

Physikaufgaben

> Mechanik

> Elastischer Stoß

Aufgabe: Zwei Körper mit den Massen $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$ stoßen in einem elastischen Stoß reibungsfrei frontal aufeinander. Die Geschwindigkeit der Masse m_1 beträgt $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, die Masse m_2 ruht.

- Bestimme die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Zusammenstoß. Berechne die kinetische Energie, die dem elastischen Stoß zugrundeliegt.
- Welche Kraft wirkt auf die jeweiligen Massen, wenn der elastische Stoß 8 ms dauert? Welche Beschleunigung erfährt die Masse m_2 während der Dauer des Stoßes?
- Berechne die kinetischen Energien beider Massen nach dem elastischen Stoß.

(Physikalische Einheiten: m = Meter, ms = Millisekunden, s = Sekunde, Hy = Huygens, N = Newton, J = Joule)

Lösung: I. Gleichförmige Bewegung ist (hier) eine geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $v [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ ohne Beschleunigung ($a = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) und ohne Richtungsänderung. Dann gelten die Grundformeln der Mechanik der gleichförmigen Bewegung mit $s [\text{m}]$ als zurückgelegter Strecke und $t [\text{s}]$ als Zeit:

$$\text{Geschwindigkeit, Strecke, Zeit: } v = \frac{s}{t}, s = vt, t = \frac{s}{v}$$

II. Eine Masse $m [\text{kg}]$ habe die Geschwindigkeit $v [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ ($m > 0$, v beliebig). Dann heißt das Produkt von Masse und Geschwindigkeit Impuls $p [\text{Hy} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}]$. Es gilt also:

$$p = mv [\text{Hy}].$$

Zwei Massen m_1 und m_2 prallen nun mit einer Geschwindigkeit von v_1 und v_2 in einem elastischen Stoß frontal aufeinander. Dann gilt für die Beträge der einzelnen Impulse der Massen vor dem Zusammenstoß:

$$p_{1\text{vor}} = m_1 v_1, p_{2\text{vor}} = m_2 v_2.$$

Sind u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten der beiden Massen m_1 und m_2 nach dem Zusammenstoß, so gilt für deren Impulse:

$$p_{1\text{nach}} = m_1 u_1, p_{2\text{nach}} = m_2 u_2$$

Das Impulsgesetz gibt an, dass die Summen der Impulse vor und nach dem Zusammenstoß gleich sind (Impulserhaltungssatz), also:

$$p_{1\text{vor}} + p_{2\text{vor}} = p_{1\text{nach}} + p_{2\text{nach}}$$

oder:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Neben dem Impuls betrachten wir noch die kinetische (Bewegungs-) Energie der am Zusammenstoß beteiligten Massen. Es gilt für die kinetischen Energien $E_{kin,vor}$ und $E_{kin,nach}$ des physikalischen Systems vor und nach dem Zusammenstoß:

$$E_{kin,vor} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad E_{kin,nach} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \text{ [J]}.$$

Ein Stoß heißt vollständig elastisch, wenn $E_{kin,vor} = E_{kin,nach}$ gilt, d.h. die kinetische Gesamtenergie des Systems erhalten bleibt, oder wenn mit $\Delta E_{kin} = E_{kin,vor} - E_{kin,nach}$ (als [Nicht-] Verlust an kinetischer Energie) gilt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \text{ (E1)}$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \text{ (E2)}$$

$$\Delta E_{kin} = 0 \text{ (E3)}$$

Aus (E1) und (E2) folgt:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \text{ (E4)}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \text{ (E5)}$$

für die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 nach dem Zusammenstoß.

III. Ein Spezialfall ist der vollständig elastische Stoß einer bewegten Masse m_1 auf eine unbewegte Masse m_2 , also mit: $v_2 = 0$. Hier gilt:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \text{ (ES1)}$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \text{ (ES2)}$$

$$\Delta E_{kin} = 0 \text{ (ES3)}$$

Aus (ES1) und (ES2) folgt:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ (ES4)}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \text{ (ES5)}$$

für die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 nach dem Zusammenstoß.

IV. Kraft F [$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$] ist die Änderung des Impulses in der Zeit, also:

$$F = \frac{p}{t} \text{ [N]},$$

aber auch wegen: $F = \frac{p}{t} = \frac{mv}{t} = m \cdot \frac{v}{t} = ma$ Masse mal Beschleunigung:

$$F = ma \text{ [N]}.$$

V. a) Es ist: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $v_1 = 6 \frac{m}{s}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $v_2 = 0 \frac{m}{s}$, so dass gemäß (ES4) und (ES5) (unbewegte Masse m_2) sich als Geschwindigkeiten u_1 , u_2 nach dem elastischen Stoß ergeben:

$$u_1 = \frac{2kg - 1kg}{2kg + 1kg} \cdot 6 \frac{m}{s} = \frac{1}{3} \cdot 6 \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s},$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot 2kg}{2kg + 1kg} \cdot 6 \frac{m}{s} = \frac{4}{3} \cdot 6 \frac{m}{s} = 8 \frac{m}{s}.$$

Beim elastischen Stoß ändert sich die kinetische Energie $E_{kin} = E_{kin,vor} = E_{kin,nach}$ nicht. Es gilt wegen $m_1 = 2 \text{ kg}$, $v_1 = 6 \frac{m}{s}$ bei $v_2 = 0 \frac{m}{s}$:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,vor}} = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 36 \text{ J}.$$

b) Betrachten wir die Masse m_1 , so beträgt deren Impuls vor dem Stoß:

$$p_{1\text{vor}} = 2\text{kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12 \text{ Hy},$$

nach dem Stoß:

$$p_{1\text{nach}} = 2\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \text{ Hy}.$$

Die Impulsdifferenz ist $\Delta p_1 = 12 \text{ Hy} - 4 \text{ Hy} = 8 \text{ Hy}$ groß, die gesuchte Kraft:

$$F = \frac{8 \text{ Hy}}{0,008 \text{ s}} = 1000 \text{ N}$$

bei $t = 8 \text{ ms} = 0,008 \text{ s}$. Hinsichtlich der Masse m_2 berechnet sich der Impuls (als Impulsänderung wegen $v_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) als:

$$p_{2\text{nach}} = 1\text{kg} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \text{ Hy},$$

so dass die einwirkende Kraft ebenfalls $F = 1000 \text{ N}$ beträgt (Kraft und Gegenkraft). Mit der Kraft $F = 1000 \text{ N}$ und der Masse $m_2 = 1 \text{ kg}$ ergibt sich als Beschleunigung:

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{1000 \text{ N}}{1 \text{ kg}} = 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(also rund das Hundertfache der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

c) Es gilt für die Masse $m_1 = 2 \text{ kg}$ mit Geschwindigkeit $u_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$E_{1\text{kin,nach}} = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 4 \text{ J}$$

für die Masse $m_2 = 1 \text{ kg}$ mit Geschwindigkeit $u_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$E_{2\text{kin,nach}} = \frac{1}{2} \cdot 1\text{kg} \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 32 \text{ J}$$

mit: $E_{1\text{kin,nach}} + E_{2\text{kin,nach}} = 4 \text{ J} + 32 \text{ J} = 36 \text{ J} = E_{\text{kin}}$ (Energieerhaltungssatz).