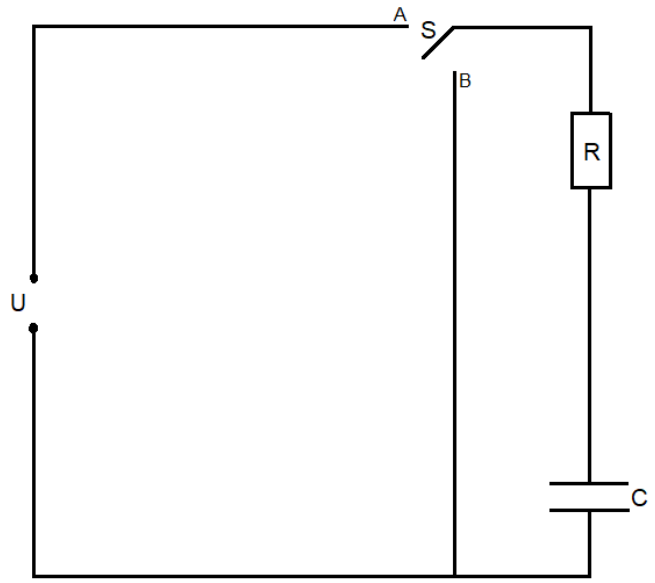
Michael Buhlmann

Physikaufgaben
> Elektrotechnik
> Stromkreis mit Widerstand und Kondensator

Aufgabe: Gegeben ist der folgende Stromkreis mit Spannungsquelle (U), Widerstand (R), Kondensator (C) und Schalter (S, Schalterpositionen: A, B). Es gilt: U_0 = 10 V, R = 100 Ω, C = 100 mF.



a) Der Schalter S ist auf der Position A, der Kondensator nicht geladen. Berechne, wie sich Spannung U, Stromstärke I und Kondensatorladung Q nach dem Einschalten des Schalters im Stromkreis verändern.

b) Der Schalter S ist auf der Position B. Berechne, wie sich Spannung U, Stromstärke I und Kondensatorladung Q nach dem Einschalten des Schalters im Stromkreis verändern.

(Physikalische Einheiten: A = Ampere, As = Amperesekunde = C = Coulomb, F = Farad, m = Milli, Ω = Ohm, s = Sekunde, V = Volt)

Lösung: a) I. Im äußeren Stromkreis wird bei Schalterstellung A der Kondensator aufgeladen. Die maximale Ladung, die der Kondensator aufgrund seiner Kapazität C = 100 mF = 0,1 F aufnehmen kann, ist: $Q_{max} = C \cdot U_0$ = 0,1 F·10 V = 1 C = 1 As. Der Ladungsaufbau auf dem Kondensator erfolgt von 0 C auf 1 C vermöge der Differenzialgleichung:

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{U_0}{R}\text{, Q(0) = 0 C (*)}$$

gemäß:

$$Q(t) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ (**) => } Q(t) = 1 - e^{-\frac{t}{10}} \text{ C}$$

mit: τ = RC = 100 Ω·0,1 F = 10 s als Zeitkonstante.

II. Gemäß dem Ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I} \Leftrightarrow I = \frac{U}{R}$ gilt für die Stromstärke I_{max} am Anfang des Aufladevorgangs $I_{\max} = \frac{U_0}{R} = \frac{10V}{100\Omega} = 0{,}1$ A, so dass sich gemäß (*) und (**) mit $\dot{Q}(t) = I(t)$ ergibt:

$$I(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{U_0}{R} \Leftrightarrow$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) =$$

$$\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = I_{\max} - I_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = I_{\max}\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = I_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Die Stromstärke nimmt also beim Aufladen des Kondensators ab; es gilt im äußeren Stromkreis:

$I(t) = 0{,}1 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ A (***).

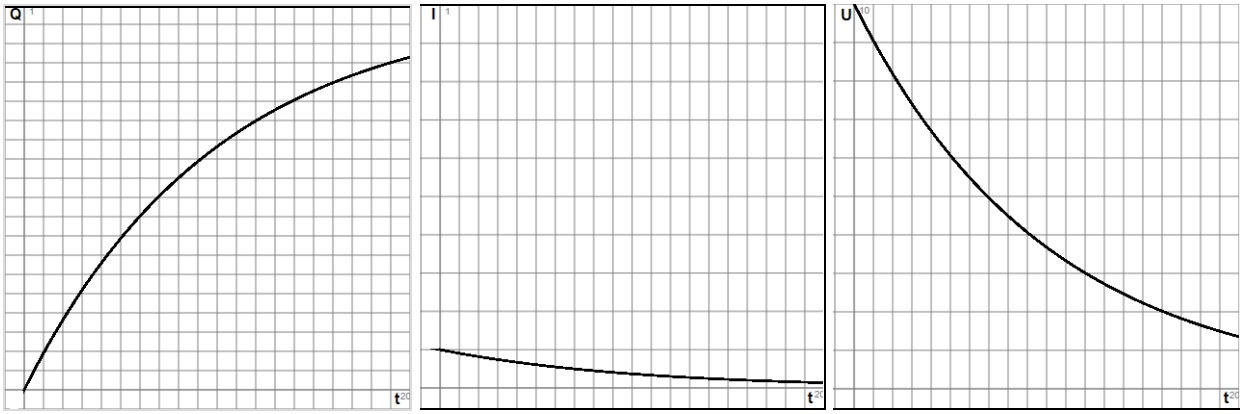
III. Auch die Spannung U am Widerstand nimmt ab. Es gilt mit dem Ohmschen Gesetz U = I·R und wegen (***):

$$I(t) = I_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow U(t) = I(t) \cdot R = I_{\max} \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}},$$

woraus folgt:

$U(t) = 10 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ V.

IV. Die Graphen der Funktionen Q(t), I(t), U(t) auf [0; 2τ] = [0; 20] haben das Aussehen:



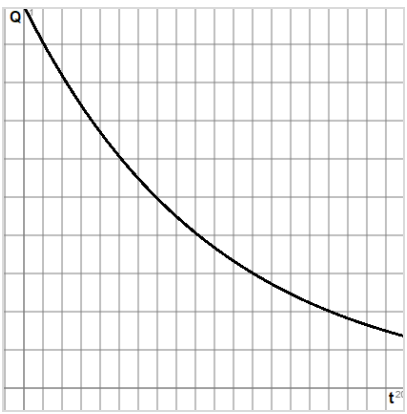
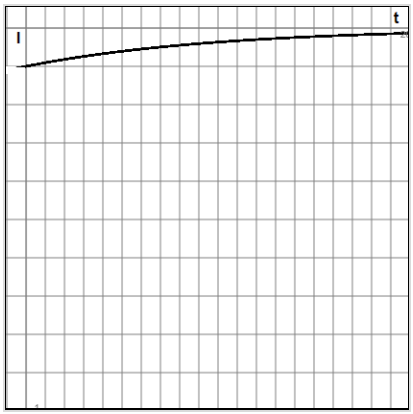
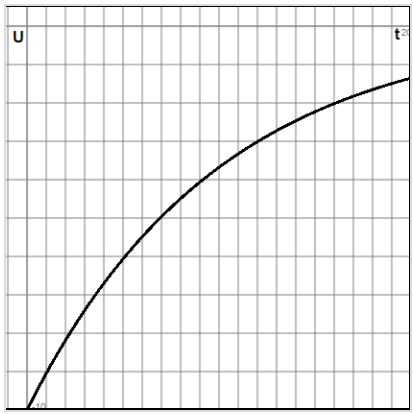
b) I. Während der Schalter S auf Position A das Einschalten des Widerstand-Kondensator-Stromkreises bewirkt, führt der Schalter auf Position B im rechten Stromkreis zum Entladen des Kondensators. Dementsprechend gilt:

$Q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow Q(t) = e^{-\frac{t}{10}}$ C

$I(t) = -I_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I(t) = -0{,}1 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ A

$U(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow U(t) = -10 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ V.

Im Hintergrund steht die Differenzialgleichung für das Entladen eines Kondensators:

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = 0 \text{ , } Q(0) = \frac{U_0}{R} \text{ C.}$$

II. Die Graphen der Funktionen Q(t), I(t), U(t) auf [0; 2τ] = [0; 20] haben nun das Aussehen: