Michael Buhlmann

Physikaufgaben
> Mechanik
> Brunnentiefe und Schall

Aufgabe: Ein Stein wird in einen Brunnen geworfen. Nach 3 Sekunden hört man den Aufprall. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Schallgeschwindigkeit $v_{Schall} = 330 \frac{m}{s}$ beträgt?

Lösung: Die Tiefe des Brunnens werde mit s [m] bezeichnet. Die Zeit t = 3 s setzt sich aus der Zeit t_1 für den freien Fall des Steins im Brunnen bis zum Aufschlag auf das Wasser (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) und der Zeit t_2, die der Schall zum Durchqueren der Brunnentiefe benötigt (gleichförmige Bewegung), zusammen; Stein und Schall legen also die jeweils die Brunnentiefe zurück. Es gilt damit:

$t = t_1 + t_2$ (*).

Für t_1 gilt nach den Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$s = \frac{1}{2} g t_1^2 \Leftrightarrow \frac{2s}{g} = t_1^2 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad (**)$$

mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ als der Erdbeschleunigung. Für t_2 gilt nach den Formeln für die gleichförmige Bewegung:

$$v_{Schall} = \frac{s}{t_1} \Leftrightarrow t_1 = \frac{s}{v_{Schall}} \quad (***)$$

mit $v_{Schall} = 330 \frac{m}{s}$. Wir setzen die Beziehungen (**) und (***) in die Gleichung (*) ein und erhalten mit t = 3 s:

$$3 = t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{330}.$$

Wegen $\sqrt{\frac{2}{g}} = 0{,}45152$ ergibt sich die folgende quadratische Gleichung in √s:

$$3 = 0{,}45152\sqrt{s} + \frac{1}{330}s \Leftrightarrow 0{,}00303s + 0{,}45152\sqrt{s} - 3 = 0.$$

Vermöge der Substitution u = √s erhalten wir eine quadratische Gleichung in u:

$$0{,}00303u^2 + 0{,}45152u - 3 = 0$$

mit den Lösungen:

$$u_{1,2} = \frac{-0{,}45152 \pm \sqrt{0{,}45152^2 - 4 \cdot 0{,}00303 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0{,}00303} = \frac{-0{,}45152 \pm 0{,}49013}{0{,}00606}.$$

Die Lösung u_1 entfällt wegen $u_1 < 0$, die Lösung u_2 ist: $u_2 = \frac{-0{,}45152 + 0{,}49013}{0{,}00606} = 6{,}3718$. Das Quadrieren von u_2 (Rücksubstitution $s = u^2$) ergibt: $s = 6{,}3718^2 = 40{,}6$ m als gesuchte Brunnentiefe.

www.michael-buhlmann.de / 03.2019 / Aufgabe 1