

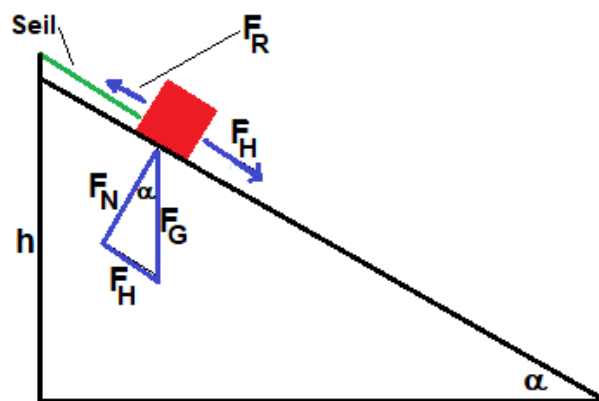
# Physikaufgaben

## > Mechanik

### > Schiefe Ebene

**Aufgabe:** Eine Rampe mit einem Winkel von  $35^\circ$  gegen die Erdoberfläche geneigt. Eine Masse befindet sich auf der Rampe und wird durch ein Seil mit kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser 1 cm [cm: Zentimeter] bei einer (Reiß-) Zugfestigkeit von  $50 \text{ N/mm}^2$  [N: Newton;  $\text{mm}^2$ : Quadratmillimeter] gehalten.

- a) Die Masse liege reibungsfrei auf der schiefen Ebene. Wie groß kann die Masse höchstens werden, damit das Seil nicht reißt?
- b) Zwischen Rampe und Masse besteht Reibung; der Haftreibungskoeffizient betrage  $\mu = 0,2$ . Wie groß kann die Masse höchstens werden, damit das Seil nicht reißt?



**Lösung:** I. Auf einer schiefen Ebene, die mit einem Winkel zur Erdoberfläche geneigt ist, liegt eine Masse, die reibungsfrei und ohne Luftwiderstand/mit Reibung und Luftwiderstand auf der schiefen Ebene herunterrutscht. Dann gilt mit  $m$  [kg: Kilogramm] als Masse,  $s$  [m: Meter] als Weg,  $t$  [s: Sekunde] als Zeit,  $v$  [ $\frac{m}{s}$ ] als Geschwindigkeit,  $a$  [ $\frac{m}{s^2}$ ] als Beschleunigung,  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  als Erdbeschleunigung,  $F$  [ $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$ : Newton] als Kraft,  $\mu$  als (Haft-) Reibungskoeffizient:

Fall 1: Reibungsfrei und ohne Luftwiderstand: Es gilt:

$$\text{Gewichtskraft } F_G = m \cdot g \text{ [N]}$$

$$\text{Hangabtriebskraft } F_H = F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha \text{ [N] (parallel zur schiefen Ebene)}$$

$$\text{Normalkraft } F_N = F_G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha \text{ [N] (senkrecht zur schiefen Ebene)}$$

$$\text{Hangabtriebsbeschleunigung } a_H = \frac{F_H}{m} = g \cdot \sin \alpha \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Fall 2: Mit Haftreibung: Es gilt:

$$\text{Gewichtskraft } F_G = m \cdot g \text{ [N]}$$

$$\text{Hangabtriebskraft } F_H = F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha \text{ [N]} \text{ (parallel zur schiefen Ebene)}$$

$$\text{Normalkraft } F_N = F_G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha \text{ [N]} \text{ (senkrecht zur schiefen Ebene)}$$

$$\text{(Haft-) Reibungskraft } F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \text{ [N]}$$

II. Die Zugfestigkeit eines Seils wird durch die Größe:

$$\sigma = \frac{F_Z}{A} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right],$$

wobei  $F_Z$  die (maximal zulässige) Zugkraft [N: Newton] und  $A$  die Querschnittfläche [ $\text{mm}^2$ : Quadratmillimeter] bedeuten.

III. a) Die Rampe (schiefe Ebene) ist mit einem Winkel  $\alpha = 35^\circ$  gegen die Erdoberfläche geneigt. Eine unbekannte Masse  $m$  befindet sich auf der Rampe, an einem Seil mit Durchmesser  $d = 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$  und Radius  $r = 5 \text{ mm}$  und der Zugfestigkeit  $\sigma = 50 \text{ N/mm}^2$  befestigt. Mit der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises erhalten wir für die Querschnittfläche:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ mm}^2.$$

Die (maximal zulässige) Zugkraft ermittelt sich aus Zugfestigkeit und Querschnittfläche:

$$F_Z = \sigma \cdot A = 50 \text{ N/mm}^2 \cdot 78,54 \text{ mm}^2 = 3927 \text{ N}.$$

Wenn das Seil reißt, muss die Hangabtriebskraft  $F_H$  der Masse auf der schiefen Ebene mit der (maximal zulässigen) Zugkraft identisch sein, also:  $F_H = F_Z = 3927 \text{ N}$ . Aus der Hangabtriebskraft erhalten wir vermöge:

$$F_H = F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin \alpha}$$

die gesuchte (maximal zulässige) Masse:

$$m = \frac{3927 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 35^\circ} = 697,91 \text{ kg}.$$

b) Es sei jetzt zusätzlich eine Haftreibung mit Reibungskoeffizient  $\mu = 0,2$  vorhanden. Die Haftreibungskraft ergibt sich aus der Normalkraft:  $F_R = \mu \cdot F_N$ , die Normalkraft aus Gewichtskraft:

$F_N = F_G \cdot \cos \alpha$ , so dass die Reibungskraft zu:  $F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha$  wird. Die Hangabtriebskraft beträgt:  $F_H = F_G \cdot \sin \alpha$ , die (maximal zulässige) Zugkraft (s. a)):  $F_Z = 3927 \text{ N}$ . Im Fall des Reißens des Seils müssen Zugkraft auf der einen Seite und Differenz aus Hangabtriebskraft und Reibungskraft (als gegengerichtete Kräfte) gleich sein. Es gilt damit:

$$F_Z = F_H - F_R \Leftrightarrow F_Z = F_G \cdot \sin \alpha - \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow F_Z = F_G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \Leftrightarrow F_G = \frac{F_Z}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

Wir bestimmen mit  $\alpha = 35^\circ$  die Gewichtskraft:

$$F_G = \frac{3927 \text{ N}}{\sin 35^\circ - 0,2 \cos 35^\circ} = 9584 \text{ N},$$

woraus für die gesuchte (maximal zulässige) Masse:

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{9584 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 976,96 \text{ kg}$$

folgt.