(A+2E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>λ=1</u>: $(A-E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>λ=3</u>: $(A-3E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t als reeller Parameter).

Bei Matrizen A in Diagonalgestalt sind also die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des dreidimensionalen Koordinatensystems Eigenvektoren. Die Eigenvektoren stehen jeweils senkrecht aufeinander, weil die Diagonalmatrix symmetrisch ist.

c) Die quadratische Matrix A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ besitzt auf Grund ihrer Dreiecksgestalt die Eigenwerte:

λ = 2 (doppelt), λ = 6 (einfach). Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmen sich als:

<u>λ=2</u>: $(A-2E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ => $\overset{->}{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>λ=6</u>: $(A-6E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ => $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ => $\overset{->}{x} = t\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit reellen Parametern r, s, t),

mithin als: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum Eig(A, 2) ist zwei-, der Eigenraum Eig(A, 6) eindimensional; die Eigenräume entsprechen den Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $(A-2E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ bzw. $(A-6E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$.

d) Die quadratische Matrix A = $\begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ hat keine reellen Eigenwerte, da gilt:

det$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 13 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ = 0 ⇔ (-2–λ)(4–λ) + 13 = 0 ⇔ λ^2 – 2λ – 8 + 13 = 0 ⇔ λ^2 – 2λ + 5 = 0 ⇔

$\lambda = 1{,}5 \pm \sqrt{1^2 - 5} = 1{,}5 \pm \sqrt{-4} = 1{,}5 \pm 2i$ ⇔ λ = 1,5–2i, λ = 1,5+2i (i = √-1 als komplexe Einheit).

Die komplexen Eigenwerte lauten hier also: λ = 1,5–2i, λ = 1,5+2i, das Spektrum beläuft sich auf: σ(A) = {1,5–2i; 1,5+2i}, der Spektralradius auf: ρ(A) = |1,5–2i| = |1,5+2i| = $\sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25+4} = \sqrt{6{,}25}$ = 2,5.

---

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 09.2018