Michael Buhlmann

Physik > Wellenlehre > Doppler-Effekt

Christian Doppler

Christian (Andreas) Doppler (*29. November 1803 in Salzburg, †17. März 1853 in Venedig), Sohn eines Steinmetzes, studierte Philosophie, Physik und Mathematik in Wien und Salzburg und war ab 1829 am Polytechnischen Institut Wien als Assistent tätig, ab 1835 war er Lehrer an der Prager Realschule bzw. ordentlicher Professor am Prager Polytechnischen Institut. 1841 veröffentlichte Doppler seine Studie „Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels", die die Theorie des sog. Doppler-Effekts begründete. Ab 1848 in Wien ansässig, wurde er 1850 Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Wien, eine Tätigkeit, die er durch seinen frühen Tod nur wenige Jahre ausfüllte.
Die Entdeckung des Doppler-Effekts war ein wichtiger Durchbruch in der Astronomie und Physik (Akustik). Heute wird der Doppler-Effekt z.B. in der Radar- und Ultraschalltechnologie oder bei astronomischen Untersuchungen. Dopplers Entdeckung hat damit einen großen Einfluss auf die moderne Physik als Teil moderner Wissenschaftsgeschichte.

Doppler-Effekt

Wellen treten in der Physik vielfach in Erscheinung, als transversale und longitudinale Wellen, als Welle und Teilchen. Eine Welle kann beschrieben werden durch eine vom Ort x und von der Zeit t abhängige Wellengleichung:

$$s(t,x) = s_{\max} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

mit: s_{max} als Amplitude (maximale Auslenkung) der Wellenfunktion, T [s] als Periode (Schwingungsdauer), λ [m] als Wellenlänge, $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ als Phase. Dann ist: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz, $f = \frac{1}{T}$ [Hz] die Frequenz, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl, $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ [m/s] die Wellengeschwindigkeit (Einheiten: Hz = 1/s = Hertz, m = Meter, s = Sekunde). Es gilt:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\ ,\ \lambda = cT = \frac{c}{f}\ ,\ T = \frac{\lambda}{c}\ ,\ f = \frac{c}{\lambda}.$$

Wellen sind Schallwellen (in einem gasförmigen, flüssigen oder festen Medium) oder elektromagnetische Wellen.

Wellen gehen von einer (Licht-, Schall-) Quelle als Sender aus und können von einem Empfänger beobachtet werden. Dies betrifft insbesondere die (erzeugte, beobachtete) Wellenlänge als λ_Q, λ_B. Befinden sich Quelle und Beobachter in Ruhe, so gilt: $\lambda_B = \lambda_Q$. Bewegt sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit von $\pm v_Q$ [m/s] auf einen Beobachter (Empfänger) weg (+) oder zu (-), tritt etwa bei Schall- oder Lichtwellen der Doppler-Effekt ein, d.h.: die beobachtete Wellenlänge ist gegenüber Wellenlänge der Quelle (Sender) verändert. Mit T als Schwingungsdauer der Welle ergibt sich nämlich eine Änderung des Abstands zwischen Quelle und Beobachter um $\pm v_Q T$. Es gilt somit:

$\lambda_B = \lambda_Q \pm v_Q \cdot T$, so dass hieraus mit Wellengeschwindigkeit c und den Frequenzen f_Q, f_B bei $\lambda_Q = \frac{c}{f_Q}$, $\lambda_B = \frac{c}{f_B}$ folgende Umformungen greifen:

$\lambda_B = \lambda_Q \pm v_Q \cdot T$ (Einsetzen: $\lambda_Q = \frac{c}{f_Q}$, $\lambda_B = \frac{c}{f_B}$)

$\frac{c}{f_B} = \frac{c}{f_Q} \pm v_Q T$ (Einsetzen: $f_Q = \frac{1}{T}$)

$\frac{c}{f_B} = \frac{c}{f_Q} \pm \frac{v_Q}{f_Q} = \frac{1}{f_Q}(c \pm v_Q)$ (Kehrwertbildung)

$\frac{f_B}{c} = f_Q \cdot \frac{1}{c \pm v_Q} = \frac{f_Q}{c \pm v_Q}$ | ·c

$f_B = \frac{f_Q c}{c \pm v_Q} = \frac{f_Q c}{c\left(1 \pm \frac{v_Q}{c}\right)} = \frac{f_Q}{1 \pm \frac{v_Q}{c}}$.

Die beobachtete Frequenz f_B errechnet sich also bei einer bewegten Quelle mit Frequenz f_Q als:

$$f_B = \frac{f_Q}{1 \pm \frac{v_Q}{c}} \text{ (1).}$$

Es gelten noch die Umformungen:

$$f_B = \frac{f_Q}{1 \pm \frac{v_Q}{c}},\ f_Q = f_B\left(1 \pm \frac{v_Q}{c}\right),\ v_Q = \pm c\left(\frac{f_Q}{f_B} - 1\right),\ c = \pm \frac{v_Q f_B}{f_Q - f_B}$$

hinsichtlich der Frequenzen und:

$$\lambda_B = \lambda_Q\left(1 \pm \frac{v_Q}{c}\right) = \frac{c \pm v_Q}{f_Q},\ \lambda_Q = \frac{\lambda_B}{1 \pm \frac{v_Q}{c}},\ v_Q = \pm c\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_Q} - 1\right),\ c = \pm \frac{v_Q \lambda_Q}{\lambda_B - \lambda_Q}$$

hinsichtlich der Wellenlängen.

Bewegt sich umgekehrt der Beobachter (Empfänger) bei unbewegter Quelle (Sender) mit der Geschwindigkeit $\pm v_B$, so können in Beziehung (1) die Buchstaben Q und B vertauscht und die entstehende Formel nach f_B umgestellt werden:

$f_Q = \frac{f_B}{1 \pm \frac{v_B}{c}}$ | $\cdot \left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right)$

$f_B = f_Q\left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right)$.

Die beobachtete Frequenz f_B errechnet sich also bei einem sich bewegenden Beobachter als:

$$f_B = f_Q\left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right) \quad (2),$$

die beobachtete Wellenlänge λ_B als:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_Q}{1 \pm \frac{v_B}{c}}.$$

Insgesamt gilt das nachstehende Schema:

Frequenzen	Ruhender Beobachter	Ruhende Quelle
Annäherung	$f_B = \frac{f_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}}$	$f_B = f_Q\left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$
Entfernung	$f_B = \frac{f_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$	$f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$

Wellenlängen	Ruhender Beobachter	Ruhende Quelle
Annäherung	$\lambda_B = \lambda_Q\left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$	$\lambda_B = \frac{\lambda_Q}{1 + \frac{v_B}{c}}$
Entfernung	$\lambda_B = \lambda_Q\left(1 + \frac{v_Q}{c}\right)$	$\lambda_B = \frac{\lambda_Q}{1 - \frac{v_B}{c}}$

Allgemeiner gelten noch die Formeln bei simultaner Betrachtung von sich bewegender Quelle (Sender) und sich bewegendem Beobachter (Empfänger):

$$f_B = f_Q \cdot \frac{c \pm v_B}{c \pm v_Q} \quad (3)$$

$$\lambda_B = \lambda_Q \cdot \frac{c \pm v_Q}{c \pm v_B} \quad (4)$$

auf Grund der Hintereinanderschaltung der Streckungen bzw. Stauchungen der Senderfrequenz durch Multiplikation der zu den Bewegungen von Quelle und Beobachter gehörenden Faktoren gemäß (1) und (2):

$$f_B = f_Q \frac{1}{1 \pm \frac{v_Q}{c}}\left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right) = f_Q \frac{1 \pm \frac{v_B}{c}}{1 \pm \frac{v_Q}{c}} = f_Q \cdot \frac{c \pm v_B}{c \pm v_Q}.$$

und auf Grund von: $f_Q = \frac{c}{\lambda_Q}$, $f_B = \frac{c}{\lambda_B}$. Die Formeln im Schema ergeben sich aus den Formeln (3) und (4), wenn $v_B = 0$ (ruhender Beobachter) oder $v_Q = 0$ (ruhende Quelle) ist.

Aufgabenbeispiele

a) Eine Schallquelle (Schallgeschwindigkeit c = 343,2 m/s) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_Q = 20 m/s auf einen ruhenden Beobachter zu. Die Schallquelle erzeugt einen Ton der Frequenz f_Q = 400 Hz. Der Beobachter nimmt dann die Frequenz:

$$f_B = \frac{f_Q}{1-\frac{v_Q}{c}} = \frac{400Hz}{1-\frac{20\frac{m}{s}}{343{,}2\frac{m}{s}}} = 424{,}75Hz$$

wahr.

b) Eine den Kammerton a[1] (440 Hz) erzeugende Schallquelle (Schallgeschwindigkeit c = 343,2 m/s) ist am Rand einer 1,2 m durchmessenden Scheibe befestigt. Die Scheibe rotiert 40 Mal in der Minute. Ein Beobachter sieht die Schallquelle auf sich zukommen bzw. diese sich entfernen und nimmt daher Frequenzen f_B mit: $f_{B,1} = \frac{f_Q}{1+\frac{v_Q}{c}} \le f_B \le \frac{f_Q}{1-\frac{v_Q}{c}} = f_{B,2}$ wahr. Die Geschwindigkeit der Schallquelle errechnet sich dabei mit dem Radius r = 0,6 m der rotierenden Scheibe und der Rotationsfrequenz f = 40/min = 2/3 1/s = 2/3 Hz als:

$v_Q = 2\pi rf = 2\pi \cdot 0{,}6\,m \cdot 2/3\,Hz = 2{,}51\,m/s$.

Nun ist:

$$f_{B,1} = \frac{f_Q}{1+\frac{v_Q}{c}} = \frac{440Hz}{1+\frac{2{,}51\frac{m}{s}}{343{,}2\frac{m}{s}}} = 436{,}81Hz,\quad f_{B,2} = \frac{f_Q}{1-\frac{v_Q}{c}} = \frac{440Hz}{1-\frac{2{,}51\frac{m}{s}}{343{,}2\frac{m}{s}}} = 443{,}24Hz$$

und weiter:

$$\frac{f_{B,2}}{f_{B,1}} = \frac{\frac{f_Q}{1-\frac{v_Q}{c}}}{\frac{f_Q}{1+\frac{v_Q}{c}}} = \frac{\frac{1}{1-\frac{v_Q}{c}}}{\frac{1}{1+\frac{v_Q}{c}}} = \frac{1+\frac{v_Q}{c}}{1-\frac{v_Q}{c}} = \frac{c+v_Q}{c-v_Q} = \frac{443{,}24Hz}{436{,}81Hz} = 1{,}015$$

als das Verhältnis von tiefster und höchster beobachteter Frequenz.

c) Die Expansion des Universums verursacht die Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien, astronomisch beobachtbar an der Verschiebung von Spektrallinien von im Kosmos vorkommenden chemischen Elementen ins Rote. Einer Spektrallinie des Heliums entspricht so die Wellenlänge λ = 587,6 nm im Spektrum des sichtbaren Lichts (Lichtgeschwindigkeit c = 299792,5 km/s). Die Rotverschiebung einer Galaxie im Universum soll nun $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ = 0,04 betragen. Daraus ergibt sich für die beobachtete Spektrallinie:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_B - \lambda}{\lambda} = 0{,}04 \Leftrightarrow \lambda_B - \lambda = 0{,}04\lambda \Leftrightarrow \lambda_B = \lambda + 0{,}04\lambda = 1{,}04\lambda = 1{,}04 \cdot 587{,}6nm = 611{,}1nm$$

als (größere) Wellenlänge. Weiter besteht zwischen Rotverschiebung und Fluchtgeschwindigkeit v_Q der direkte Zusammenhang:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_Q}{c} \Leftrightarrow v_Q = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = 0{,}04 \cdot 299792{,}5 \frac{km}{s} = 11991{,}7 \frac{km}{s}.$$

Die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxie beträgt also: v_Q = 11991,7 km/h.

d) Eine Rakete wird nach dem Start mit Hilfe des Radars beobachtet, die Radarwellen von der Rakete somit reflektiert. Dabei entsteht als Unterschied zwischen den Frequenzen der ausgesandten Radar-/Radio-/Funkwellen (f_Q = 1 GHz, c = 299792,5 km/s) und der von der Rakete reflektierten Wellen Δf = 6 kHz. Die nachfolgend zu berechnende Geschwindigkeit der Rakete betrage v, die von der Radarstation ausgesandte Radarwelle habe die Frequenz f_Q. Bei ruhender Quelle (Radarstation) und sich entfernendem Empfänger (Rakete) ergibt sich für die von der Rakete reflektierte Wellenfrequenz f_1:

$$f_1 = f_Q\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (*)$$

Die reflektierte Frequenz f_1 wird wiederum von der Radarstation als Wellenfrequenz f_2 bei sich bewegender Quelle (Rakete) und bei ruhendem Empfänger (Radarstation) beobachtet:

$$f_2 = f_1 \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \quad (**),$$

so dass sich durch Einsetzen der Beziehung (*) in die Gleichung (**) ergibt:

$$f_2 = f_Q\left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} = f_Q \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} = f_Q \cdot \frac{c - v}{c + v} \quad (***).$$

Mit f_Q = 1 GHz = 10^9 Hz und Δf = 6 kHz = 6000 Hz = $f_2 - f_Q$ folgt gemäß (***):

$$\Delta f = f_Q - f_2 = f_Q - f_Q \cdot \frac{c - v}{c + v} = f_Q\left(1 - \frac{c - v}{c + v}\right) = f_Q\left(\frac{c + v}{c + v} - \frac{c - v}{c + v}\right) = f_Q \frac{c + v - c + v}{c + v} = \frac{2 f_Q v}{c + v}$$

$$\Leftrightarrow \Delta f = \frac{2 f_Q v}{c + v} \Leftrightarrow \Delta f (c + v) = 2 f_Q v \Leftrightarrow c\Delta f + v\Delta f = 2 f_Q v \Leftrightarrow c\Delta f = 2 f_Q v - v\Delta f$$

$$\Leftrightarrow c\Delta f = v(2 f_Q - \Delta f) \Leftrightarrow v = \frac{c\Delta f}{2 f_Q - \Delta f}$$

und damit als Geschwindigkeit der Rakete:

$$v = \frac{c\Delta f}{2 f_Q - \Delta f} = \frac{6000 Hz \cdot 299792{,}5 \frac{km}{s}}{2 \cdot 1000000000 Hz - 6000 Hz} == \frac{6000 Hz \cdot 299792500 \frac{m}{s}}{2 \cdot 1000000000 Hz - 6000 Hz} = 899{,}38 \frac{m}{s}.$$

Die Rakete ist also zum Zeitpunkt der Messung ungefähr v = 900 m/s schnell.

Literaturhinweise: https://de.wikipedia.org/wiki/Christian_Doppler, https://de.wikipedia.org/wiki/Doppler-Effekt (Christian Doppler, Doppler-Effekt); BÖGE, A., SCHLEMMER, W., Aufgabensammlung zur technischen Mechanik und Festigkeitslehre (= Viewegs Fachbücher der Technik), Braunschweig-Wiesbaden [11]1985, S.95f, 247 (Doppler-Effekt); DIEHL, B., ERB, R., HEISE, H. u.a., Physik. Oberstufe. Kursstufe Baden-Württemberg, Berlin 2010, S.145, 170 (Doppler-Effekt).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 05.2023