

Physikaufgaben

> Mechanik

> Energieerhaltung

Aufgabe: Ein Trampolinspringer mit einer Masse von 70 kg erreicht eine Höhe von (zugegebenermaßen utopischen) 10 m über dem entspannten Trampolin, während sich das Trampolin bei Kontakt mit dem Springer um bis zu 1,5 m nach unten dehnt. Analysiere die Bewegung des Trampolinspringers.

(Physikalische Einheiten: kg = Kilogramm, m = Meter, s = Sekunde, N = Newton, J = Joule)

Lösung: I. Das Trampolin stellt eine Feder dar, deren Federkonstante $D \left[\frac{N}{m} \right]$ wir auf Grund folgender Überlegungen ermitteln können. Da das System Trampolin – Springer ein geschlossenes ist, gilt wegen der Energieerhaltung die Gleichheit von Federenergie E_s [J] und potentieller „Höhenenergie“ E_{pot} [J], also mit Masse m [kg], Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$, Höhe h [m] und Auslenkung s [m]:

$$E_s = E_{pot} \Leftrightarrow \frac{1}{2} Ds^2 = mgh \Leftrightarrow D = \frac{2mgh}{s^2} \quad (*)$$

Wir setzen in (*) $m = 70$ kg, $h = 10$ m und $s = 1,5$ m ein und erhalten $D = 6104 \frac{N}{m}$ als Federkonstante. Die potentielle Energie bei $h = 10$ m ist dann: $E_{pot} = 70 \cdot 9,81 \cdot 10 = 6867$ J, die Federenergie ebenfalls: $E_s = 0,5 \cdot 6104 \cdot 1,5^2 = 6867$ J. Die 6867 J stellen die (nicht veränderliche) Gesamtenergie E [J] des Systems dar.

II. Der Springer wird vom Trampolin nach oben beschleunigt über die Strecke von $s = 1,5$ m. Der Bewegung nach oben steht die Erdbeschleunigung entgegen. Wir haben also für den Fall, dass der Springer in Kontakt mit dem Trampolin nach oben bewegt wird, die Federkraft F_s [N] und die Gewichtskraft G [N], die zusammen eine resultierende Kraft F_R [N] ergeben und damit:

$$F_s - G = F_R \Leftrightarrow Ds - mg = F_R,$$

woraus nach Einsetzen von $m = 70$ kg, $s = 1,5$ m und $D = 6104 \frac{N}{m}$ folgt: $F_R = 8469,3$ N. F_R stellt damit die Kraft zu dem Zeitpunkt dar, zu dem der Kontakt des Springers zum Trampolin aufhört. Danach wirkt keine Federkraft mehr auf den Springer, sondern nur noch die resultierende Kraft.

III. Zum Zeitpunkt, zu dem der Kontakt des Springers zum Trampolin aufhört (Absprung), ergibt sich wegen

$$F_R = ma \Leftrightarrow a = \frac{F_R}{m}$$

eine Beschleunigung von $a = 121 \frac{m}{s^2}$, also das 12,33-fache der Erdbeschleunigung g .

IV. Der Springer erreicht jetzt die maximale Geschwindigkeit in seiner Aufwärtsbewegung, die potentielle Energie E_{pot} ist wegen $h = 0$ (Fläche des entspannten Trampolins) ebenfalls 0, die kinetische Energie E_{kin} [J] ist gleich der Federenergie E_s :

$$E_s = E_{kin} \Leftrightarrow \frac{1}{2}Ds^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{Ds^2}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot s \quad (**)$$

Einsetzen von $m = 70 \text{ kg}$, $s = 1,5 \text{ m}$ und $D = 6104 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ in (**) ergibt: $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_0$ als maximale Geschwindigkeit.

V. Auf dem Weg nach oben vom Trampolin weg wird die maximale Geschwindigkeit v_0 aufgebraucht, da auf den Springer nur noch die Gewichtskraft G wirkt (senkrechter Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v_0). Die Höhe h über dem Trampolin ergibt sich damit aus:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

mit t [s] als Zeit nach dem Absprung, also: $h(t) = 14t - 4,905t^2$. Diese nach unten geöffnete Parabel hat ihr Maximum zum Zeitpunkt $t = 1,43 \text{ s}$ wegen der Ableitung: $h'(t) = 14 - 9,81t = 0 \Leftrightarrow t = 1,43 \text{ s}$ und mit $h(1,43) = 10 \text{ m}$ (wie vorgegeben).

VI. Wir suchen nun den Zeitpunkt, bei dem der Springer über dem Trampolin eine Höhe $h = 2 \text{ m}$ erreicht hat. Es ist: $2 = 14t - 4,905t^2 \Leftrightarrow 4,905t^2 - 14t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,151 \text{ s}$, $[t_2 = 2,7 \text{ s}]$. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Höhenfunktion $h(t)$, also: $h'(t) = 14 - 9,81t$ mit $v = h'(0,151) =$

$12,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ als Geschwindigkeit bei der Höhe $h = 2 \text{ m}$. Alternativ ergibt sich die Geschwindigkeit mit der Formel:

$$v = v_0 - gt$$

und damit ebenfalls als: $v = 12,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bei der Höhe $h = 2 \text{ m}$ ist die potentielle Energie $E_{\text{pot}} =$

$70 \cdot 9,81 \cdot 2 = 1373,4 \text{ J}$, die kinetische Energie beträgt: $E_{\text{kin}} = 0,5 \cdot 70 \cdot 12,52^2 = 5486,3 \text{ J}$. Beide Energiearten zusammen ergeben die Gesamtenergie E des Systems: $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = 1373,4 + 5486,6 \approx 6867 \text{ J} = E$.

VII. Nachdem der Trampolinspringer die maximale Höhe überschritten hat, gilt für ihn der freie Fall, d.h. die Höhe errechnet sich als:

$$h = h_{\text{max}} - \frac{1}{2}gt^2 \quad (***)$$

mit t [s] als Zeit nach dem Maximum. Zum Zeitpunkt $t = 2,43 \text{ s}$ nach dem Absprung, d.h. $t = 1 \text{ s}$ nach der maximalen Höhe, hat der Springer noch eine Höhe von $h = 10 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 1 = 5,1 \text{ m}$ über dem entspannten Trampolin.

VIII. Der Springer berührt das Trampolin wieder, wenn in Gleichung (**) $h = 0$ ist. Also:

$$0 = 10 - 4,905t^2 \Leftrightarrow 4,905t^2 = 10 \Leftrightarrow t^2 = 2,04 \Leftrightarrow t = 1,43 \text{ s}$$

nach dem Überschreiten der maximalen Höhe, d.h. $2,86 \text{ s}$ nach dem Absprung. Die Geschwindigkeit kann zum Zeitpunkt des Auftreffens des Springers auf das Trampolin gemäß:

$$v = gt$$

bestimmt werden als: $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, d.h.: sie ist so hoch wie die Geschwindigkeit beim Absprung. Da-

her beträgt die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 0,5 \cdot 70 \cdot 14^2 \approx 6867 \text{ J} = E$, die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = 0$. Die kinetische Energie wird beim Auftreffen des Springers auf das Trampolin wieder in die Federenergie E_s zurückverwandelt.