Michael Buhlmann

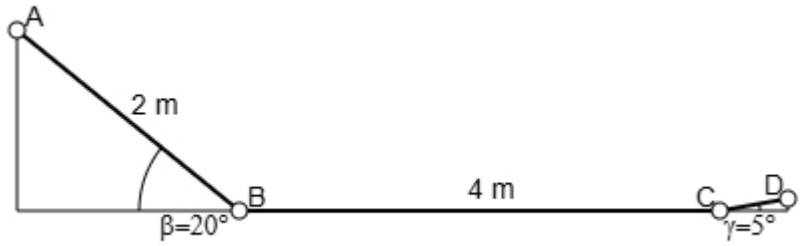
Physikaufgaben
> Mechanik
> Schiefe Ebene

Aufgabe: Eine Murmel mit der Masse m = 100 g bewegt sich durch einen Parcours aus Holzschienen. Beim Rollen tritt Reibung auf; die Rollreibungswiderstandszahl ist f_R = 0,1 groß.

a) Die Murmel rollt zunächst eine schiefe Ebene der Länge s_1 = 2 m mit Neigungswinkel β = 22° hinunter (A – B). In welcher Höhe über den Parcoursboden startet die Murmel (A)? Wie groß ist ihre Hangabtriebskraft, wie groß sind ihre Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke nach t = 0,5 s? Wann und mit welcher Geschwindigkeit verlässt sie die schiefe Ebene (B)?

b) Die Murmel rollt nun eine Strecke von s_2 = 4 m horizontal weiter (B – C). Wie hoch ist die Geschwindigkeit der Murmel am Ende der horizontalen Strecke (C), wie lange hat die Murmel für die horizontale Strecke gebraucht?

c) Die Murmel rollt jetzt eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel γ = 5° hinauf (C – D). Nach einer Zeit t = 0,4 s trifft die Murmel frontal auf eine Feder mit Federkonstante D = 20 $\frac{N}{m}$. Berechne den Impuls, den die Murmel beim Zusammenstoß mit der Feder besitzt. Um wie viel cm wird die Feder zusammengedrückt? In welcher Höhe über den Parcoursboden treffen Murmel und Feder zusammen? Stelle eine Bilanz der verschiedenen Energieformen beim Zusammenstoß von Murmel und Feder auf (D).



(Physikalische Einheiten: kg = Kilogramm, m = Meter, s = Sekunde, Hy = Huygens, N = Newton, J = Joule)

Lösung: a) I. Schiefe Ebene und horizontaler Parcoursboden bilden zusammen ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse s_1 = 2 m und Winkel β = 20°. Es ergibt sich als Höhe h der schiefen Ebene im Punkt A:

$$\sin\beta = \frac{h}{s_1} \Rightarrow \sin 22° = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \cdot \sin 22° = \text{ 0,75 m.}$$

II. Die Gewichtskraft F_G der Murmel beträgt bei Erdbeschleunigung g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$ aufgrund der Masse der Murmel m = 100 g = 0,1 kg:

$$F_G = mg \Rightarrow F_G = 0{,}1kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = \text{ 0,981 N.}$$

Die Hangabtriebskraft F_H, der die Murmel auf der schiefen Ebene unterliegt, bestimmt sich als:

$$F_H = F_G \cdot \sin\beta \Rightarrow F_H = 0{,}981N \cdot \sin 22° = \text{ 0,3675 N.}$$

Aus der Normalkraft $F_N = F_G \cdot \cos\beta \Rightarrow F_N = 0{,}981N \cdot \cos 22° =$ 0,9096 N ergibt sich mit der Widerstandszahl f_R = 0,1 die Reibungskraft F_R:

$F_R = f_R F_N = 0{,}1 \cdot 0{,}9096N =$ 0,09096 N.

Die Reibungskraft steht der Hangabtriebskraft entgegen; die Hangabtriebsbeschleunigung a ist wegen $F_H - F_R = m \cdot a$:

$$a = \frac{F_H - F_R}{m} = \frac{0{,}3675N - 0{,}09096N}{0{,}1kg} = 2{,}7654\ \frac{m}{s^2}.$$

III. Wegen a = 2,7654 $\frac{m}{s^2}$ ist die Murmel nach t = 0,5 s mit einer Geschwindigkeit v von:

$$v = at = 2{,}7654\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5s = 1{,}3827\ \frac{m}{s}$$

schnell, die zu dem Zeitpunkt zurückgelegte Strecke s der Murmel beträgt:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}7654\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}5s)^2 =$$ 0,3457 m.

IV. Am Ende der schiefen Ebene (B) ist die Murmel die Strecke s_1 = 2 m gerollt. Mit der Beschleunigung a = 2,7654 $\frac{m}{s^2}$ folgt für den Zeitpunkt:

$$s = \frac{1}{2}a_H t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}7654\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}5s)^2 = s_1 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2m}{2{,}7654\frac{m}{s^2}}} =$$ 1,2 s.

Für die Geschwindigkeit gilt:

$$v = at = 2{,}7654\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}2s = 3{,}32\ \frac{m}{s}.$$

V. Eine andere Berechnung der Geschwindigkeit der Murmel am Ende der schiefen Ebene (B) geht von der Energieerhaltung des physikalischen Systems aus. Die potentielle Energie am Anfang der schiefen Ebene (A) ist:

$$E_{pot} = mgh = 0{,}1kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}75m =$$ 0,7358 J,

die Reibungsarbeit beträgt auf der Strecke s_1 = 2 m:

$E_R = F_R s_1 = 0{,}09096N \cdot 2m =$ 0,1819 J.

Nun gilt mit der kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$:

$$E_{pot} = E_{kin} + E_R \Rightarrow E_{kin} = E_{pot} - E_R$$

$$E_{kin} = E_{pot} - E_R = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E_{pot} - E_R)}{m}} = \sqrt{\frac{2(0{,}7358J - 0{,}1819J)}{0{,}1kg}} = 3{,}32\ \frac{m}{s}.$$

Damit erhalten wir dieselben Resultate bzgl. der Geschwindigkeit: $v_B = v = 3{,}32\ \frac{m}{s}$.

b) I. Die Normalkraft ist die Gewichtskraft: $F_N = F_G =$0,981 N wegen der horizontalen Bewegung der Murmel, als Reibungskraft F_R ergibt sich mit der Widerstandszahl f_R = 0,1:

$F_R = f_R F_N = 0{,}1 \cdot 0{,}981N =$ 0,0981 N.

Die Bremsbeschleunigung a beträgt:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{0{,}0981N}{0{,}1kg} = 0{,}981\ \frac{m}{s^2}$$

(oder a = $f_R \cdot g$).

II. Die Anfangsgeschwindigkeit der Murmel beträgt $v_B = 3{,}32\ \frac{m}{s}$ (B); die Murmel rollt die Strecke $s_2 = 4$ m entlang bei einer Bremsbeschleunigung $a = -0{,}981\ \frac{m}{s^2}$. Für die Geschwindigkeit v_C am Ende der Strecke (C) gilt mit $s_2 = \frac{v_C^2 - v_B^2}{2a}$:

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2as_2} = \sqrt{\left(3{,}32\frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot (-0{,}981)\frac{m}{s^2} \cdot 4m} = 1{,}78\ \frac{m}{s}.$$

Mit $t = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{1{,}78\frac{m}{s} - 3{,}32\frac{m}{s}}{-0{,}981\frac{m}{s^2}} = 1{,}57$ s erhalten wir die Zeit, die die Murmel zum Zurückle-

gen der Strecke $s_2 = 4$ m benötigt.

III. Über die Energieerhaltung des physikalischen Systems lässt sich mit der kinetischen Energie am Streckenanfang (B):

$$E_{kinB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1kg \cdot \left(3{,}32\frac{m}{s}\right)^2 = 0{,}5511\ \text{J}$$

und der Reibungsarbeit entlang der Strecke (B – C):

$$E_R = f_R F_N s_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}981N \cdot 4m = 0{,}3924\ \text{J}$$

die kinetische Energie am Streckenende (C) ermitteln:

$$E_{kinC} = E_{kinB} - E_R = 0{,}5511J - 0{,}3924J = 0{,}1587\ \text{J}$$

und daraus die Geschwindigkeit:

$v_C = v = \sqrt{\frac{2E_{knC}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1587J}{0{,}1kg}} = 1{,}78\ \frac{m}{s}$.

c) I. Die Anfangsgeschwindigkeit der Murmel für die Strecke (C – D) ist: $v_c = 1{,}78\ \frac{m}{s}$, die Hangabtriebskraft beträgt:

$$F_H = F_G \cdot \sin\gamma \Rightarrow F_H = 0{,}981N \cdot \sin 5° = 0{,}0855\ \text{N},$$

die Normalkraft:

$$F_N = F_G \cdot \cos\gamma \Rightarrow F_N = 0{,}981N \cdot \cos 5° = 0{,}9773\ \text{N},$$

die Reibungskraft:

$$F_R = f_R F_N = 0{,}1 \cdot 0{,}9773N = 0{,}09773\ \text{N}.$$

II. Weil die Kugel die schiefe Ebene (C – D) hinaufrollt, addieren sich Hangabtriebs- und Reibungszur resultierenden Kraft F_{res}:

$$F_{res} = F_H + F_R = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F_H + F_R}{m} = \frac{0{,}0855N + 0{,}09773N}{0{,}1kg} = 1{,}8323\ \frac{m}{s^2}$$

mit der der Bewegungsrichtung der Murmel entgegenstehenden Beschleunigung $a = -1{,}8323\ \frac{m}{s^2}$.

III. Mit t = 0,4 s erhalten wir die Geschwindigkeit der Murmel zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens von Murmel und Feder:

$$v_D = v_C + at = 1{,}78\frac{m}{s} - 1{,}8323\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}4s = \text{ 1,05 } \frac{m}{s},$$

daraus folgend den Impuls p:

$$p = mv = 0{,}1kg \cdot 1{,}05\frac{m}{s} = \text{ 0,105 Hy},$$

schließlich den zurückgelegten Weg auf der schiefen Ebene

$$s_3 = v_C t + \frac{1}{2}at^2 = 1{,}78\frac{m}{s}\cdot 0{,}4s + \frac{1}{2}\cdot\left(-1{,}8323\frac{m}{s^2}\right)\cdot(0{,}4s)^2 = \text{ 0,5654 m.}$$

IV. Die kinetische Energie der Murmel beim Zusammenprall mit der Feder (D) beträgt:

$$E_{kinD} = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1kg\cdot\left(1{,}05\frac{m}{s}\right)^2 = \text{ 0,0551 J.}$$

Wir setzen voraus, dass sich die kinetische Energie vollständig auf die Spannenergie überträgt:

$$E_{kinD} = E_{Spann} = \frac{1}{2}Ds^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{2E_{kinD}}{D}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}0551J}{20\frac{N}{m}}} = \text{ 0,074 m}$$

und erhalten s = 7,4 cm als Längenänderung der Feder.

V. Der Zusammenstoß von Murmel und Feder findet in einer Höhe h statt, die sich im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse s_3 = 0,5654 m und Winkel γ = 5° errechnet als:

$$\sin\gamma = \frac{h}{s_3} \Rightarrow \sin 5° = \frac{h}{0{,}5654} \Rightarrow h = 0.5654\cdot\sin 5° = \text{ 0,0493 m.}$$

VI. Die potentielle Energie E_{pot} der Murmel beträgt wegen der Höhe h = 0,0493 m:

$$E_{pot} = mgh = 0{,}1kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}0493m = \text{ 0,0484 J,}$$

die kinetische Energie E_{kin}:

$$E_{kinD} = E_{kin} = \text{ 0,0551 J,}$$

die Reibungsenergie E_R über eine Strecke von s_3 = 0,5654 m:

$$E_R = f_R F_N s_3 = 0{,}1\cdot 0{,}9773N\cdot 0{,}5654m = \text{ 0,0553 J,}$$

die Spannenergie E_{Spann}:

$$E_{Spann} = E_{kin} = \text{ 0,0551 J.}$$

Potentielle, kinetische und Reibungsenergie ergeben zusammen die kinetische Energie am Anfang der schiefen Ebene (C):

$$E_{pot} + E_{kinD} + E_R = E_{kinC} = \text{ 0,1587 J,}$$

die kinetische Energie ist gleich der Spannenergie.