Michael Buhlmann

Physik > Mechanik > Freier Fall und Luftwiderstand

Einleitung

Während der freie Fall ohne Luftwiderstand zu den gängigen Vorgehensweisen innerhalb des physikalischen Teilgebiets der Mechanik gehört, stellt sich der freie Fall mit Luftwiderstand komplexer dar. Letzterer soll im Folgenden beschrieben werden. Dabei beziehen sich freier Fall und Luftwiderstand auf die Verhältnisse des Planeten Erde als Himmelskörper mit Masse, Gravitationskraft und Atmosphäre.

Geschwindigkeit, Beschleunigung, Gewichtskraft

Innerhalb der Mechanik als Teilgebiet der Physik wird unter bestimmten Voraussetzungen gearbeitet: Die Bewegung eines Körpers im Raums wird zur Bewegung eines Massenpunktes, der Körperbewegung entgegenstehende Kräfte wie z.B. der Luftwiderstand werden vernachlässigt. Unter diesen Bedingungen gelten die Gesetzmäßigkeiten der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Geschwindigkeit v [m/s] ist dabei eine den Raum, die Strecke s [m] und die Zeit t [s] verbindende physikalische Größe (Einheiten: m = Meter, s = Sekunde).

Für die gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$v = \frac{s}{t}\,,\; s = vt\,,\; t = \frac{s}{v}.$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Beschleunigung a [m/s^2] ergibt sich:

$$a = \frac{v}{t}\,,\; v = at\,,\; t = \frac{v}{a}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2\,,\; a = \frac{2s}{t^2}\,,\; t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$s = \frac{1}{2}vt\,,\; v = \frac{2s}{t}\,,\; t = \frac{2s}{v}$$

$$s = \frac{v^2}{2a}\,,\; a = \frac{v^2}{2s}\,,\; v = \sqrt{2as}\,.$$

Mit a = g = 9,81 m/s^2 folgen für die Erde als einen den Gravitationsgesetzen unterliegenden Himmelskörper die Gesetzmäßigkeiten für den freien Fall aus einer Höhe h [m]:

$$v = gt\,,\; t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$h = \frac{1}{2}vt\,,\; v = \frac{2h}{t}\,,\; t = \frac{2h}{v}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}\,,\; v = \sqrt{2gh}\,.$$

Beim freien Fall als beschleunigter Bewegung wirkt auf einen Körper der Masse m [kg] (Einheit: kg = Kilogramm) eine Kraft, die Gewichtskraft

$$F_G = mg\,,$$

die den Körper „nach unten zieht“. Dabei ergibt sich Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s^2 und Gewichtskraft F_G aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz:

$$F_G = G\frac{Mm}{r^2}$$

mit Newtonscher Gravitationskonstante G = $6{,}674\cdot 10^{-11}$ m^3/kg/s^2, M = $5{,}974\cdot 10^{24}$ kg als Masse und r = $6{,}370\cdot 10^6$ m als Radius der Erde. Wegen $F_G = G\frac{M}{r^2}m = mg$ ist g = $G\frac{M}{r^2}$ = 9,81 m/s^2.

Luftwiderstand

Zu berücksichtigen ist noch die dem freien Fall entgegenwirkende Kraft des Luftwiderstands:

$$F_L = \frac{1}{2}c_W A\rho v^2\,,$$

die bei einer Geschwindigkeit v erzeugt wird; c_W [dimensionslos] ist der Widerstandsbeiwert, A [m^2] die Querschnittfläche des Körpers, ρ [kg/m^3] die Dichte des den fallenden Körper umgebenden Mediums, hier der Luft. Die Formel für den Luftwiderstand leitet sich her aus dem Volumen V der beim Fall vor dem Körper hergeschobenen Luft, wobei für kleine momentane Zeiteinheiten t die Beziehungen: V = As und v = s/t ⇔ s = vt, also: V = Avt gelten, weiter für die Masse der vor dem Körper hergeschobenen Luft: m_L = ρV = ρAvt. Nimmt man die kinetische Energie E [J] der Masse m_L der vor dem Körper hergeschobenen Luft hinzu, so ergibt sich weiter:

$$E = \frac{1}{2}m_L v^2 = \frac{1}{2}\rho A v t\cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho A v^3 t \quad (1).$$

Energie E ist Leistung P [W] mal Zeit, also: E = P·t ⇔ P = E/t, so dass die Division der Gleichung (1) durch t ergibt:

$$P = \frac{1}{2}\rho A v^3 \quad (2).$$

Leistung ist Kraft F_L mal Geschwindigkeit, so dass aus (2)

$$P = F_L v = \frac{1}{2}\rho A v^3 \;\Leftrightarrow\; F_L = \frac{1}{2}\rho A v^2 \quad (3)$$

folgt. Eine Modifikation der Formel (3), abhängig von Form und Oberfläche der Querschnittfläche des fallenden Körpers ergibt mit Einführung des Widerstandsbeiwerts c_W die obige Formel für die Kraft des Luftwiderstands:

$$F_L = \frac{1}{2}c_W A\rho v^2\,.$$

(Einheiten: J = Joule, W = Watt).

Freier Fall versus Luftwiderstand

Gewichts- und Luftwiderstandskraft ergeben eine resultierende Kraft F_{res} mit einer (gleichmäßigen) Beschleunigung a:

$$F_{res} = ma = F_G - F_L = mg - \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 \text{ (4).}$$

Ist die resultierende Kraft $F_{res} = 0$, so hat der Körper seine konstante maximale Geschwindigkeit (Endgeschwindigkeit) v_{max} erreicht, mit der er die restliche Strecke bis zum Erdboden zurücklegt. Gemäß (4) ermittelt sich v_{max} als:

$$0 = mg - \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 = mg \Leftrightarrow v^2 = \frac{mg}{\frac{1}{2} c_W A \rho} = \frac{2mg}{c_W A \rho} \Leftrightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A \rho}} .$$

Mit (4) liegt eine Differenzialgleichung der Geschwindigkeit v vor, da die Beschleunigung a die Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t ist. Es folgt:

$$mv' = mg - \frac{1}{2} c_W A \rho v^2$$

und wegen v‘ = dv/dt und $v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A \rho}}$ weiter:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 \Leftrightarrow mdv = \left(mg - \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 \right) dt \Leftrightarrow mdv = mg\left(1 - \frac{c_W A \rho}{2mg} v^2 \right) dt \Leftrightarrow$$

$$mdv = mg\left(1 - \frac{1}{v_{\max}^2} v^2 \right) dt \Leftrightarrow mdv = mg\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right) dt \Leftrightarrow mdv = mg\left(1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right) dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{m}{m\left(1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right)} dv = gdt \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2} dv = gdt$$

sowie die Integration:

$$\int \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2} dv = \int gdt + C \text{ (5).}$$

Das rechte Integral in (5) ist leicht zu bestimmen als:

$$\int gdt = gt ,$$

das linke vermöge der Substitution $z = v/v_{max}$ mit $dz/dv = 1/v_{max} \Leftrightarrow v_{max}dz = dv$ und dem Grundintegral $\int \frac{1}{1-x^2} dx =$ artanh(x) (Area Tangens hyperbolicus) als:

$$\int \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2} dv = \int \frac{1}{1-z^2} v_{\max} dz = v_{\max} \int \frac{1}{1-z^2} dz = v_{max} \cdot \text{artanh}(z) = v_{max} \cdot \text{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right).$$

Beziehung (5) wird dann zu:

$$v_{max} \cdot \text{artanh}\left(\frac{v}{v_{\max}}\right) = gt + C,$$

wobei sich für die Integrationskonstante C = 0 ergibt wegen der angenommenen Anfangsgeschwindigkeit v(0) = 0 m/s zu Beginn t = 0 s des freien Falls. Es folgt:

$$v_{max}\cdot\text{artanh}\left(\frac{v}{v_{max}}\right) = gt \Leftrightarrow \text{artanh}\left(\frac{v}{v_{max}}\right) = \frac{g}{v_{max}}t,$$

so dass die Anwendung des tanh (Tangens hyperbolicus) ergibt:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right) \Leftrightarrow v = v_{\max}\tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right).$$

Damit gilt für die Geschwindigkeit des freien Falls mit Luftwiderstand:

$$v(t) = v_{\max}\tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)$$

bei: t -> ∞ => v(t) -> v_{max}. Integration der Funktion v(t) führt vermöge des Grundintegrals $\int \tanh(x)dx = \ln(\cosh(x))$ (natürlicher Logarithmus, Cosinus hyperbolicus) und der Substitution z = gt/v_{max} mit dz/dt = g/v_{max} ⇔ v_{max}dz/g = dt auf die Funktion des im freien Fall zurückgelegten Weges s(t):

$$s(t) = \int v_{\max}\tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)dt = v_{\max}\int\tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)dt = v_{\max}\int\tanh(z)\frac{v_{\max}}{g}dz = \frac{v_{\max}^2}{g}\int\tanh(z)dz =$$

$$\frac{v_{\max}^2}{g}\ln(\cosh(z)) = \frac{v_{\max}^2}{g}\ln(\cosh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)).$$

Folgerungen

Geschwindigkeits- und Wegfunktion sind also:

$$v(t) = v_{\max}\tanh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)$$

$$s(t) = \frac{v_{\max}^2}{g}\ln(\cosh\left(\frac{g}{v_{\max}}t\right)),$$

so dass mit $v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A\rho}}$ die Funktionen zu

$$v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A\rho}}\cdot\tanh\left(\sqrt{\frac{c_W A\rho g}{2m}}\,t\right)$$

$$s(t) = \frac{2m}{c_W A\rho}\ln(\cosh\left(\sqrt{\frac{c_W A\rho g}{2m}}\,t\right))$$

werden. Gemäß der Beziehung $v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A\rho}}$ folgt noch, dass eine höhere Masse m beim Körper im freien Fall auch eine höhere Endgeschwindigkeit v_{max} nach sich zieht, während eine größere Querschnittfläche die Endgeschwindigkeit reduziert.

Beispiel: Eine d = 10 cm durchmessende Kugel mit Masse m = 1 kg wird aus 1000 m Höhe über der Erdoberfläche abgeworfen. Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel betrage v = 0 m/s, der Luftwiderstandsbeiwert beträgt bei Kugeln $c_W = 0{,}4$.
Wir bestimmen zunächst die Querschnittfläche der Kugel als Kreis mit Radius r = 5 cm = 0,05 m:
$A = \pi \cdot 0{,}05^2 = 7{,}854 \cdot 10^{-3}\ m^2$.

Die Endgeschwindigkeit der im freien Fall mit Luftwiderstand befindlichen Kugel lässt sich mit der Luftdichte $\rho = 1{,}2\ kg/m^3$ (am Erdboden) bestimmen als:

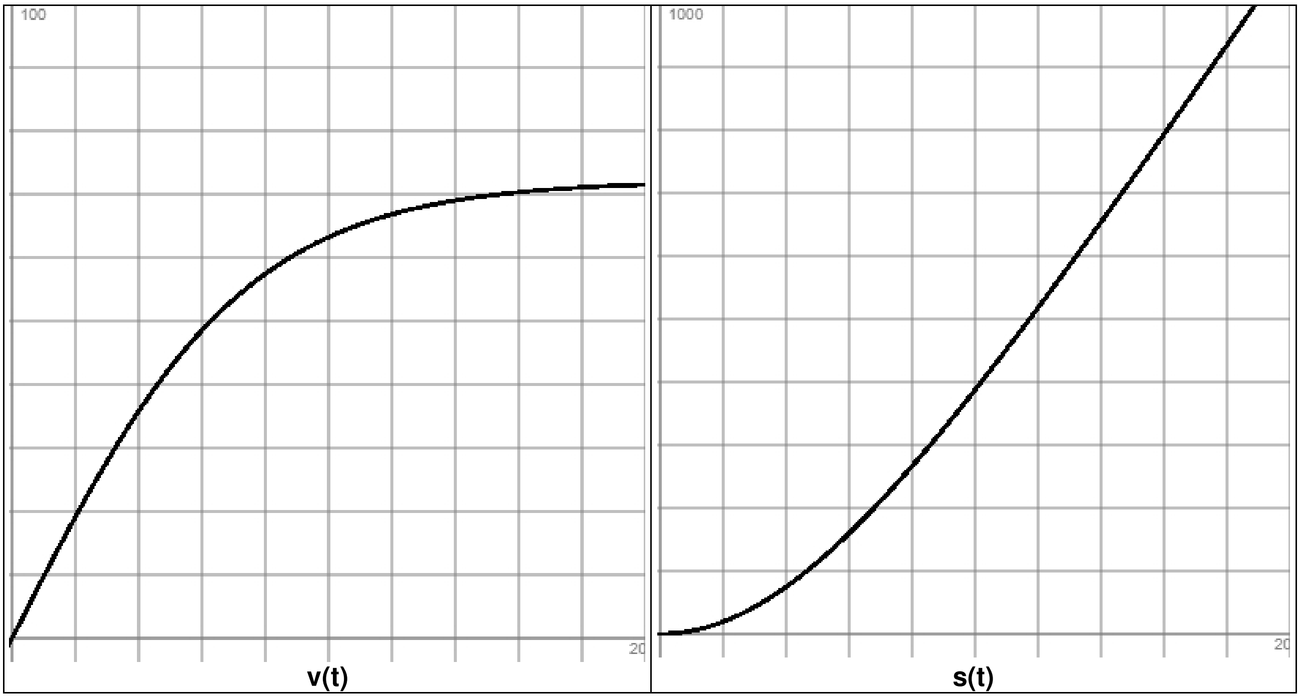
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 9{,}81}{0{,}4 \cdot 7{,}854 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}2}} = 72{,}14\frac{m}{s}.$$

Mit annähernd dieser Geschwindigkeit schlägt die Kugel also auf der Erdoberfläche auf. Wir betrachten nun die Geschwindigkeits- und Wegfunktionen als:

$$v(t) = 72{,}14 \cdot \tanh(0{,}136t)$$

$$s(t) = 530{,}5 \cdot \ln(\cosh(0{,}136t))$$

und haben:



Aus dem Graphen der Wegfunktion s(t) lässt sich der Zeitpunkt $t_{max} \approx 18{,}7$ s des Aufpralls der Kugel auf der Erdoberfläche ablesen (s(t) = 1000). Der Vergleich zum freien Fall ohne Luftwiderstand ergibt mit h = 1000 m:

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9{,}81}} = 14{,}28s$$ (als Zeitpunkt des Aufpralls)

$$v_{\max} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000} = 140{,}07\frac{m}{s}$$ (als Aufprallgeschwindigkeit).

Literaturhinweise: https://de.wikipedia.org/wiki/Freier_Fall, https://de.wikipedia.org/wiki/Fall_mit_Luftwiderstand (freier Fall); Maxim, Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand (www.virtual-maxim.de/downloads/freier%20fall%20mit%20und%20ohne%20luftwiderstand.pdf, abgerufen am 30.05.2022) (freier Fall, Luftwiderstand); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.286-293 (Hyperbel-, Areafunktionen).