Michael Buhlmann

Physik > Mechanik > Rotationsbewegung

Physikalische Grundlagen

Eine Rotationsbewegung liegt vor, wenn eine (Punkt-) Masse eine Kreisbewegung ausführt. r [m] ist der Radius des Kreises, auf dem die Bewegung ausgeführt wird, s [m] der Weg auf dem Kreis (Bogenlänge, Kreisumfang), t [s] die Zeit, v [$\frac{m}{s}$] die Geschwindigkeit und a [$\frac{m}{s^2}$] die Beschleunigung; zu einer Masse m [kg] gehören Kraft F [N = $\frac{kg \cdot m}{s^2}$] und Energie/Arbeit W [J = Nm = $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$]. Die gleichförmige Rotationsbewegung lässt sich dann physikalisch mit den folgenden Größen charakterisieren:

Kreisumfang:	$u = 2\pi r$
Frequenz, Drehzahl, Umlauffrequenz (= Anzahl der Umdrehungen n pro Sekunde):	$f = n$ [$\frac{1}{s}$ = Hz]
Periode (= Dauer einer Umdrehung):	$T = \frac{1}{f}$ [s], $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$
Drehwinkel:	$\varphi = \frac{s}{r}$, $s = \varphi r$
Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = \frac{\varphi}{t}$, $\varphi = \omega t$, $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega = 2\pi f$
Winkelbeschleunigung:	$\alpha = \frac{\omega}{t}$, $\omega = \alpha t$, $\omega = \sqrt{2\alpha\varphi}$
Weg:	$s = \varphi r$
Geschwindigkeit:	$v = \frac{s}{t}$, $v = \omega r$, $v = 2\pi f r$
Tangentialbeschleunigung:	$a_T = \frac{v}{t}$, $a_T = \alpha r$
Radial-/Zentral-beschleunigung:	$a_Z = \frac{v^2}{r}$, $a_Z = \omega^2 r$
Zentral-/Zentripetalkraft:	$F_Z = m \cdot a_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ $F_Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$, $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 mr}{F_Z}}$, $m = \frac{T^2 F_Z}{4\pi^2 r}$
Kinetische Energie:	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, $E_{kin} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$
Trägheitsmoment:	$I = m \cdot r^2$

Leistung:	$P = \frac{W}{t}$ [W]

Gleichförmigkeit der Rotationsbewegung bedeutet, dass die Masse m sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf dem Kreis bewegt. Im Gegensatz zu einer geradlinigen Bewegung, ändert bei der Rotation der Geschwindigkeitsvektor aber immer seine Richtung; es wird mithin hier eine Beschleunigung der Masse ausgeführt, der konstante Betrag der Geschwindigkeit steht für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, auf die eine Kraft, die Zentral- oder Zentripetalkraft, wirkt. Erlischt diese Kraft, so bewegt sich die Masse geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fort, d.h. ohne weitere Krafteinwirkung. Die Zentrifugal- oder Fliehkraft ist somit nur eine nicht existente Scheinkraft.

Beispiele und Aufgaben

a) Eine Kreisscheibe rotiert mit einer halben Umdrehung pro Sekunde um ihren Mittelpunkt. Auf der Scheibe sind Figuren (Figur 1, Figur 2) im Abstand von einem bzw. zwei Meter zum Mittelpunkt befestigt. Für beide Figuren ist die Winkelgeschwindigkeit ω gleich, denn es gilt:

Figur 1, 2: T = 0,5 s => f = 1/T = 2 Hz => ω = 2πf = 2π·2 = 4π = 12,57 Hz.

Hingegen ist die Geschwindigkeit der Figuren unterschiedlich, Figur 2 legt einen größeren Weg in der gleichen Zeit wie Figur 1 zurück, bewegt sich also schneller:

Figur 1: ω = 12,57 Hz, r = 1 m => v = ω r = 12,57·1 = 12,57 m/s
Figur 2: ω = 12,57 Hz, r = 2 m => v = ω r = 12,57·2 = 25,14 m/s.

b) Eine Wäscheschleuder mit einem Durchmesser von 40 cm drehe sich 1200 Mal pro Minute. Wie groß ist die Zentralbeschleunigung, wie groß die Zentripetalkraft, die auf einen Wassertropfen von 1 ml Größe wirkt?

Lösung: Es ist r = 0,2 m, der Umfang der Wäscheschleuder beträgt also: $s = 2\pi r$ = 1,26 m. Die Frequenz errechnet sich als Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde, also: f = 20 Hz. Die Geschwindigkeit, mit dem sich ein Wassertropfen auf der Zentrifugenwand bewegt, errechnet sich damit als: $v = sf = 2\pi rf$ = 25,2 $\frac{m}{s}$. Die Zentralbeschleunigung a_Z ist: $a_Z = \frac{v^2}{r}$ = 3175,2 $\frac{m}{s^2}$.

Die Dichte ρ von Wasser beträgt 1000 $\frac{kg}{m^3}$. Wegen $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V$ und V = 1 ml = 1 cm^3 = 10^{-6} m^3 gilt damit: m = 1000·10^{-6} kg = 10^{-3} kg = 0,001 kg = 1 g. Die Zentripetalkraft F_Z beträgt:

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} = \frac{0{,}001 \cdot 25{,}2^2}{0{,}2} \text{ N} = 3{,}18 \text{ N}.$$

c) Die Rotationsbewegung einer Masse m = 100 kg auf einer Kreisbahn mit Radius r = 50 m wird mit einer konstanten Geschwindigkeit v = 20 $\frac{m}{s}$ ausgeführt. Bestimme den Weg auf dem Kreis s, die Umlaufdauer T, die Frequenz f, die Zentralkraft F_Z und die kinetische Energie E_{kin}.

Lösung: Der Kreisumfang beträgt: $s = 2\pi r$ = 314 m. Die Umlaufdauer ergibt sich wegen: $v = \frac{s}{T} \Leftrightarrow T = \frac{s}{v}$ als: T = 15,7 s. Die Frequenz ist: $f = \frac{1}{T}$ = 0,064 Hz. Die Zentralkraft beträgt: $F_Z = \frac{mv^2}{r}$ = 800 N. Die kinetische Energie der sich auf der Kreisbahn befindenden Masse ist: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ = 0,5·100·20^2 = 20000 J = 20 kJ.

d) Eine Masse von 2 kg ist an einem 50 cm langen Seil befestigt und rotiere daran. Wirkt eine Kraft von 900 N an dem Seil, so reißt dieses. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse, wenn das Seil reißt und die Masse sich dann geradlinig fortbewegt?

Lösung: Es ist: m = 2 kg, r = 0,5 m. Die Zugkraft am Seil beim Reißen ist die Zentripetalkraft („Zentrifugalkraft") F_Z = 900 N. Wegen: $F_Z = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow \frac{F_Z r}{m} = v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{F_Z r}{m}}$ bestimmt sich die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Reißens des Seils als: v = 15 $\frac{m}{s}$.

e) Eine Auto (mit Masse m = 1100 kg) durchfährt eine kreisförmige Kurve mir Radius r = 50 m. Der Gleitreibungszahl (Haftzahl) des Autos sei f_0 = 0,4. Bei welcher Geschwindigkeit v fliegt das Auto aus der Kurve?

Lösung: Damit das Auto (gerade noch) nicht aus der Kurve fliegt, muss gelten: $F_H = F_Z$ mit Haftkraft F_H und Zentripetalkraft F_Z. Nun ist mit F_N als senkrecht zur Kurvenebene wirkender Normalkraft: $F_N = mg$, $F_H = f_0 \cdot F_N$, $F_Z = \frac{mv^2}{r}$, woraus folgt: $F_H = f_0 \cdot mg$ und:

$F_H = F_Z \Leftrightarrow f_0 \cdot mg = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow f_0 \cdot g = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow f_0 gr = v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{f_0 gr}$

Die maximale Geschwindigkeit, bei der das Auto gerade noch in der Kurve bleibt, beträgt damit: v = 14 $\frac{m}{s}$ = 50,43 $\frac{km}{h}$. Ist also die Geschwindigkeit v größer als 14 $\frac{m}{s}$, so wird das Auto aus der Kurve getragen. Nebenbei bemerkt, beträgt die Zentripetalkraft bei der maximalen Geschwindigkeit v = 14 $\frac{m}{s}$ und der Masse m = 1100 kg: $F_Z = \frac{1100 \cdot 14^2}{50}$ N = 4312 N.

f) Radfahrer, Zug o.ä. mit der Masse m durchfährt einen Kreis mit Radius r und unterliegt der Gewichtskraft (g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$ = Erdbeschleunigung). Zentralkraft F_Z und Gewichtskraft G ergeben die resultierende Kraft F_R, die in einem bestimmten Winkel α zur Senkrechten steht. Der Winkel α ist der Neigungswinkel, wo sich Zentral- und Gewichtskraft ausgleichen. Er errechnet sich im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten F_Z und G sowie der Hypotenuse F_R vermöge: $\tan\alpha = \frac{F_Z}{G}$ und damit wegen: $F_Z = \frac{mv^2}{r}$, $G = mg$: $\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$ oder wegen: $F_Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$, $G = mg$: $\tan\alpha = \frac{4\pi^2 r}{gT^2}$. Bei einem vorgegebenen Neigungswinkel α entspricht die zu fahrende Geschwindigkeit dann: $v = \sqrt{gr\tan\alpha}$. Die resultierende Kraft ist: $F_R = \sqrt{F_Z^2 + G^2}$.

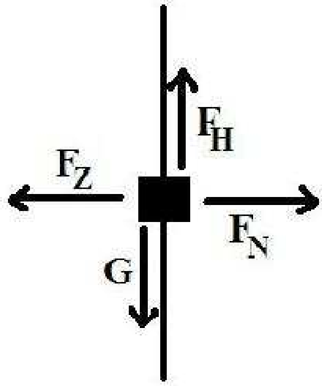
g) In einem 15 m durchmessenden Looping gleichen sich am Hochpunkt Zentral- und Gewichtskraft aus. Wie groß muss die Geschwindigkeit einer Masse am Hochpunkt mindestens sein, damit dieser Kraftausgleich geschieht?

Lösung: Mit r als Loopingradius, G als Gewichtskraft und F_Z als Zentralkraft gilt: $G = F_Z$ und damit:

$G = F_Z \Leftrightarrow mg = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow g = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow gr = v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{gr}$

Wegen r = 7,5 m (als halber Durchmesser) haben wir also: v = 8,58 $\frac{m}{s}$.

h) Ein Körper mit Masse m = 70 kg rotiere in einer senkrecht zur Erdoberfläche aufgestellten Zentrifuge mit Radius r = 2 m. Wie hoch muss die Frequenz der Zentrifuge sein, damit der Körper an die Zentrifugenwand gepresst wird, wenn zudem die Gewichtskraft an ihm wirkt und er mit Haftkoeffizient (Haftreibungszahl) f_0 = 0,5 an der Wand haftet?



Lösung: Im Fall, dass der Körper an die Zentrifugenwand gepresst wird, gleichen sich die Haftkraft F_H und die Gewichtskraft G gegeneinander aus, d.h.: F_H = G. Die Haftkraft ist: $F_H = f_0 \cdot F_N$, wobei die Normalkraft F_N senkrecht zur Zentrifugenwand steht, mithin die Zentripetalkraft F_Z ist. Also gilt: $F_H = f_0 \cdot F_Z = f_0 \cdot \frac{mv^2}{r}$. Wegen F_H = G folgt weiter:

$$F_H = f_0 \frac{mv^2}{r} = mg = G \quad \Leftrightarrow \quad f_0 \frac{v^2}{r} = g \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{gr}{f_0} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{gr}{f_0}}.$$

Damit ergibt sich als Rotationsgeschwindigkeit:
v = 6,3 $\frac{m}{s}$. Aus der Geschwindigkeit errechnet sich die Frequenz der Zentrifugenrotation vermöge des Zentrifugenumfangs $s = 2\pi r$ = 12,56 m und wegen: $T = \frac{s}{v}$ = 2 s als: $f = \frac{1}{T}$ = 0,5 Hz.

i) Ein Satellit mit Masse 800 kg bewegt sich einer Höhe von 520 km auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde. Seine Geschwindigkeit beträgt 7,6 $\frac{km}{s}$. Wie groß ist die Erdbeschleunigung auf den Satelliten in dieser Höhe?

Lösung: Zentripetal- und Gewichtskraft sind gleich, die Gewichtskraft G errechnet sich als: $G = mg_h$ mit g_h als Erdbeschleunigung in Höhe h. Wir errechnen zunächst die Zentripetalbeschleunigung a_Z mit: $a_Z = \frac{v^2}{R_E + h}$, wobei h = 520 km = $0{,}52 \cdot 10^6$ m die Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche, R_E = 6370 km = $6{,}37 \cdot 10^6$ m der Erdradius ist. Es folgt: $a_Z = \frac{7600^2}{6{,}89 \cdot 10^6} \frac{m}{s^2}$ = 8,38 $\frac{m}{s^2}$. Nun ist $a_Z = g_H$ = 8,38 $\frac{m}{s^2}$. Der Satellit ist in der Höhe h = 520 km nur noch $G = mg_h$ = 6704 N schwer.

j) Ein Satellit der Masse m = 800 kg umrunde die Erde auf einer Kreisbahn in Höhe von 350 km über der Erdoberfläche. Die Masse der Erde ist: M = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Mit der Zentralkraft $F_Z = \frac{mv^2}{r}$ und der Gravitationskraft $F_G = G\frac{Mm}{r^2}$ (mit Newtonscher Gravitationskonstante G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$), die sich das Gleichgewicht halten, gilt: $\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad mv^2 = G\frac{Mm}{r} \quad \Leftrightarrow$ $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r}$ (*) als kinetische Energie E_{kin} des Satelliten, also: E_{kin} = $2{,}374 \cdot 10^{10}$ J mit r = 6370 + 350 = 6720 km = $6{,}72 \cdot 10^6$ m. Aus (*) erhält man die Geschwindigkeit des Satelliten auf seiner Umlaufbahn mit: $mv^2 = G\frac{Mm}{r} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = G\frac{M}{r} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$, also mit: v = 7707,1 $\frac{m}{s}$.

Die Umlaufdauer des Satelliten auf seiner Bahn um die Erde bestimmt sich mit der Zentralkraft $F_Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ und vermöge: $\frac{4\pi^2 mr}{T^2} = G\frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ als: T = 5480,5 s = 1,52 h.

k) Aus der Umlaufdauer T der Erde um die Sonne mit T = 365,22 Tagen, dem Radius r der Erdbahn um die Sonne mit r = 150 Millionen km lässt sich die Masse der Sonne M vermöge der Zentralkraft $F_Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ (m = Masse der Erde) und der Gravitationskraft $F_G = G\frac{Mm}{r^2}$ (mit Newtonscher Gravitationskonstante G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$) bestimmen. Wegen der Identität $F_Z = F_G$ gilt: $\frac{4\pi^2 mr}{T^2} = G\frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 r}{T^2} = G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$. Es ist: r = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, T = $365{,}22 \cdot 24 \cdot 3600$ s = 31555008 s, es folgt: M = $2 \cdot 10^{30}$ kg.

Abkürzungen der physikalischen Maßeinheiten: Hz = Hertz; J = Joule; kg = Kilogramm; m = Meter; N = Newton; s = Sekunde.

Literaturhinweise: Abiturwissen Physik, Stuttgart ^{3}2015, S.19f; HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., Physik, Weinheim 2003, S.274-308; www.leifkiphysik.de > Kreisbewegung, Rotation.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 04.2021