Matrixinversion

Matrixinversionen betreffen quadratische *nxn*-Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Falls existent, erfüllt eine zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} die Matrizengleichung (mit Matrizenmultiplikation):

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

mit der Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) als Ergebnis.

Allgemein lässt sich eine Matrixinversion mit Hilfe des sog. Gaußschen Algorithmus durchführen; es ergibt sich folgende Vorgehensweise:

Vorgehensweise
1) Das Anfangstableau für den Gauß-Algorithmus ist von der Form: $$A \mid E$$ d.h.: $$\begin{array}{cccc\|cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}$$
2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter und über der Hauptdiagonalen der Matrix A der linken Seite des Tableaus wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend in Zeile 1 und mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 1 bzw. Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau der Matrix A. Dieselben Umformungen (1. Schritt usw.) werden – parallel zu den Umformungen der Matrix A – auf der rechten Seite des Tableaus für die Einheitsmatrix E durchgeführt. Es entsteht insgesamt ein Tableau, das die folgenden zwei Fälle impliziert:
Fall I – Invertierbarkeit: 3/I) Ist in diesem Tableau im Bereich der linken Seite die Diagonalgestalt mit den Hauptdiagonalelementen a, b, … gegeben, so folgt die Invertierbarkeit der Matrix A. Die inverse Matrix A^{-1} folgt aus der Division der 1. Zeile des Tableaus durch a, der 2. Zeile durch b

usw. Die linke Seite des dadurch erhaltenen Endtableaus ist die Einheitsmatrix E, die rechte stellt die inverse Matrix A^{-1} dar:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ... & 0 & a^*_{11} & a^*_{12} & ... & a^*_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & a^*_{21} & a^*_{22} & ... & a^*_{2n} \\ ... & & & & ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & a^*_{n1} & a^*_{n2} & ... & a^*_{nn} \end{array}$$

d.h.:

$$E \mid A^{-1}$$

Fall II – keine Invertierbarkeit: 3/II) Das (End-) Tableau enthält im Bereich der linken Seite Nullzeilen. Eine inverse Matrix kann daher nicht ermittelt werden und existiert nicht.

Beispiele:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Matrix A | Einheitsmatrix E ->

Anfangstableau:

-1 3 | 1 0
2 5 | 0 1

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*) /

-1 3 | 1 0
0 11 | 2 1

2. Schritt: 11*(*1*) - 3*(*2*) /

-11 0 | 5 -3
0 11 | 2 1

Teilen: (*1*):(-11) / (*2*):11 /

1 0 | -5/11 3/11
0 1 | 2/11 1/11

-> Einheitsmatrix E | Matrix A^{-1}

-> Inverse Matrix existiert.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/11 & 3/11 \\ 2/11 & 1/11 \end{pmatrix}$

b) A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Matrix A | Einheitsmatrix E ->
<u>Anfangstableau</u>:

2 4 -1 | 1 0 0
-4 2 1 | 0 1 0
2 -1 -4 | 0 0 1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 2*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

2 4 -1 | 1 0 0
0 10 -1 | 2 1 0
0 -5 -3 | -1 0 1

<u>2. Schritt</u>: 5*(*1*) - 2*(*2*) / 2*(*3*) + 1*(*2*) /

10 0 -3 | 1 -2 0
0 10 -1 | 2 1 0
0 0 -7 | 0 1 2

<u>3. Schritt</u>: -7*(*1*) + 3*(*3*) / -7*(*2*) + 1*(*3*) /

-70 0 0 | -7 17 6
0 -70 0 | -14 -6 2
0 0 -7 | 0 1 2

<u>Teilen</u>: (*1*):(-70) / (*2*):(-70) / (*3*):(-7) /

1 0 0 | 1/10 -17/70 -3/35
0 1 0 | 1/5 3/35 -1/35
0 0 1 | 0 -1/7 -2/7

-> Einheitsmatrix E | Matrix A^{-1}
-> Inverse Matrix existiert.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -17/70 & -3/35 \\ 1/5 & 3/35 & -1/35 \\ 0 & -1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

c) A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Matrix A | Einheitsmatrix E ->
<u>Anfangstableau</u>:

2 -2 3 | 1 0 0
-3 5 4 | 0 1 0
1 1 10 | 0 0 1

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) + 3*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*) /

2 -2 3 | 1 0 0
0 4 17 | 3 2 0
0 4 17 | -1 0 2

<u>2. Schritt</u>: 2*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) /

4 0 23 | 5 2 0
0 4 17 | 3 2 0
0 0 0 | -4 -2 2

<u>3. Schritt</u>: (keine Umformung) /

4 0 23 | 5 2 0
0 4 17 | 3 2 0
0 0 0 | -4 -2 2

-> Inverse Matrix existiert nicht.

A^{-1} existiert nicht.

d) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matrix A | Einheitsmatrix E ->

Anfangstableau:

$\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

1. Schritt: (keine Umformung) /

$\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

3. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) /

$\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

4. Schritt: -2*(*1*) + 3*(*4*) / 2*(*2*) + 1*(*4*) /
2*(*3*) + 1*(*4*) /

$\begin{array}{rrrr|rrrr} -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

Teilen: (*1*):(-4) / (*2*):(-6) / (*3*):(-2) / (*4*):(-2) /

$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}$

-> Einheitsmatrix E | Matrix A^{-1}

-> Inverse Matrix existiert.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$