

Physikaufgaben

> Mechanik

> Schräger Wurf nach oben

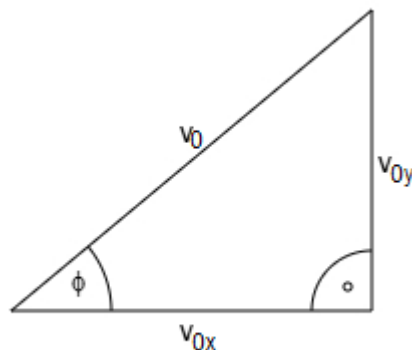
Aufgabe: Kugelstoßen ist eine olympische Sportart der Leichtathletik. Dabei wird eine Kugel aus Metall (Eisenlegierung) mit einem Durchmesser zwischen 11 und 13 cm und einem Gewicht von 7,26 kg (Männer) bzw. 4 kg (Frauen) so geworfen, dass die Weite des Wurfes möglichst groß ist. Es spielen damit die Abwurfhöhe y_0 , der Wurfwinkel ϕ und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Kugel eine Rolle, der Rest ist Physik.

Die Abwurfhöhe betrage bei einem Leichtathleten $y_0 = 1,8$ m; die Kugel wird mit einem Winkel $\phi = 40^\circ$ nach oben geworfen, die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ist $v_0 = 13,7$ m/s groß. Stelle die Wurfparabel dar und bestimme die maximale Wurfhöhe und die Weite des Wurfs.

(Physikalische Einheiten: cm = Zentimeter, Hg = Huygens, kg = Kilogramm, m = Meter, N = Newton, s = Sekunde)

Lösung: I. Die Geschwindigkeit v [m/s] ist eine den Raum, die Strecke s [m] und die Zeit t [s] verbindende physikalische Größe (Einheiten: m = Meter, s = Sekunde). Für die gleichförmige Bewegung gilt: $v = s/t$, $s = vt$ für eine gleichmäßige beschleunigte Bewegung unter den Bedingungen des freien Falls mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ als Erdbeschleunigung: $v = gt$, $s = gt^2/2$.

II. Geschwindigkeit ist ein Vektor mit der Länge als Größe der Anfangsgeschwindigkeit und dem Abwurfwinkel als Richtung. Demgemäß lässt sich der Geschwindigkeitsvektor zerlegen in eine horizontale und eine vertikale Komponente, wobei sich die Zerlegung im rechtwinkligen Dreieck wie folgt ergibt:



Gemäß den mathematischen Gesetzen der Trigonometrie (Kosinus als Ankathete durch Hypotenuse, Sinus als Gegenkathete durch Hypotenuse) gilt: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\phi)$, $v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\phi)$.

Die Wurfbewegung ist eine Überlagerung der Bewegung der Kugel in horizontaler x - und vertikaler y -Richtung. In der y -Richtung kommt allerdings noch hinzu, dass die Kugel gemäß den Gesetzen der irdischen Schwerkraft dem freien Fall unterliegt. Es ist damit eine gleichförmige Bewegung in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi)$ und eine dem freien Fall unterliegende Bewegung in y -Richtung mit der Geschwindigkeit $v_y(t) = v_0 \cdot \sin(\phi) - gt$ (v_{0y} ist nach oben gerichtet, die aus dem freien Fall resultierende Geschwindigkeit gt nach unten); betrachtet werden die horizontale Geschwindigkeit v_x und die vertikale Geschwindigkeit v_y in ihrem zeitlichen Rahmen t ($t \geq 0$).

III. Die Geschwindigkeiten sind also zu jedem Zeitpunkt t des Wurfs bekannt. Gleiches gilt für den Ort $P(x(t)|y(t))$, an dem sich die Kugel zu jedem Zeitpunkt t des Wurfs befindet. Unter Verwendung der Weg-Geschwindigkeitsbeziehungen bei gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten

Bewegungen (siehe I.) gilt: $x(t) = v_x(t) \cdot t$, $y(t) = y_0 + v_y(t) \cdot t - gt^2/2$. Hierbei kommt die Abwurfhöhe y_0 bei der vertikalen Bewegung mit ins Spiel; der Wurf ist beendet, wenn die Kugel den Erdboden erreicht hat. Damit gilt:

$$x(t) = v_0 \cos \varphi \cdot t \quad (\text{horizontale Richtung})$$

$$y(t) = v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \quad (\text{vertikale Richtung}).$$

IV. Wir setzen nun die in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen für den schrägen Wurf nach oben mit Abwurfhöhe $y_0 = 1,8 \text{ m}$, Abwurfwinkel $\varphi = 40^\circ$ und Abwurfgeschwindigkeit $v_0 = 13,7 \text{ m/s}$ in die obigen Beziehungen $x(t)$, $y(t)$ ein und erhalten:

$$x(t) = 13,7 \cdot \cos(40^\circ) \cdot t = 10,495t \quad (\text{horizontale Richtung})$$

$$y(t) = 13,7 \cdot \sin(40^\circ) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 + 1,8 = 8,806t - 4,905t^2 + 1,8 \quad (\text{vertikale Richtung}).$$

Jeder Punkt $P(x(t)|y(t))$, der sich auf der Kurve des Wurfes befindet, hat also die Form:

$$P(10,495t|8,806t-4,905t^2+1,8).$$

Daraus ergeben sich für Zeitpunkte $t \geq 0$ die folgenden Positionen des Punktes P:

Zeitpunkt	Kurvenpunkt $P(x(t) y(t))$ [m]	
t [s]	x(t) [m]	y(t) [m]
0	0	1.8
0.1	1.0495	2.6316
0.2	2.099	3.365
0.3	3.1485	4.0004
0.4	4.198	4.5376
0.5	5.2475	4.9767
0.6	6.297	5.3178
0.7	7.3465	5.5608
0.8	8.396	5.7056
0.9	9.4455	5.7524
1	10.495	5.701
1.1	11.5445	5.5515
1.2	12.594	5.304
1.3	13.6435	4.9583
1.4	14.693	4.5146
1.5	15.7425	3.9728
1.6	16.792	3.3328
1.7	17.8415	2.5947
1.8	18.891	1.7586
1.9	19.9405	0.8243
2	20.99	-0.208
2.1	22.0395	-1.3385
2.2	23.089	-2.567
2.3	24.1385	-3.8937
2.4	25.188	-5.3184
2.5	26.2375	-6.8413

Um die maximale Wurfhöhe und die Wurfweite genauer zu ermitteln, bilden wir noch Wertetabellen mit kleinerer Schrittweite:

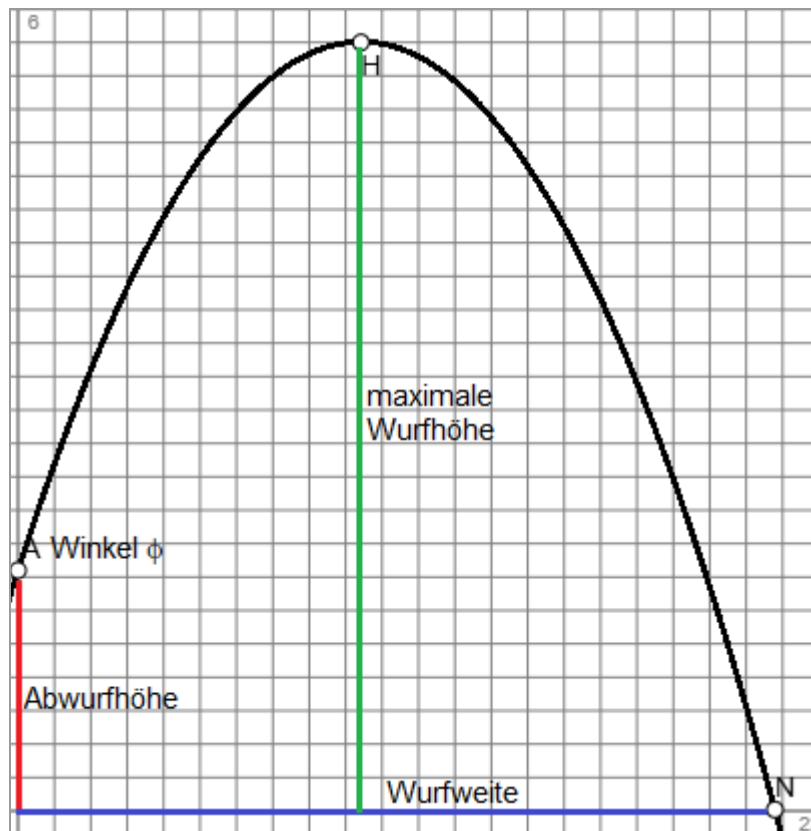
Zeitpunkt [s]	Kurvenpunkt $P(x(t) y(t))$ [m m]	
t [s]	x(t) [m]	y(t) [m]
0.8	8.396	5.7056
0.81	8.501	5.7147
0.82	8.6059	5.7228
0.83	8.7109	5.7299
0.84	8.8158	5.7361
0.85	8.9208	5.7412
0.86	9.0257	5.7454
0.87	9.1306	5.7486
0.88	9.2356	5.7508
0.89	9.3405	5.7521
0.9	9.4455	5.7524
0.91	9.5505	5.7516
0.92	9.6554	5.7499
0.93	9.7603	5.7472
0.94	9.8653	5.7436
0.95	9.9703	5.7389
0.96	10.0752	5.7333
0.97	10.1802	5.7267
0.98	10.2851	5.7191
0.99	10.39	5.7105
1	10.495	5.701

Zeitpunkt	Kurvenpunkt $P(x(t) y(t))$	
t [s]	x(t) [m]	y(t) [m]
1.9	19.9405	0.8243
1.91	20.0455	0.7255
1.92	20.1504	0.6257
1.93	20.2553	0.5249
1.94	20.3603	0.4232
1.95	20.4652	0.3204
1.96	20.5702	0.2167
1.97	20.6752	0.112
1.98	20.7801	0.0063
1.99	20.8851	-0.1004
2	20.99	-0.208

und haben zum Zeitpunkt $t = 0,9$ s die maximale Kurvenhöhe von 5,75 m, zum Zeitpunkt $t = 1,98$ s die Wurfweite von ungefähr 20,78 m. Die Wurfdauer beträgt also 1,98 s.

V. Tragen wir die in den Tabellen enthaltenen Kurvenpunkte $P(x(t)|y(t))$ in ein x-y-Koordinatensystem ein und so erhalten wir den Graphen einer sog. Wurfparabel $y = f(x)$. Es gilt die

nachstehende Darstellung:



VI. Im (obigen) x-y-Koordinatensystem lautet die Gleichung der Wurfparabel im Übrigen:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 + \tan \varphi \cdot x + y_0,$$

d.h. für die oben dargestellte Kurve:

$$y = -\frac{9,81}{2 \cdot 13,7^2 \cdot \cos^2(40^\circ)} x^2 + \tan(40^\circ) \cdot x + 1,8 = -0,0445x^2 + 0,839x + 1,8.$$

Nullsetzen des Wurfparabelterms führt auf die quadratische Gleichung und die Wurfweite x_W :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 + \tan \varphi \cdot x + y_0 = 0 \Rightarrow x_W = \frac{v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi + v_0 \cos \varphi \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi + 2gy_0}}{g},$$

d.h. es ist:

$$x_W = \frac{13,7^2 \cdot \sin(40^\circ) \cos(40^\circ) + 13,7 \cdot \cos(40^\circ) \cdot \sqrt{13,7^2 \cdot \sin^2(40^\circ) + 2 \cdot 9,81 \cdot 1,8}}{9,81} \approx 20,78 \text{ m.}$$

Ableiten des Wurfparabelterms und Nullsetzen der Ableitung ergibt:

$$y' = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} x + \tan \varphi = 0 \Rightarrow x_H = \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi$$

mit der maximalen Wurfhöhe y_H :

$$y_H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi + y_0,$$

d.h. es ist:

$$y_H = \frac{13,7^2}{2 \cdot 9,81} \sin^2(40^\circ) + 1,8 \approx 5,75 \text{ m.}$$