Michael Buhlmann

Mathematik > Matrizenrechnung > Hauptachsentransformation bei Kegelschnitten

<u>Matrizen, Determinanten</u>

Gegeben seien im Folgenden quadratische *n*x*n*-<u>Matrizen</u> von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Die Matrizen stellen auf einem reellen (komplexen) Vektorraum **R**^{n} als Menge n-dimensionaler Vektoren $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ eine endomorphe Abbildung f: **R**^{n} -> **R**^{n} dar. Die identische Abbildung i: **R**^{n} -> **R**^{n} wird durch die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) definiert.

Die <u>Determinante</u> einer *n*x*n*-Matrix ist eine quadratische Tabelle, die der Matrix A einen reellen (komplexen) Wert, nämlich det(A) = |A|, zuordnet. Es gilt:

<u>n=1</u>: $\left| a_{11} \right| = a_{11}$

<u>n=2</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>n=3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

<u>n>3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} ... a_{2n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n-11} ... a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(o.ä., Entwicklungssatz für Determinanten).

Eigenwerte, Eigenvektoren

Für eine quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A-\lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist unitär diagonalisierbar, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix bei unitären Matrizen), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die unitäre Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden. Im Fall einer symmetrischen Matrix A stehen bei paarweise verschiedenen Eigenwerten alle Eigenvektoren jeweils senkrecht aufeinander.

Hauptachsentransformation von Kegelschnitten

Die Diagonalisierbarkeit von Matrizen lässt sich nun anwenden auf die allgemeine Kegelschnittgleichung (Quadrik):

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (+),$$

wenn b≠0 gilt. Im Fall b≠0 liegt nämlich der Kegelschnitt gedreht vor, so dass eine Hauptachsentransformation notwendig ist. Der Drehwinkel φ ergibt sich aus der Beziehung:

$$\tan(2\varphi) = \frac{b}{a-c} \text{ (a≠c)}, \ \varphi = 45° \text{ (a=c)}.$$

Gleichung (+) kann nun in Matrixschreibweise geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad (++)$$

mit: A = $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, $\overset{->}{u} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Die Matrix A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Es gibt also eine Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^{-1}AS$, so dass auf Grund von $A = SDS^{-1}$ und $E = SS^{-1}$ die Gleichung (++) zu:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot SDS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^T \cdot SS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

wird. Es folgt mit $\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot S$ (und: $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$):

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \overset{->}{u}^T \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + f = 0,$$

womit die Hauptachsentransformation des Kegelschnitts in ein x*-y*-Koordinatensystem erfolgt ist. Daraus ergibt sich – unter Wegfall des xy-Terms in Gleichung (+) – die Hauptform des Kegelschnitts:

$$a_1x^{*2} + c_1y^{*2} + d_1x^* + e_1x^* + f = 0.$$

Quadratische Ergänzungen führen dann noch auf binomische Formen:

$$a_1(x^*+d_2)^2 + c_1(y^*+e_2)^2 + f_2 = 0,$$

die die Verschiebung des Kegelschnitts im x*-y*-Koordinatensystem anzeigen.

Im Einzelnen lässt sich damit die Hauptachsentransformation von Kegelschnitten in folgenden Schritten durchführen:

Vorgehensweise (d = e = 0):

Schritt 1: Kegelschnittgleichung im x-y-Koordinatensystem: $ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$
-> Koeffizienten a, b, c, f

Schritt 2: [Aufstellen der Matrix A = $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$]

Schritt 3: Charakteristische Gleichung [der Matrix A als:

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2-4ac)/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - (b^2-4ac)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}]$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = \frac{a+c-\sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a+c+\sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}$

Schritt 4: [Aufstellen der Diagonalmatrix D = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$]

Schritt 5: Kegelschnittgleichung im x*-y*-Koordinatensystem: $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + f = 0$

bzw.:

<u>Vorgehensweise</u> (d ≠ 0 oder e ≠ 0):

Schritt 1: Kegelschnittgleichung im x-y-Koordinatensystem: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ex + f = 0$

-> Koeffizienten a, b, c, d, e, f

Schritt 2: [Aufstellen der Matrix A = $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ und des Vektors $\overset{->}{u} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$]

Schritt 3: Charakteristische Gleichung [der Matrix A als:

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2-4ac)/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - (b^2-4ac)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}]$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = \frac{a+c-\sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a+c+\sqrt{a^2-b^2+c^2+6ac}}{2}$

Schritt 4: [Aufstellen der Diagonalmatrix D = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$]

Schritt 5a: [Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$(a-\lambda_1)x+by/2 = 0 \Leftrightarrow x = t, y = 2(\lambda_1-a)t/b$ -> Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\lambda_1-a)}{b} \end{pmatrix}$]

Schritt 5b: [Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$(a-\lambda_2)x+by/2 = 0 \Leftrightarrow x = t, y = 2(\lambda_2-a)t/b$ -> Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\lambda_2-a)}{b} \end{pmatrix}$]

Schritt 5c: [Eigenvektoren stehen zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ stehen senkrecht aufeinander ->

normierte Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_1-a)^2+b^2}} \\ \frac{2(\lambda_1-a)}{\sqrt{4(\lambda_1-a)^2+b^2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_2-a)^2+b^2}} \\ \frac{2(\lambda_2-a)}{\sqrt{4(\lambda_2-a)^2+b^2}} \end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis]

Schritt 5d: [Transformationsmatrix S = $\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}} \\ \frac{2(\lambda_1 - a)}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}} & \frac{2(\lambda_2 - a)}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}} \end{pmatrix}$]

Schritt 5e: Koeffizienten der Summanden der Kegelschnittgleichung mit x* und y* [errechnet aus: $\overset{->T}{u} \cdot S$]:

$$d_1 = \frac{db + 2e(\lambda_1 - a)}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}},\ e_1 = \frac{db + 2e(\lambda_2 - a)}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}}$$

Schritt 6: Kegelschnittgleichung im x*-y*-Koordinatensystem: $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + d_1 x^* + e_1 y^* + f = 0$

Schritt 7: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ->

$$[\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + d_1 x^* + e_1 x^* + f = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (x^{*2} + \frac{d_1}{\lambda_1} x^*) + \lambda_2 (y^{*2} + \frac{e_1}{\lambda_2} y^*) + f = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (x^{*2} + \frac{d_1}{\lambda_1} x^* + \frac{d_1^2}{4\lambda_1^2}) - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 (y^{*2} + \frac{e_1}{\lambda_2} y^* + \frac{e_1^2}{4\lambda_2^2}) - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0 \Leftrightarrow]$$

$$\lambda_1 (x^* + \frac{d_1}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y^* + \frac{e_1}{2\lambda_2})^2 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ->

$$\lambda_2 (y^* + \frac{e_1}{2\lambda_2})^2 + d_1 x - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ ->

$$\lambda_1 (x^* + \frac{d_1}{2\lambda_1})^2 + e_1 y - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + f = 0$$

als hauptachsentransformierte Kegelschnitte.

Arten von Kegelschnitten

Kegelschnitte sind zweidimensionale Schnittmengen (Kurven) eines unendlichen (Doppel-) Kegels mit einer Ebene im dreidimensionalen Raum. Ausgehend von der allgemeinen Kegelschnittgleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \ (+)$$

lassen sich die Determinanten Δ, δ und eine Kennzahl S bilden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},\ \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},\ S = a+c.$$

Dann gilt der Überblick:

	δ>0		δ=0	δ<0
	S<0	S>0		
Δ>0	Ellipse Kreis (a=c, b=0)		Parabel	Hyperbel
Δ=0	Imaginäres Geradenpaar	Imaginäres Geradenpaar	Paralleles Geradenpaar	Reelles Geradenpaar
Δ<0		Ellipse Kreis (a=c, b=0)	Parabel	Hyperbel

Allgemein ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (+), die einen Kegelschnitt beschreibt, nach y auflösbar vermöge:

$c \neq 0$:

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Umstellen)
$cy^2 + (bx+e)y + ax^2 + dx + f = 0$ (abc-Formel)

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + (2be - 4cd)x + e^2 - 4cf}}{2c}.$$

$c=0,\ e \neq 0$:

$ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0$ (Umstellen)
$(bx+e)y + ax^2 + dx + f = 0$ | $-ax^2-dy-f$
$(bx+e)y = -ax^2 - dx - f$ | $:(bx+e)$

$$y = -\frac{ax^2 + dx + f}{bx + e}$$

Das ± in dem einen y-Term steht für die zwei Äste der Kegelschnittkurve im x-y-Koordinatensystem.

Literaturhinweise: NICKEL, H., KETTWIG, G., BEINHOFF, H., PAULI, W., KREUL, H., LEUPOLD, W., Algebra und Geometrie für Ingenieure, Thun [15]1988, S.434-446; REINHARDT, F., dtv-Atlas Schulmathematik (= dtv 3099), München [3]2003, S.220f; REINHARDT, F., SOEDER, H., dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Bd.1: Grundlagen, Algebra und Geometrie (= dtv 3007), München 1974, S.196f (Kegelschnitte).

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 05.2021