Michael Buhlmann

Physik > Mechanik, Elektrizitätslehre > Schwingungen

Mathematische Grundlagen

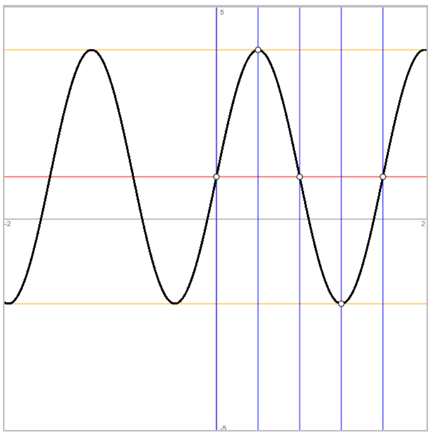
Trigonometrische Funktionen sind auf dem Sinus und Kosinus aufbauende Funktionen vom Typ:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$$

Dabei sind: a = Amplitude, b = Periodenfaktor, c = Verschiebung entlang der x-Achse, d = Mittellinie = Verschiebung entlang der y-Achse. Der Wertebereich ist: [d–a; d+a]. Für die Periode p der Funktion f(x) gilt: $p = \frac{2\pi}{b}$. Die Funktion f(x) schneidet im Abstand von p/2 die Mittellinie in den Wendepunkten $W(x_W|d)$ mit $x_W = c$, $x_W = c \pm p/2$, $x_W = c \pm p$, ... Die Funktion f(x) hat im Abstand von p Hochpunkte $H(x_H|d+a)$ bzw. Tiefpunkte $T(x_T|d-a)$ mit $x_H = c$, $x_H = c \pm p$, … bzw. $x_T = c + p/2$, $x_T = c + p/2 \pm p$, … (a>0). Die Periode p einer trigonometrischen Funktion lässt sich also vier gleich lange Intervalle [c; c+p/4], [c+p/4; c+p/2], [c+p/2; c+3p/4], [c+3p/4; c+p] teilen, die jeweils durch die Extrem- und Wendepunkte der Funktion voneinander getrennt sind. Bzgl. des Ab- und Aufleitens der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \;\text{->}\; f'(x) = ab \cdot \cos(b(x-c))$$
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d \;\text{->}\; f'(x) = -ab \cdot \sin(b(x-c))$$
$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \;\text{->}\; F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(b(x-c)) + dx$$
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d \;\text{->}\; F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(b(x-c)) + dx$$

Hinsichtlich der Bestimmung von trigonometrischen Funktionen gelten die Regeln: Mittellinie $d = \frac{y_H + y_T}{2}$ (mit Hochpunkt $H(x_H|y_H)$,Tiefpunkt $T(x_T|y_T)$); Amplitude $a = \frac{y_H - y_T}{2} = y_H - d$ (mit Hochpunkt $H(x_H|y_H)$, Tiefpunkt $T(x_T|y_T)$, a>0); Periodenfaktor $b = \frac{2\pi}{p}$ (mit Periode p); Verschiebung entlang der x-Achse $c = x_W$ (mit erstem oder zweitem Wendepunkt $W(x_W|y_W)$ mit positivem x_w).



f(x) = 3·sin(4x)+1
(waagerechte Geraden y=-2, y=1, y=4; senkrechte Geraden x=0, x=π/8, x=π/4, x=3π/8, x=π/2)

Schwingungen

Innerhalb der Physik können mechanische und elektromagnetische Schwingungen auf der Grundlage mathematisch-trigonometrischer Funktionen beschrieben werden, sofern die zugrundeliegenden physikalischen Sachverhalte idealisiert dargestellt werden sollen, etwa unter Vernachlässigung von Reibung u.a. Solche Schwingungen heißen harmonische (ungedämpfte, freie) Schwingungen, d.h. ihre Darstellung genügt den oben beschriebenen

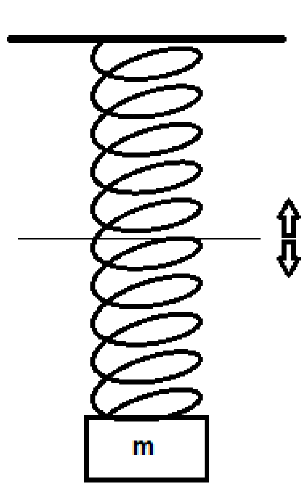
Sinus- oder Kosinusfunktionen.
Idealtypisch können in einem geeigneten x-t-Koordinatensystem Auslenkung x(t), Änderungsrate $\dot{x}(t)$ und Änderung der Änderungsrate $\ddot{x}(t)$ beschrieben werden. Es gelten dann für:

t [s] als Zeit
f [Hz = $\frac{1}{s}$] als Frequenz oder Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde
T [s] als Periode oder Schwingungsdauer
ω [Hz] als Kreisfrequenz
x [Größe] als Auslenkung
x_m [Größe] als Amplitude
$\dot{x}$ [$\frac{Größe}{s}$] als Änderungsrate
$\ddot{x}$ [$\frac{Größe}{s^2}$] als Änderung der Änderungsrate
F [N] als Kraft
E [J] als Energie

die folgenden formalen Beziehungen und (analogen) Regeln:

Auslenkung x(t)	$x(t) = x_m \sin \omega t$ bzw. $x(t) = x_m \cos \omega t$	$x(t) = x_m \sin(\omega(t - t_0))$ bzw. $x(t) = x_m \cos(\omega(t - t_0))$ (Phasenwinkel $\varphi_0 = \omega t_0$)
Periode T, Kreisfrequenz ω, Frequenz f	$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T = \frac{1}{f}$, $f = \frac{1}{T}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	
Änderungsrate $\dot{x}(t)$	$\dot{x}(t) = \omega x_m \cos \omega t$ bzw. $\dot{x}(t) = -\omega x_m \sin \omega t$	$\dot{x}(t) = \omega x_m \cos(\omega(t - t_0))$ bzw. $\dot{x}(t) = -\omega x_m \sin(\omega(t - t_0))$
Änderung der Änderungsrate $\ddot{x}(t)$	$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_m \sin \omega t$ bzw. $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$	$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega(t - t_0))$ bzw. $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega(t - t_0))$
Differentialgleichung	$x(t) = -\omega^2 \ddot{x}(t)$	
Rückstellkraft F_R	$F_R = -kx(t)$ (Rückstellkonstante k)	
Gesamtenergie E_{ges}	$E_{ges} = \frac{1}{2} k_1 x(t)^2 + \frac{1}{2} k_2 \dot{x}(t)^2 = const.$ (Konstanten k_1, k_2)	

Federpendel



Bei einem Federpendel schwingt mechanisch eine an einer Feder befestigte Masse m [kg] um eine Ruheposition. Dabei erfolgt die Schwingung reibungsfrei, die Masse der Feder sei vernachlässigbar. Es soll zudem das Hookesche Gesetz gelten:

$$F_R = -Ds$$

mit s [m] als Auslenkung der Masse, D [N/m] als Federkonstante und F_R [N] als (Hookesche) Rückstellkraft. Dies sind die Voraussetzungen für eine harmonische Schwingung, d.h. die Masse m schwingt zwischen den maximalen Auslenkungen $-s_m$, s_m gemäß:

$$s(t) = s_m \sin \omega t \, ,$$

und es gilt folglich die Differentialgleichung für Schwingungen:

$$a(t) = -\omega^2 s(t)$$

mit der Beschleunigung a(t) = $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_m \sin \omega t$ [m/s²]. Nun ist wegen F_R = m·a(t) auch: $a(t) = \frac{F_R}{m}$, so dass sich ergibt:

$$\frac{F_R}{m} = -\omega^2 s(t) \underset{F_R=-Ds(t)}{\Leftrightarrow} \frac{-Ds(t)}{m} = -\omega^2 s(t) \underset{:(-s(t))}{\Leftrightarrow} \frac{D}{m} = \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Die Kreisfrequenz ω [Hz] hängt also nur von der Federkonstante D und der Masse m ab. Für Periode T [s] und (Eigen-) Frequenz f [Hz] der mechanischen Schwingung gilt noch:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}},\ f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Mit der Geschwindigkeit v(t) = $\dot{s}(t) = \omega s_m \cos \omega t$ [m/s], die die Masse m während des Schwingungsvorgangs durchläuft, lässt sich neben der in der Feder gespeicherten potentiellen <u>Energie</u> $E_{pot}(t)$ = $\frac{1}{2}Ds(t)^2$ [J] auch die kinetische (Bewegungs-) Energie der Masse $E_{kin}(t)$ = $\frac{1}{2}mv(t)^2$ bestimmen, so dass sich als Gesamtenergie E_{ges} des Schwingungssystems ergibt:

$$E_{ges} = E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = \frac{1}{2}Ds(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}D(s_m \sin \omega t)^2 + \frac{1}{2}m(\omega s_m \cos \omega t)^2 =$$

$$\frac{1}{2}Ds_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 s_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}Ds_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\frac{D}{m}s_m^2 \cos^2 \omega t =$$

$$\frac{1}{2}Ds_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}Ds_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}Ds_m^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}Ds_m^2$$

wegen $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$. D.h. die Gesamtenergie ist konstant mit:

$$E_{ges} = \frac{1}{2}Ds_m^2,\ E_{ges} = \frac{1}{2}mv_m^2,\ E_{pot}(t) = E_{ges} - E_{kin}(t),\ E_{kin}(t) = E_{ges} - E_{pot}(t).$$

u.a. mit v_m als maximaler Geschwindigkeit und auf Grund von: $\frac{1}{2}Ds_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ wegen: $E_{ges} = E_{pot,\ max} = E_{kin,\ max}$. Dabei gilt:

Auslenkung:	Geschwindigkeit, Beschleunigung, Energie:
Ruhelage s(t) = 0	$v(t)$ maximal, $a(t)$ = 0, $E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv_m^2$ maximal, $E_{pot}(t) = 0$
Maximale Auslenkung s(t) = ±s_m	$v(t) = 0$, $a(t)$ maximal, $E_{pot}(t) = \frac{1}{2}Ds_m^2$ maximal, $E_{kin}(t) = 0$

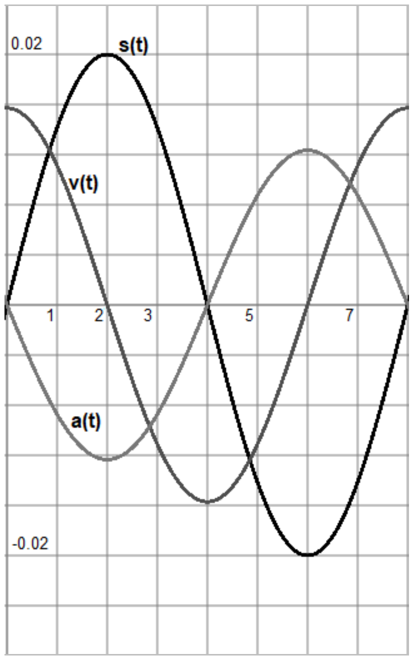
Beachtet man z.B. bei einem vertikal ausgerichteten Federpendel (Feder-Schwere-Pendel) noch die Gewichtskraft F_G = m·g der Masse m, so vergrößert sich die Rückstellkraft um diese Gewichtskraft, alles zur harmonischen Schwingung Gesagte bezieht sich dann auf die resultierende Rückstellkraft: $F_R = -Ds$.

<u>Beispiele</u>: a) Eine Feder besitzt die Federkonstante D = 5 N/m, das Gewicht an der Feder die Masse m = 0,5 kg. Dann schwingt das Gewicht in harmonischer Schwingung mit der Periode T =

$2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{5}} = 2\pi\sqrt{0,1}$ = 2 s, die Frequenz ist: f = 1/2 = 0,5 Hz.

b) Eine an einer Feder befestigte Masse m = 200 g = 0,2 kg schwingt gemäß der harmonischen Schwingung bis 2 cm = 0,02 m nach oben bzw. nach unten um die Ruhelage: $s(t) = 0{,}02\sin(\frac{\pi}{4}t)$.

Ableiten ergibt: $v(t) = 0{,}005\pi\cos(\frac{\pi}{4}t)$, $a(t) = -0{,}00125\pi^2\sin(\frac{\pi}{4}t)$.



Die Schwingungsdauer ist: T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}$ = 8 s, die Schwingungsfrequenz f = 1/8 = 0,125 s. Wegen $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$ errechnet sich die Federkonstante als: D = $4\pi^2 mf^2$ = 0,1234 N/m. Die Gesamtenergie im Schwingungssystem ist: E_{ges} = $\frac{1}{2}Ds_m^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1234\cdot 0{,}02^2$ = $2{,}468\cdot 10^{-5}$ J. Daraus ergibt sich u.a. auf Grund der Formel: $\frac{1}{2}Ds_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ und deren Umstellung die maximale Geschwindigkeit: v_m = $s_m\sqrt{\frac{D}{m}} = 0{,}02\sqrt{\frac{0{,}1234}{0{,}2}}$ = 0,0157 m/s = 0,05π = v(0) = -v(4) = v(8). Die maximale Beschleunigung lässt ablesen am Term a(t) und beträgt: a_m = -a(2) = a(6) = $0{,}00125\pi^2$ = 0,0123 m/s².

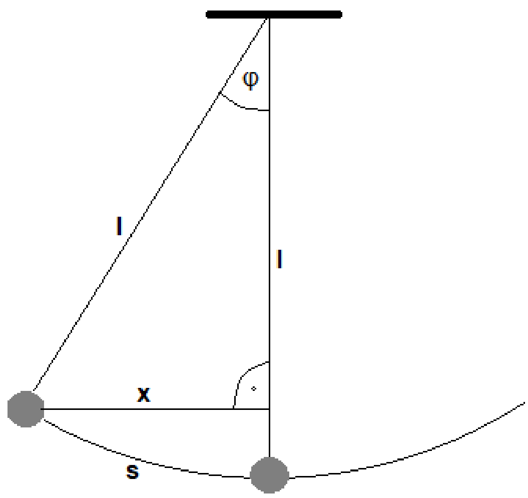
Fadenpendel

Eine Masse m [kg] am Fadenpendel der Länge l [m] schwingt entlang eines Kreises hin und her. Dabei steht die Kraft, die die Masse am Faden hält, der Gewichtskraft $F_G = m\cdot g$ der Masse gegenüber, so dass sich tangential zum Kreis eine Rückstellkraft F_R bildet. Im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel φ und im damit korrespondierenden Kräftedreieck gilt dann:

$$\sin\varphi = \frac{x}{l} = \frac{|F_R|}{F_G},$$

woraus folgt:

$$|F_R| = F_G\sin\varphi = mg\sin\varphi = mg\frac{x}{l} = \frac{mg}{l}x.$$



Die Auslenkung s stimmt nun für kleine Winkel φ ungefähr mit x überein, so dass – unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Rückstellkraft entgegengesetzt wirkt – folgt:

$$F_R = -\frac{mg}{l}s.$$

Für kleine Winkel φ liegt mithin eine harmonische Schwingung des Fadenpendels vor; es gilt für die Auslenkung: $s(t) = s_m\sin\omega t$, die Kreisfrequenz ω errechnet sich als:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

und Schwingungsdauer T [s] und (Eigen-) Frequenz f [Hz] als:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

wobei g die Erdbeschleunigung mit g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$ ist.

<u>Beispiele</u>: a) Gemäß der Pendelformel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ lässt sich aus dem Schwingungsverhalten eines harmonischen Fadenpendels die <u>Erdbeschleunigung</u> g errechnen als:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,,$$

wenn nur Fadenlänge l und (messbare) Schwingungsdauer T bekannt sind.

b) Verlängert man die Länge l eines Fadenpendels um Δl, so lässt sich nur aus Δl die Erdbeschleunigung g ermitteln, wenn die Schwingungsdauern T_1, T_2 des ursprünglichen und des verlängerten Fadenpendels ermittelt sind. Wieder folgt aus der Pendelformel für die beiden Fadenpendel:

$$gT_1^2 = 4\pi^2 l \text{ (*) bzw. } gT_2^2 = 4\pi^2(l+\Delta l) \text{ (**)}$$

Subtraktion der Gleichungen (**) und (*) ergibt:

$$gT_2^2 - gT_1^2 = 4\pi^2(l+\Delta l) - 4\pi^2 l$$

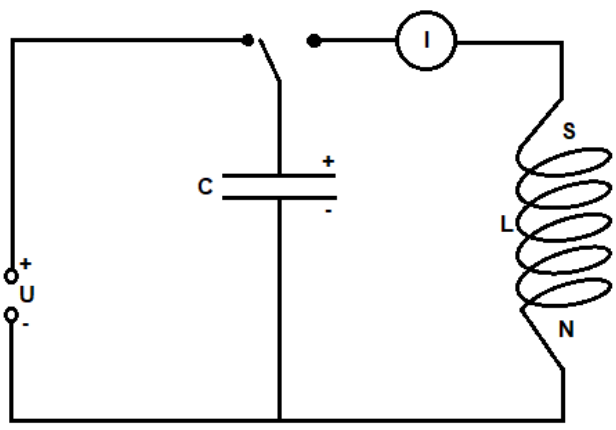
und weiter:

$$g(T_2^2 - T_1^2) = 4\pi^2 l + 4\pi^2\Delta l - 4\pi^2 l \Leftrightarrow g(T_2^2 - T_1^2) = 4\pi^2\Delta l \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2\Delta l}{T_2^2 - T_1^2} \text{ (***)}$$

Wir wenden die Formel (***) an. Ein Fadenpendel hat die Periode T_1 = 1,36s. Der Faden des Fadenpendels wird um Δl = 0,7m verlängert, das verlängerte Fadenpendel besitzt die Schwingungsdauer T_2 = 2,16s. Gemäß der Formel (***) gilt damit für die Erdbeschleunigung g:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}7}{2{,}16^2 - 1{,}36^2} = 9{,}81\frac{m}{s^2}\,.$$

<u>Elektromagnetischer Schwingkreis</u>



Im Bereich der Elektrizitätslehre kommen Schwingungen beim elektromagnetischen Schwingkreis vor. In einem Stromkreis befinden sich eine Gleichspannungsquelle, ein Schalter, ein Kondensator und eine Spule. Je nach Schalterstellung wird der Kondensator geladen oder in einem elektromagnetischen Schwingungsvorgang über eine Spule abwechselnd entladen und aufgeladen, was sich über einen im Stromkreis integrierten Stromstärkenmesser nachvollziehen lässt. Dabei ist zunächst festzuhalten:

a) <u>Elektrische Ladung</u>: Q [C]; alle Ladungen sind ein Vielfaches der positive/negativen Elementarladung $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C. Es gilt hinsichtlich der Stromstärke I [A]: $I = \dot{Q}(t)$ als Änderungsrate der Ladung.

b) Kondensator zur Ladungsspeicherung: Ein Kondensator wird mit Hilfe einer Spannungsquelle mit Potenzialdifferenz U [V] geladen. Dann gilt bzgl. der elektrischen Ladung Q auf dem Kondensator und der Kapazität C [F] des Kondensators: $C = \frac{Q}{U}$. Eine weitere Kondensatorformel ist: $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}$ mit: A [m^2] als Fläche, d als Abstand der Kondensatorplatten, ε_0 = 8,85·10^{-12} $\frac{F}{m}$ als Dielektrizitätskonstante und ε_r als dimensionslose Dielektrizitätszahl eines Dielektrikums, des Stoffes zwischen den Kondensatorplatten (ε_r = 1 bei Vakuum oder Luft). Es folgt noch hinsichtlich der auf dem Kondensator gespeicherten Ladung: $Q = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} U$ sowie für die im Kondensator gespeicherte elektrische potenzielle Energie: $E_{pot} = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$. Die (konstante) Stärke E des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten beträgt: $E = \frac{U}{d}$. Es ergibt sich ergibt sich als elektrische Kraft F_E einer Ladung q im elektrischen Feld: $F_E = Eq = \frac{Uq}{d}$.

c) Spule: Eine Spule besteht aus Wicklungen eines Strom führenden Drahtes als Zylinderspule (Solenoid) und Ringspule (Toroid). n sei dabei die Anzahl der Windungen, l [m] die Länge der Spule, I die Stromstärke des Stroms, der durch die Windungen der Spule fließt. Für die Stärke B [T] des durch den Strom induzierten Magnetfeldes gilt dann: $B = \mu_r \mu_0 n \cdot \frac{I}{l}$, wobei μ_0 = 1,26·10^{-6} $\frac{Tm}{A}$ die Permeabilitätskonstante des Vakuums und μ_r die dimensionslose relative Permeabilität ist. Die Induktivität L einer Zylinderspule mit Querschnittsfläche A ist: $L = \mu_r \mu_0 \cdot \frac{n^2}{l} \cdot A$ [H], woraus sich im Rahmen der in der Spule erfolgenden elektromagnetischen Induktion die Induktionsspannung $U_{ind} = -L \cdot \dot{I} = -\mu_r \mu_0 \cdot \frac{n^2}{l} \cdot \dot{I} \cdot A$ und die magnetische Energie $E_{mag} = \frac{1}{2} LI^2$ ergibt. Eine Rolle spielt schließlich die Lorentzkraft F_L innerhalb des Magnetfeldes: $F_L = BIl$.

Unter der Voraussetzung einer harmonischen Schwingung geschieht, nachdem der Kondensator einmalig durch die Spannungsquelle aufgeladen wurde, – wie oben angedeutet – eine abwechselnde Ent- und Aufladung des Kondensators bei Stromfluss durch die Spule und der Auf- und Abbau eines Magnetfeldes in der Spule. Dabei sind innerhalb der Periode T [s] einer Schwingung folgende Phänomene zu beobachten:

t=0: Kondensator (+/-) mit maximaler Ladung Q_{max}, Kondensatorspannung U_{max}, maximale Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2} CU_{max}^2$, Stromstärke I = 0, magnetische Feldstärke B = 0, magnetische Energie E_{mag} = 0

0<t<T/4: Entladung des Kondensators: Ladung Q_{max} -> 0, Kondensatorspannung U_{max} -> 0, Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2} CU^2$ => elektrischer Strom (+ -> -) mit Stromstärke 0 -> I_{max}, magnetisches Feld in und um Spule (N -> S) mit magnetischer Feldstärke B -> $B_{max,}$ magnetische Energie $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$

t = T/4: Kondensator entladen: Ladung Q = 0, Kondensatorspannung U = 0, Kondensatorenergie E_{pot} = 0, maximale Stromstärke I_{max}, maximale magnetische Feldstärke B_{max}, maximale magnetische Energie $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2_{\max}$

T/4<t<T/2: Magnetisches Feld in und um Spule (N -> S) mit magnetischer Feldstärke B_{max} -> 0, elektrischer Strom (+ -> -) mit Stromstärke I_{max} -> 0 => Aufladung des Kondensators: Ladung 0 -> Q_{max}, Kondensatorspannung 0 -> -U_{max}, Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2$

t =T/2: Kondensator (-/+) mit maximaler Ladung Q_{max}, Kondensatorspannung -U_{max}, maximale Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2_{\max}$, Stromstärke I = 0, magnetische Feldstärke B = 0, magnetische Energie E_{mag} = 0

T/2<t<3T/4: Entladung des Kondensators: Ladung Q_{max} -> 0, Kondensatorspannung -U_{max} -> 0, Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2$ => elektrischer Strom (- <- +) mit Stromstärke 0 -> I_{max}, magnetisches Feld in und um Spule (S <- N) mit magnetischer Feldstärke B -> $B_{max,}$ magnetische Energie $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$

t = 3T/4: Kondensator entladen: Ladung Q = 0, Kondensatorspannung U = 0, Kondensatorenergie E_{pot} = 0, maximale Stromstärke I_{max}, maximale magnetische Feldstärke B_{max}, maximale magnetische Energie $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2_{\max}$

3T/4<t<T: Magnetisches Feld in und um Spule (S <- N) mit magnetischer Feldstärke B_{max} -> 0, elektrischer Strom (- <- +) mit Stromstärke I_{max} -> 0 => Aufladung des Kondensators: Ladung 0 -> Q_{max}, Kondensatorspannung 0 -> U_{max}, Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2$

t =T: Kondensator (+/-) mit maximaler Ladung Q_{max}, Kondensatorspannung U_{max}, maximale Kondensatorenergie $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2_{\max}$, Stromstärke I = 0, magnetische Feldstärke B = 0, magnetische Energie E_{mag} = 0

Je halbe Schwingungsdauer ist also der Kondensator voll geladen, wenn auch unter umgekehrten Ladungsvorzeichen (+/-; -/+; …). In zwei aufeinanderfolgenden Periodenhälften fließt der Strom jeweils in umgekehrter Stromrichtung (+ -> -; - <- +; …), dasselbe gilt für die Richtung des in und um die Spule aufgebauten Magnetfeldes (N -> S; S <- N; …).
Die harmonische Schwingung, die dem elektromagnetischen Schwingkreis zugrunde liegt, lässt sich mit Hilfe der Ladungsgröße auf dem Kondensator beschreiben als:

$$Q(t) = Q_m \cos \omega t \, .$$

1. Ableitung der Funktion Q(t) nach t ist: $I(t) = \dot{Q}(t) = -\omega Q_m \sin \omega t$, als 2. Ableitung ergibt sich: $\ddot{Q}(t) = -\omega^2 Q_m \cos \omega t$. Damit gilt die Differentialgleichung:

$$\ddot{Q}(t) = -\omega^2 Q(t) \quad (*).$$

Die Kreisfrequenz ω lässt sich dabei herleiten aus der Tatsache, dass die Gesamtenergie im Schwingungssystem konstant ist und sich aus der Energie des durch die Spule aufgebauten Magnetfeldes E_{mag} und der Kondensatorenergie E_{pot} zusammensetzt. Es gilt also auch auf Grund C = Q/U => U = Q/C => $U^2 = Q^2/C^2$ und $I = \dot{Q}(t)$:

$$E_{ges} = E_{mag}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}LI(t)^2 + \frac{1}{2}CU(t)^2 = \frac{1}{2}LI(t)^2 + \frac{1}{2}C\left(\frac{Q(t)}{C}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}LI(t)^2 + \frac{1}{2C}Q(t)^2 = \frac{1}{2}L\dot{Q}(t)^2 + \frac{1}{2C}Q(t)^2 .$$

Ableiten der Gleichung nach t ergibt wegen $E_{ges}' = 0$ und nach der Kettenregel:

$$0 = \frac{1}{2}L \cdot 2\dot{Q}(t)\ddot{Q}(t) + \frac{1}{2C} \cdot 2Q(t)\dot{Q}(t) = L\dot{Q}(t)\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t)\dot{Q}(t) = \dot{Q}(t)\left(L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t)\right)$$

für alle t mit 0≤t≤T usw. Es ist damit:

$$0 = L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) \Leftrightarrow L\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{C} \cdot Q(t) \Leftrightarrow \ddot{Q}(t) = -\frac{1}{LC} \cdot Q(t) \;\; (**).$$

Koeffizientenvergleich zwischen den Differentialgleichungen (*) und (**) führt auf die Kreisfrequenz ω:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Es ergibt sich die Thomsonsche Schwingungsgleichung für Schwingungsdauer T und Schwingungsfrequenz (Eigenfrequenz) f [Hz]:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \,,\; f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} .$$

Beispiele: a) I. Es gilt der oben angegebene Schaltplan eines elektrischen (Gleichstrom-) Stromkreises mit Schalter, (Gleichstrom-) Spannungsquelle, Kondensator und Spule. Zunächst wird (Schalterstellung links) ein Plattenkondensator mit Plattenfläche A = 0,36 m^2 und Plattenabstand d = 0,2 mm = 0,0002 m aufgeladen. Dessen Kapazität beträgt (mit ε_r = 1 für das zwischen den Platten befindliche Medium Luft):

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}36}{0{,}0002} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 16 \text{ nF}.$$

An Ladung kann der Kondensator bei einer aus einer Gleichstromquelle kommenden Spannung von U = 10 V speichern:

$$Q = CU = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 10 = 1{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ C} = 160 \text{ nC}.$$

II. Im Stromkreis befindet sich eine Spule der Länge l = 8 cm = 0,08 m mit Windungszahl n = 1000 und Spulendurchmesser d = 5 cm = 0,05 m bei kreisförmigem Querschnitt. Der Spulenquerschnitt berechnet sich mit r = 0,025 m und mit der Kreisformel als $A = \pi \cdot 0{,}025^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^2. Die Induktivität der Spule ergibt sich damit (bei μ_r =1) als:

$$L = \mu_r \mu_0 \cdot \frac{n^2}{l} \cdot A = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1000^2}{0{,}08} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}032 \text{ H} = 32 \text{ mH}.$$

III. Kondensator und Spule führen nun elektromagnetische Schwingungen im elektromagnetischen Schwingkreis aus (Schalterstellung rechts). Dabei gilt für die Eigenfrequenz f:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}032 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-8}}} = 7033{,}7 \text{ Hz},$$

für die Schwingungsdauer:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{7033{,}7} = 1{,}42 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

IV. Die Schwingungsgleichung der Ladung auf dem Kondensator lautet wegen der Kreisfrequenz

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 7033{,}7$ = 44194,04 und mit $Q_m = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ C:

$$Q(t) = 1{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot \cos(44194{,}04t)\,.$$

Die Spannung U(t) am Kondensator und die Ableitung $\dot{Q}(t) = I(t)$ als Stromstärke sind:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-7}}{1{,}6 \cdot 10^{-8}} \cdot \cos(44194{,}04t) = 10 \cdot \cos(44194{,}04t)$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -1{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 44194{,}04 \cdot \sin(44194{,}04t) = -0{,}007 \cdot \sin(44194{,}04t)\,.$$

Im Stromkreis fließt damit Strom mit maximaler Stromstärke von I_{max} = 0,007 A = 7 mA. Weiter sind Spannung und Stromstärke phasenverschoben um ein Viertel der Schwingungsdauer T (T/4).

V. Die Gesamtenergie des Schwingungssystems entspricht der elektrisch-potentiellen Energie des vollständig aufgeladenen Kondensators, beträgt also mit U_{max} = 10 V:

$E_{ges} = \frac{1}{2} Q U_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 10$ = $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ J.

b) Beträgt z.B. umgekehrt die Schwingungsdauer des elektromagnetischen Schwingkreises T = 0,02 s und die Kondensatorkapazität C = 50 µF = $5 \cdot 10^{-5}$ F, so lässt sich die Induktivität der Spule durch Umstellen der Thomsonschen Schwingungsgleichung berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \;\Leftrightarrow\; T^2 = 4\pi^2 LC \;\Leftrightarrow\; L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}\,.$$

Damit gilt: $L = \frac{0{,}02^2}{4\pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}$ = 0,2 H.

Abkürzungen der physikalischen Maßeinheiten: A = Ampere; C = Coulomb, cm = Zentimeter; F = Farad; g = Gramm; H = Henry; Hz = Hertz; J = Joule; kg = Kilogramm; m = Meter; m = Milli; m^2 = Quadratmeter; µ = Mikro; n = Nano; N = Newton; s = Sekunde; T = Tesla; V = Volt.

Literaturhinweise: DIEHL, B., ERN, R. u.a., Physik. Oberstufe. Kursstufe Baden-Württemberg, Berlin 2010, S.96-119; Dorn Physik. Oberstufe Ausgabe A, Berlin-Darmstadt-Dortmund [16]1972, S.260-268, 467f; HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., Physik, Weinheim 2003, S.930-937; www.leifkiphysik.de > Elektromagnetischer Schwingkreis, Fadenpendel. Federpendel, Feder-Schwere-Pendel.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 06.2019