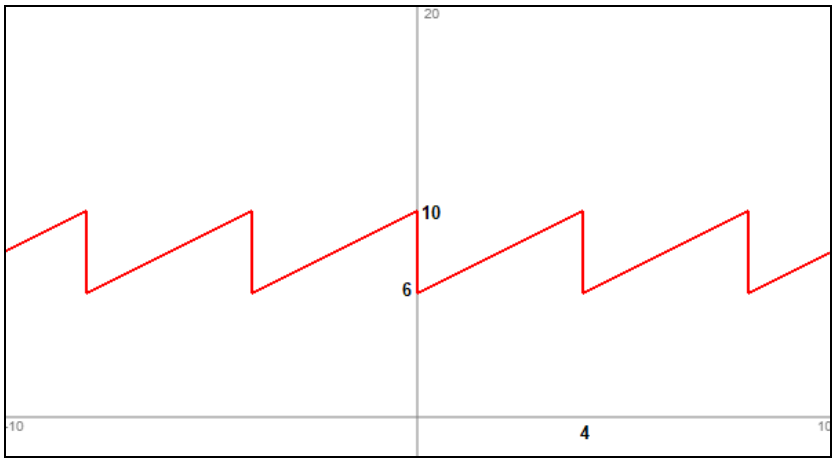
Michael Buhlmann

Physikaufgaben
> Elektrotechnik
> Sägezahnspannung

Aufgabe: Die nachstehende Sägezahnspannung ist die periodische Wiederholung einer von 6 V auf 10 V linear ansteigenden Spannung u(t). Die Periode sei dabei: T = 4 s.



a) Bestimme die lineare Funktionsgleichung u(t) und stelle die Sägezahnspannung in einer Fourierreihe dar.

b) Berechne den Betragsmittelwert $|\overline{u}|$ der Sägezahnspannung u(t).

c) Berechne den Effektivwert u_{eff} der Sägezahnspannung u(t).

(Physikalische Einheiten: s = Sekunde, V = Volt)

Lösung: a) I. Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Geraden ist ein (Funktions-) Term von der Form g: y = mx + c mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so ermittelt sich die Gerade gemäß der Zweipunkteform durch Errechnen der Geradensteigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (mit Hilfe der Koordinaten der Punkte P, Q), durch Einsetzen von m in die Geradengleichung y = mx + c und durch anschließende Punktprobe mit dem Punkt $P(x_1|y_1)$ (oder Q); Umstellen der Gleichung $y_1 = mx_1 + c$ (oder $y_2 = mx_2 + c$) ergibt den Wert des y-Achsenabschnitts $c = y_1 - mx_1$ (oder $c = y_2 - mx_2$).

II. Wir haben den Ansatz u(t) = mt + c. Weiter liegen die Punkte P(0|6) und Q(4|10) auf dem Graphen der Spannung u(t). Gemäß I. bestimmt sich die Steigung m als:

m = (10-6)/(4-0) = 4/4 = 1,

der y-Achsenabschnitt c ist wegen des Punktes P(0|6)

c = 6.

Der Graph der Sägezahnspannung wird damit beschrieben durch:

u(t) = t + 6 (u(t) [V], t [s]).

III. Eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen kann in eine reelle Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(k\omega x)dx.$$

IV. Zu u(t) = t + 6 berechnen wir die Fourierkoeffizienten mit: T = 4 => $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ und:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 (t+6)dt = \frac{1}{2}\int_0^4 (t+6)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2 + 6t\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 6\cdot 4 - 0\right) = 16$$

$$a_k = \frac{2}{4}\int_0^4 (t+6)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}kt)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^4 t\cdot\cos(\frac{\pi}{2}kt)dt + \int_0^4 6\cdot\cos(\frac{\pi}{2}kt)dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi k}t\sin(\frac{\pi}{2}kt) + \frac{4}{\pi^2k^2}\cos(\frac{\pi}{2}kt) + \frac{12}{\pi k}\sin(\frac{\pi}{2}kt)\right]_0^4 =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi k}(t+6)\sin(\frac{\pi}{2}kt) + \frac{4}{\pi^2k^2}\cos(\frac{\pi}{2}kt)\right]_0^4 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{\pi k}(4+6)\sin(2\pi k) + \frac{4}{\pi^2k^2}\cos(2\pi k)\right) - \left(\frac{2}{\pi k}(0+6)\sin(0) + \frac{4}{\pi^2k^2}\cos(0)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2k^2} - \frac{4}{\pi^2k}\right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_0^4 (t+6)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}kt)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^4 t\cdot\sin(\frac{\pi}{2}kt)dt + \int_0^4 6\cdot\sin(\frac{\pi}{2}kt)dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi k}t\cos(\frac{\pi}{2}kt) + \frac{4}{\pi^2k^2}\sin(\frac{\pi}{2}kt) - \frac{12}{\pi k}\cos(\frac{\pi}{2}kt)\right]_0^4 =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi k}(t+6)\cos(\frac{\pi}{2}kt) + \frac{4}{\pi^2k^2}\sin(\frac{\pi}{2}kt)\right]_0^4 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{2}{\pi k}(4+6)\cos(2\pi k) + \frac{4}{\pi^2k^2}\sin(2\pi k)\right) - \left(-\frac{2}{\pi k}(0+6)\cos(0) + \frac{4}{\pi^2k^2}\sin(0)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{20}{\pi k} + \frac{12}{\pi k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{\pi k} = \frac{-4}{\pi k}.$$

Die Fourierreihe lautet somit:

$$u(t) = 8 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k\omega t)}{k}.$$

b) I. Zu einer auf dem Intervall [a; b] definierten reellwertigen integrierbaren Funktion f(x) berechnet sich ihr Mittelwert vermöge des Integrals:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

II. Wegen u(t) = t + 6 > 0 auf dem Periodenintervall [0; 4] berechnet sich der Betragsmittelwert $\left|\overline{u}\right|$ der Sägezahnspannung u(t) wie folgt:

$$\left|\overline{u}\right| = \frac{1}{4-0}\int_0^4 u(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^4 (t+6)dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2 + 6t\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 6\cdot 4 - 0\right) = \frac{1}{4}\cdot 32 = 8 \text{ V}$$

(und stimmt damit mit dem ersten Summanden der Fourierreihe überein).

III. Auch mit einfachen geometrischen Mitteln lässt sich der Betragsmittelwert $\left|\overline{u}\right|$ ausrechnen. Und zwar schließen auf dem Periodenintervall [0; 4] Funktion u(t) und x-Achse eine Trapezfläche A_{Tr} mit den parallelen Seiten a = 6 V und c = 10 V sowie der Höhe h = 4 s ein. Es gilt:

$$A_{Tr} = \frac{a+c}{2}\cdot h = \frac{6+10}{2}\cdot 4 = 32$$

und damit für den Betragsmittelwert:

$$\left|\overline{u}\right| = \frac{1}{4}A_{Tr} = \frac{1}{4}\cdot 32 = 8 \text{ V}.$$

c) I. In der Physik ist die Effektivspannung u_{eff} einer T-periodischen Spannung u(t) gleich:

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(u(t)\right)^2 dt} .$$

II. Wir berechnen das vorstehende Integral für die Sägezahnspannungskurve u(t) = t + 6 wie folgt:

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{4}\int_0^4 \left(u(t)\right)^2 dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^4 \left(t+6\right)^2 dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{3}(t+6)^3\right]_0^4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 10^3 - \frac{1}{3}\cdot 6^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{784}{3}} = 8{,}083$$

und haben damit die Effektivspannung u_{eff} = 8,083 V.