

Mathematik > Matrizenrechnung

> Hauptachsentransformation bei Kegelschnitten

Matrizen, Determinanten

Gegeben seien im Folgenden quadratische $n \times n$ -Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n . Die Matrizen stellen auf einem reellen (komplexen) Vektorraum

\mathbb{R}^n als Menge n -dimensionaler Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine endomorphe Abbildung

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dar. Die identische Abbildung $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird durch die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) definiert.

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix ist eine quadratische Tabelle, die der Matrix A einen reellen (komplexen) Wert, nämlich $\det(A) = |A|$, zuordnet. Es gilt:

$n=1$: $|a_{11}| = a_{11}$

$n=2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n=3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

$n>3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-12} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(o.ä., Entwicklungssatz für Determinanten).

Eigenwerte, Eigenvektoren

Für eine quadratische $n \times n$ -Matrix A und die $n \times n$ -Einheitsmatrix E heißt $A - \lambda E$ die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ , $\det(A - \lambda E)$ die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren \vec{x} , die unter der Matrix A als Abbildung um das λ -Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

- Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum $\sigma(A)$. Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius $\rho(A)$.
- Die Spur der Matrix A $\text{Sp}(A)$ ist die Summe ihrer Eigenwerte.
- Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
- Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
- Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k ($1 \leq k \leq n$) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
- Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***)$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4 , ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A , so heißt ein Vektor \vec{x} , der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ . Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$ zum Eigenwert λ . Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Eine reelle quadratische $n \times n$ -Matrix A ist unitär diagonalisierbar, wenn es eine reelle $n \times n$ -Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix bei unitären Matrizen), so dass

$$D = S^{-1} A S$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die unitäre Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom $\det(A-\lambda E)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums \mathbf{R}^n bilden. Im Fall einer symmetrischen Matrix A stehen bei paarweise verschiedenen Eigenwerten alle Eigenvektoren jeweils senkrecht aufeinander.

Hauptachsentransformation von Kegelschnitten

Die Diagonalisierbarkeit von Matrizen lässt sich nun anwenden auf die allgemeine Kegelschnittgleichung (Quadrik):

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (+),$$

wenn $b \neq 0$ gilt. Im Fall $b \neq 0$ liegt nämlich der Kegelschnitt gedreht vor, so dass eine Hauptachsentransformation notwendig ist. Der Drehwinkel φ ergibt sich aus der Beziehung:

$$\tan(2\varphi) = \frac{b}{a-c} \quad (a \neq c), \quad \varphi = 45^\circ \quad (a=c).$$

Gleichung (+) kann nun in Matrixschreibweise geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad (++)$$

mit: $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Die Matrix A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Es

gibt also eine Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^{-1}AS$, so dass auf Grund von $A = SDS^{-1}$ und $E = SS^{-1}$ die Gleichung (++) zu:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot SDS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot SS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

wird. Es folgt mit $\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot S$ (und: $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$):

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + f = 0,$$

womit die Hauptachsentransformation des Kegelschnitts in ein x^*-y^* -Koordinatensystem erfolgt ist. Daraus ergibt sich – unter Wegfall des xy -Terms in Gleichung (+) – die Hauptform des Kegelschnitts:

$$a_1x^{*2} + c_1y^{*2} + d_1x^* + e_1y^* + f = 0.$$

Quadratische Ergänzungen führen dann noch auf binomische Formen:

$$a_1(x^*+d_2)^2 + c_1(y^*+e_2)^2 + f_2 = 0,$$

die die Verschiebung des Kegelschnitts im x^*-y^* -Koordinatensystem anzeigen.

Im Einzelnen lässt sich damit die Hauptachsentransformation von Kegelschnitten in folgenden Schritten durchführen:

Vorgehensweise ($d = e = 0$):

Schritt 1: Kegelschnittgleichung im x - y -Koordinatensystem: $ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$

-> Koeffizienten a, b, c, f

Schritt 2: [Aufstellen der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$]

Schritt 3: Charakteristische Gleichung [der Matrix A als:

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2-4ac)/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - (b^2-4ac)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}]$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = \frac{a+c - \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a+c + \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}$

Schritt 4: [Aufstellen der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$]

Schritt 5: Kegelschnittgleichung im x^*-y^* -Koordinatensystem: $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + f = 0$

bzw.:

Vorgehensweise ($d \neq 0$ oder $e \neq 0$):

Schritt 1: Kegelschnittgleichung im $x-y$ -Koordinatensystem: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ex + f = 0$
 -> Koeffizienten a, b, c, d, e, f

Schritt 2: [Aufstellen der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ und des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$]

Schritt 3: Charakteristische Gleichung [der Matrix A als:

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2-4ac)/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - (b^2-4ac)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}]$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = \frac{a+c - \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a+c + \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 6ac}}{2}$

Schritt 4: [Aufstellen der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$]

Schritt 5a: [Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$(a-\lambda_1)x + by/2 = 0 \Leftrightarrow x = t, y = 2(\lambda_1 - a)t/b \rightarrow \text{Eigenvektor} \left(\frac{1}{2(\lambda_1 - a)}, \frac{1}{b} \right)^T]$$

Schritt 5b: [Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$(a-\lambda_2)x + by/2 = 0 \Leftrightarrow x = t, y = 2(\lambda_2 - a)t/b \rightarrow \text{Eigenvektor} \left(\frac{1}{2(\lambda_2 - a)}, \frac{1}{b} \right)^T]$$

Schritt 5c: [Eigenvektoren stehen zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ stehen senkrecht aufeinander ->

normierte Eigenvektoren $\left(\frac{b}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}}, \frac{2(\lambda_1 - a)}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}} \right)^T, \left(\frac{b}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}}, \frac{2(\lambda_2 - a)}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}} \right)^T$ als Orthonormalbasis]

Schritt 5d: [Transformationsmatrix $S = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}} \\ \frac{2(\lambda_1 - a)}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}} & \frac{2(\lambda_2 - a)}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}} \end{pmatrix}$]

Schritt 5e: Koeffizienten der Summanden der Kegelschnittgleichung mit x^* und y^* [errechnet aus: $\xrightarrow{T} u \cdot S$]:

$$d_1 = \frac{db + 2e(\lambda_1 - a)}{\sqrt{4(\lambda_1 - a)^2 + b^2}}, \quad e_1 = \frac{db + 2e(\lambda_2 - a)}{\sqrt{4(\lambda_2 - a)^2 + b^2}}$$

Schritt 6: Kegelschnittgleichung im x^*-y^* -Koordinatensystem: $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + d_1 x^* + e_1 y^* + f = 0$

Schritt 7: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \rightarrow$

$$[\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + d_1 x^* + e_1 y^* + f = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (x^{*2} + \frac{d_1}{\lambda_1} x^*) + \lambda_2 (y^{*2} + \frac{e_1}{\lambda_2} y^*) + f = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (x^{*2} + \frac{d_1}{\lambda_1} x^* + \frac{d_1^2}{4\lambda_1^2}) - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 (y^{*2} + \frac{e_1}{\lambda_2} y^* + \frac{e_1^2}{4\lambda_2^2}) - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0 \Leftrightarrow]$$

$$\lambda_1 (x^* + \frac{d_1}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y^* + \frac{e_1}{2\lambda_2})^2 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0 \rightarrow$

$$\lambda_2 (y^* + \frac{e_1}{2\lambda_2})^2 + d_1 x - \frac{e_1^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow$

$$\lambda_1 (x^* + \frac{d_1}{2\lambda_1})^2 + e_1 y - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + f = 0$$

als hauptachsentransformierte Kegelschnitte.

Arten von Kegelschnitten

Kegelschnitte sind zweidimensionale Schnittmengen (Kurven) eines unendlichen (Doppel-)Kegels mit einer Ebene im dreidimensionalen Raum. Ausgehend von der allgemeinen Kegelschnittgleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 (+)$$

lassen sich die Determinanten Δ , δ und eine Kennzahl S bilden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad S = a+c.$$

Dann gilt der Überblick:

	$\delta > 0$	$\delta = 0$	$\delta < 0$
	$S < 0$	$S > 0$	
$\Delta > 0$	Ellipse Kreis ($a=c, b=0$)		Parabel Hyperbel
$\Delta = 0$	Imaginäres Geradenpaar	Imaginäres Geradenpaar	Paralleles Geradenpaar Reelles Geradenpaar
$\Delta < 0$		Ellipse Kreis ($a=c, b=0$)	Parabel Hyperbel

Allgemein ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (+), die einen Kegelschnitt beschreibt, bei nach y auflösbar vermöge:

$c \neq 0$:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (\text{Umstellen})$$

$$cy^2 + (bx+e)y + ax^2 + dx + f = 0 \quad (\text{abc-Formel})$$

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + (2be - 4cd)x + e^2 - 4cf}}{2c}.$$

$c=0, e \neq 0$:

$$ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0 \quad (\text{Umstellen})$$

$$(bx+e)y + ax^2 + dx + f = 0 \quad | -ax^2 - dx - f$$

$$(bx+e)y = -ax^2 - dx - f \quad | : (bx+e)$$

$$y = -\frac{ax^2 + dx + f}{bx + e}$$

Das \pm in dem einen y -Term steht für die zwei Äste der Kegelschnittkurve im x - y -Koordinatensystem.

Literaturhinweise: NICKEL, H., KETTWIG, G., BEINHOFF, H., PAULI, W., KREUL, H., LEUPOLD, W., Algebra und Geometrie für Ingenieure, Thun ¹⁵1988, S.434-446; REINHARDT, F., dtv-Atlas Schulmathematik (= dtv 3099), München ³2003, S.220f; REINHARDT, F., SOEDER, H., dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Bd.1: Grundlagen, Algebra und Geometrie (= dtv 3007), München 1974, S.196f (Kegelschnitte).