

Physikaufgaben

> Mechanik

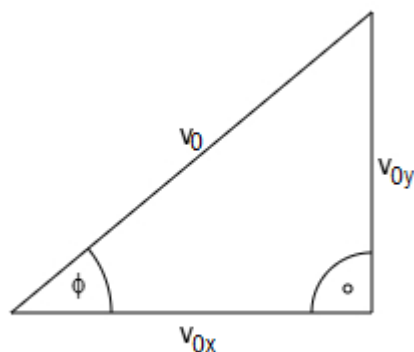
> Schräger Wurf nach oben

Aufgabe: Eine Masse soll vom Erdboden so bewegt werden, dass sie eine schräg nach oben gerichtete Wurfparabel mit maximaler Wurfhöhe 1 m und Wurfweite 2 m beschreibt. Bestimme Abwurfwinkel und Anfangsgeschwindigkeit für die Masse.

(Physikalische Einheiten: m = Meter, s = Sekunde)

Lösung: I. Die Geschwindigkeit v [m/s] ist eine den Raum, die Strecke s [m] und die Zeit t [s] verbindende physikalische Größe (Einheiten: m = Meter, s = Sekunde). Für die gleichförmige Bewegung gilt: $v = s/t$, $s = vt$, für eine gleichmäßige beschleunigte Bewegung unter den Bedingungen des freien Falls mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ als Erdbeschleunigung: $v = gt$, $s = gt^2/2$.

II. Geschwindigkeit ist ein Vektor mit der Länge als Größe der Anfangsgeschwindigkeit und dem Abwurfwinkel als Richtung. Demgemäß lässt sich der Geschwindigkeitsvektor zerlegen in eine horizontale und eine vertikale Komponente, wobei sich die Zerlegung im rechtwinkligen Dreieck wie folgt ergibt:



Gemäß den mathematischen Gesetzen der Trigonometrie (Kosinus als Ankathete durch Hypote-

nuse, Sinus als Gegenkathete durch Hypotenuse) gilt: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\varphi)$, $v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\varphi)$ mit $\varphi > 0$ als Abwurfwinkel und $v_0 > 0$ als Anfangsgeschwindigkeit.

Die Wurfbewegung ist eine Überlagerung der Bewegung der Masse in horizontaler x- und vertikaler y-Richtung. In der y-Richtung kommt allerdings noch hinzu, dass die Masse gemäß den Gesetzen der irdischen Schwerkraft dem freien Fall unterliegt. Es ist damit eine gleichförmige Bewegung in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi)$ und eine dem freien Fall unterliegende Bewegung in y-Richtung mit der Geschwindigkeit $v_y(t) = v_0 \cdot \sin(\varphi) - gt$ (v_{0y} ist nach oben gerichtet, die aus dem freien Fall resultierende Geschwindigkeit gt nach unten); betrachtet werden die horizontale Geschwindigkeit v_x und die vertikale Geschwindigkeit v_y in ihrem zeitlichen Rahmen t ($t \geq 0$) sowie

die Gesamtgeschwindigkeit $v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$ (nach dem Satz des Pythagoras).

III. Die Geschwindigkeiten sind also zu jedem Zeitpunkt t des Wurfes bekannt. Gleiches gilt für den Ort $P(x(t)|y(t))$, an dem sich die Masse zu jedem Zeitpunkt t des Wurfes befindet. Unter Verwendung der Weg-Geschwindigkeitsbeziehungen bei gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten Bewegungen (siehe I.) gilt: $x(t) = v_x(t) \cdot t$, $y(t) = v_y(t) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$, wobei hier als Abwurfhöhe $y_0 = 0$ vorausgesetzt werden soll; der Wurf ist beendet, wenn die Masse den Erdboden erreicht hat. Damit gilt:

$$x(t) = v_0 \cos \varphi \cdot t \quad (\text{horizontale Richtung})$$

$$y(t) = v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{vertikale Richtung}).$$

Zur solcherart definierten Wurfparabel $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}x^2 + \tan \varphi \cdot x$ gelten für den Abwurfwinkel

φ und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die folgenden Beziehungen:

$$y_H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi \quad (\text{maximale Wurfhöhe}) \quad (1)$$

$$x_W = \frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \quad (\text{Wurfweite}) \quad (2).$$

Aus vorgegebener maximaler Wurfhöhe y_H und Wurfweite x_W lassen sich durch Division der Beziehungen (1):(2) nacheinander Winkel φ und Geschwindigkeit v_0 berechnen. Dies soll nachfolgend geschehen.

V. Es ergibt sich mit $y_H = 1$ m und $x_W = 2$ m ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi \quad (1)$$

$$2 = \frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} \quad (2).$$

Aus der Division der Gleichungen (2) und (1) folgt:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi}{\frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g}} = \frac{\sin^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{4 \cos \varphi} = \frac{1}{4} \tan \varphi$$

und daraus wiederum:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tan \varphi \Leftrightarrow 2 = \tan \varphi \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}(2) = 63,43^\circ.$$

Damit ist der Abwurfwinkel als $\varphi = 63,43^\circ$ bestimmt. Durch Einsetzen des Winkels φ (und der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$) in die Gleichung (1) lässt sich die Anfangsgeschwindigkeit ermitteln:

$$1 = \frac{v_0^2}{2 \cdot 9,81} \sin^2(63,43^\circ) \Leftrightarrow 19,62 = v_0^2 \cdot \sin^2(63,43^\circ) \Leftrightarrow 24,52 = v_0^2 \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{24,52} = 4,9525 \text{ m/s.}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt also: $v_0 = 4,9525 \text{ m/s}$.

VI. Als Probe seien der ermittelte Winkel und die errechnete Anfangsgeschwindigkeit noch in ein Physik-Rechenprogramm zur Auswertung einer Wurfparabel eingegeben. In der Tat gilt: $y_H = 1 \text{ m}$, $x_W = 2 \text{ m}$; die Wurfdauer beträgt: $t_W = 0,903 \text{ s}$, die Steigzeit vom Abwurf bis zur maximalen Wurfhöhe ist wegen der vom Erdboden schräg nach oben bewegten Masse ($y_0 = 0$) halb so groß mit $t_H = t_W/2 = 0,4515 \text{ s}$. Das Rechenprogramm führt zudem Orte der Masse auf der Wurfparabel und die Geschwindigkeit der Masse während des Parabelwurfs auf und zeichnet den Graphen der Parabel.

Eingabe:

Wurfwinkel: $\varphi =$	63.43 °, $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$
Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 =$	4.9525 m/s, $v_0 \geq 0$
Abwurfhöhe: $y_0 =$	0 m, $y_0 \geq 0$
Schrittweite/Wertetabelle/Wurfparabel:	0.5
Zeichenbereich (von Minuswert bis Pluswert):	x-Wert: +/- 3
Schrittweite x-Werte (intern):	0.01
Bereich (von Minuswert bis Pluswert):	y-Wert: +/- 3
1. Punkt/Wurfparabel:	t=0 s (0 0)
2. Punkt/Wurfparabel:	t=0.4515 s (1 1)
3. Punkt/Wurfparabel:	t=0.903 s (2 0)
4. Punkt/Wurfparabel:	(0 0)
5. Punkt/Wurfparabel:	(0 0)
Rasterweiten:	x-Achse: 0.25 y-Achse: 0.25
Schrittweite t-Werte:	0.1

Ausgabe:

Wurfparabel/horizontale Richtung: $x = v_0 \cos(\varphi) \cdot t =$	2.2152*t
Wurfparabel/vertikale Richtung: $y = v_0 \sin(\varphi) \cdot t - g \cdot t^2/2 + y_0 =$	4.4295*t - 4.905*t^2 + 0
Wurfparabel: $y = -g/2/v_0^2/\cos^2(\varphi) \cdot x^2 + \tan(\varphi) \cdot x + y_0$	-0.9996*x^2 + 1.9996*x
Maximale Wurfhöhe: $y_H =$	1 m
Wurfweite: $x_W =$	2.0004 m
Wurfdauer: $t_W =$	0.903 s
Steigzeit: $t_H =$	0.4515 s
Steigweite: $x_H =$	1.0002 m

x, y: Ort [m]; t: Zeit [s], v: Geschwindigkeit [m/s], $g = 9,81 \text{ m/s}^2$: Erdbeschleunigung

Wertetabelle:

t [s]	x = x(t) [m]	y = y(t) [m]	v = v(t) [m/s]
0	0	0	4.9525
0.1	0.2215	0.3939	4.0987
0.2	0.443	0.6897	3.3159
0.3	0.6646	0.8874	2.6677
0.4	0.8861	0.987	2.2721
0.4515	1.0002	1	2.2152
0.5	1.1076	0.9885	2.2657
0.6	1.3291	0.8919	2.6512
0.7	1.5506	0.6972	3.2937
0.8	1.7722	0.4044	4.0735
0.9	1.9937	0.0135	4.9258
0.903	2.0004	0	4.9525

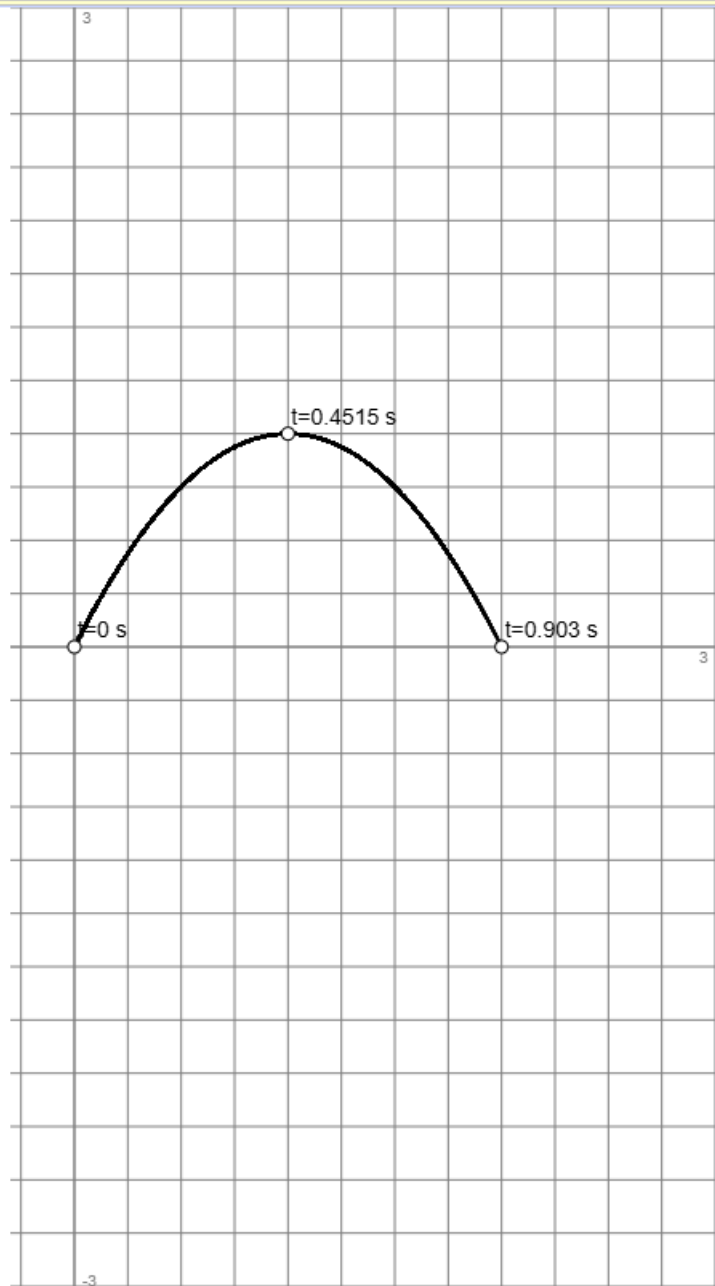
Graph:

Abwurfwinkel: 63.43°
Anfangsgeschwindigkeit: 4.9525 m/s
Abwurfhöhe: 0 m

Wurfparabel/x-Richtung: $x = 2.2152 \cdot t$
Wurfparabel/y-Richtung: $y = 4.4295 \cdot t - 4.905 \cdot t^2 + 0$
Wurfparabel: $y = -0.9996 \cdot x^2 + 1.9996 \cdot x$

Maximale Wurfhöhe: 1 m
Wurfweite: 2.0004 m
Wurfdauer: 0.903 s
Steigzeit: 0.4515 s
Steigweite: 1.0002 m

-> Wurf nach schräg oben



(www.michael-buhlmann.de/Physik/phys_wurfparabel20z.htm)

www.michael-buhlmann.de / 09.2025 / Aufgabe 24