Michael Buhlmann

Physik > Mechanik > Wurf und Wurfparabel

Innerhalb der Mechanik als Teilgebiet der Physik wird unter bestimmten Voraussetzungen gearbeitet: Die Bewegung eines Körpers im Raums wird zur Bewegung eines Massenpunktes, der Körperbewegung entgegenstehende Kräfte wie z.B. der Luftwiderstand werden vernachlässigt. Unter diesen Bedingungen gelten die Gesetzmäßigkeiten der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Geschwindigkeit v [m/s] ist dabei eine den Raum, die Strecke s [m] und die Zeit t [s] verbindende physikalische Größe (Einheiten: m = Meter, s = Sekunde).

Für die gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$v = \frac{s}{t},\ s = vt,\ t = \frac{s}{v}.$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Beschleunigung a [m/s^2] ergibt sich:

$$a = \frac{v}{t},\ v = at,\ t = \frac{v}{a}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2,\ a = \frac{2s}{t^2},\ t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$s = \frac{1}{2}vt,\ v = \frac{2s}{t},\ t = \frac{2s}{v}$$

$$s = \frac{v^2}{2a},\ a = \frac{v^2}{2s},\ v = \sqrt{2as}.$$

Mit a = g = 9,81 m/s^2 folgen für die Erde als einen den Gravitationsgesetzen unterliegenden Himmelskörper die Gesetzmäßigkeiten für den freien Fall aus einer Höhe h [m]:

$$v = gt,\ t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$h = \frac{1}{2}vt,\ v = \frac{2h}{t},\ t = \frac{2h}{v}$$

$$h = \frac{v^2}{2g},\ v = \sqrt{2gh}.$$

Der Wurf eines Massenpunktes von einer bestimmten Höhe y_0 [m], $y_0 \geq 0$, unter einem bestimmten Winkel φ (-90°≤φ≤90°) wird als schiefer Wurf mit den Spezialfällen waagerechter (φ=0°) und senkrechter Wurf nach oben (φ=90°) bzw. nach unten (φ=-90°) bezeichnet. Resultat des schiefen Wurfs ist die Bewegung des Massenpunktes entlang einer Wurfparabel, bis der Erdboden (y=0 m) erreicht wird. Dabei ergibt sich die Wurfparabel aus der konstanten Geschwindigkeit v_0 [m/s], $v_0 \geq 0$, mit der ein Massenpunkt geworfen wird, und dem freien Fall, dem der Massenpunkt unterliegt. Gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Bewegung überlagern sich (voneinander unbeeinflusst bei geringen Geschwindigkeiten gemäß der Newtonschen Mechanik) zur Wurfparabel.

Im Einzelnen betrachten wir die dem schiefen Wurf zugrunde liegende Anfangsgeschwindigkeit v_0 als zweidimensionalen Vektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ v_0 \sin\varphi \end{pmatrix}$ in x- (horizontaler) und y- (vertikaler) Richtung eines x-y-Koordinatensystems. Abwurfpunkt ist dann der Punkt $P(0|y_0)$ des Koordinatensystems. Gemäß den Regeln für die gleichförmige und die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt dann mit der Zeit, dem Zeitpunkt t als Parameter, t≥0, für den Geschwindigkeitsvektor und die Geschwindigkeit des Massenpunktes:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ v_0 \sin\varphi - gt \end{pmatrix}, \; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(v_0 \cos\varphi)^2 + (v_0 \sin\varphi - gt)^2}$$

und daher wegen $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:

$v_x = v_0 \cos\varphi$ (konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung)

$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$ (konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung).

(Komponentenweises) Integrieren führt auf die Gleichungen für den Ort des Massenpunktes im Koordinatensystem zum Zeitpunkt t:

$x = v_0 \cos\varphi \cdot t$ (horizontale Richtung)

$y = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0$ (vertikale Richtung)

(Integration für die y-Koordinate mit Integrationskonstante y_0 wegen des Abwurfpunkts $P(0|y_0)$). Aus den obigen Gleichungen für die Raumkoordinaten x und y ergibt sich die Gleichung der Wurfparabel gemäß der folgenden Überlegungen: Dem Umstellen der Gleichung für x nach t (bei v_0>0, -90°<φ<90°):

$$x = v_0 \cos\varphi \cdot t \; => \; t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$$

folgt das Einsetzen von $t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$ in die Gleichung für y, also:

$$y = v_0 \sin\varphi \cdot \frac{x}{v_0 \cos\varphi} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\varphi} \right)^2 + y_0$$

mit den weiteren Umformungen:

$$y = v_0 \sin\varphi \cdot \frac{x}{v_0 \cos\varphi} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\varphi} \right)^2 + y_0 = \tan\varphi \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi} + y_0 =$$

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 + \tan\varphi \cdot x + y_0 .$$

Aus der Wurfparabel erschließt sich der Scheitelpunkt der Wurfbewegung (bei φ>0°) vermöge des Nullsetzens der 1. Ableitung von y:

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 + \tan\varphi \cdot x + y_0 \; => \; y' = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\varphi} x + \tan\varphi = 0 \; =>$$

$$\tan\varphi = \frac{g}{v_0^2\cos^2\varphi}x \text{ => } x = \frac{v_0^2\cos^2\varphi}{g}\cdot\tan\varphi \text{ => } x_H = \frac{v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi$$

als (Hochpunkt) H($\frac{v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi \mid \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi + y_0$) mit der maximalen Wurfhöhe:

$$y_H = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\left(\frac{v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi\right)^2 + \tan\varphi\cdot\frac{v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi + y_0 =$$

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{v_0^4}{g^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \tan\varphi\cdot\frac{v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi + y_0 =$$

$$-\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi + \frac{v_0^2}{g}\sin^2\varphi + y_0 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi + y_0 .$$

Daneben gilt für die <u>Wurfweite</u> durch Nullsetzen des Wurfparabelterms und Lösen der quadratischen Gleichung:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2 + \tan\varphi\cdot x + y_0 = 0 \text{ =>}$$

$$-gx^2 + 2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot x + 2v_0^2\cos^2\varphi y_0 = 0 \text{ =>}$$

$$x = \frac{-2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi \pm \sqrt{(2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi)^2 - 4(-g)2v_0^2\cos^2\varphi y_0}}{2(-g)} =$$

$$\frac{-2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi \pm \sqrt{4v_0^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 8gv_0^2\cos^2\varphi y_0}}{-2g} =$$

$$\frac{2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi \pm 2v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{2g} = \frac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi \pm v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{g},$$

wobei wegen x≥0 nur der Wert

$$x_W = \frac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi + v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}$$

die Wurfweite darstellt. Für y_0=0, d.h. bei einem Wurf vom Erdboden aus, folgt noch:

$$x_W = \frac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi + v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi}}{g} = \frac{2v_0^2\sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi .$$

Der weiteste Wurf gelingt also unter einem Winkel φ=45°.

Mit der Betrachtung des Standortvektors

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos\varphi\cdot t \\ v_0\sin\varphi\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{pmatrix}$$

lassen sich die folgenden zeitlichen Berechnungen anstellen. Es gilt (bei φ>0°), dass im Hochpunkt der Wurfparabel die Geschwindigkeit v_y den Wert 0 haben muss (Änderung von einer positiven zu einer negativen vertikalen Geschwindigkeit). Also:

$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt = 0 \;\; => \;\; v_0 \sin\varphi = gt \;\; => \;\; t_H = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}.$$

t_H heißt <u>Steigzeit</u> der Wurfparabel. Die <u>Wurfdauer</u> t_W berechnet sich aus:

$$y = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 = 0 \;\; => \;\; -gt^2 + 2v_0 \sin\varphi \cdot t + 2y_0 = 0 \;\; =>$$

$$t = \frac{-2v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{(2v_0 \sin\varphi)^2 - 4(-g)2y_0}}{2(-g)} = \frac{2v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2\varphi + 8gy_0}}{2g} =$$

$$\frac{2v_0 \sin\varphi \pm 2\sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{2g} = \frac{v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g},$$

wobei wieder nur der Wert

$$t_W = \frac{v_0 \sin\varphi + \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g},$$

die Wurfdauer angibt. Ist y_0=0, d.h. bei einem Wurf vom Erdboden aus, so gilt:

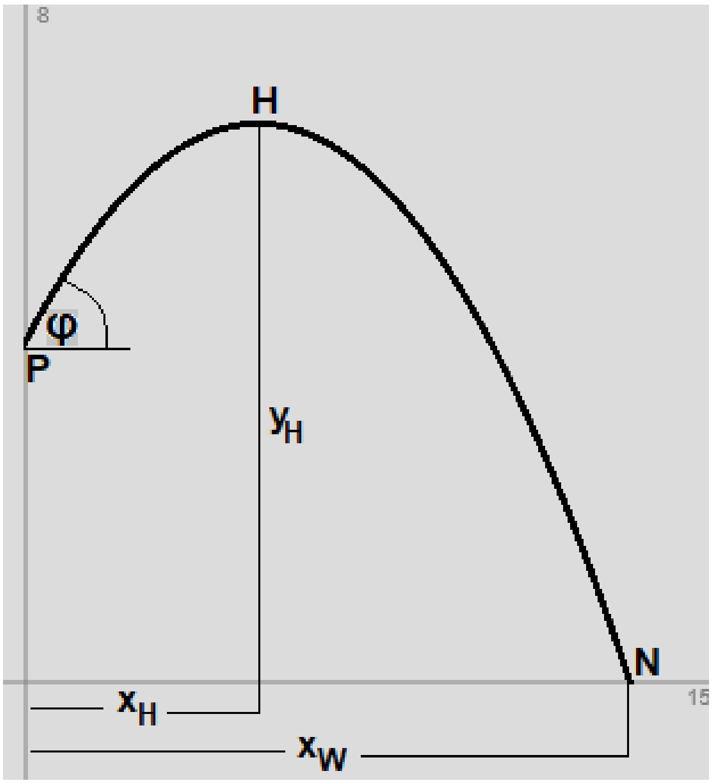
$$t_W = \frac{v_0 \sin\varphi + \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi}}{g} = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g},$$

d.h.: $t_W = 2t_H$; die Wurfdauer ist doppelt so groß wie die Steigzeit.

<u>Beispiel</u>: Wurf aus 4 m Höhe, Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 10 m/s, Wurfwinkel φ=45° -> Wurfparabel y = -0,0981x^2+x+4 -> Steigzeit t = 0,72 s, Wurfdauer t = 1,88 s, maximale Wurfhöhe y_H = 6,5484 m, Wurfweite x_W = 13,2671 m, Horizontalgeschwindigkeit v_x = 7,0711 m/s, Vertikalgeschwindigkeit v_y, Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ->

Wertetabelle:

t	v_x	v_y	v	x	y
0	7.0711	7.0711	10	0	4
0.1	7.0711	6.0901	9.3321	0.7071	4.6581
0.2	7.0711	5.1091	8.7237	1.4142	5.218
0.3	7.0711	4.1281	8.1879	2.1213	5.6799
0.4	7.0711	3.1471	7.7398	2.8284	6.0436
0.5	7.0711	2.1661	7.3954	3.5355	6.3093
0.6	7.0711	1.1851	7.1697	4.2426	6.4768
0.7	7.0711	0.204	7.074	4.9497	6.5463
0.72	7.0711	0	7.071	5.0968	6.5484
0.8	7.0711	-0.7769	7.1136	5.6569	6.5177
0.9	7.0711	-1.7579	7.2863	6.364	6.3909
1	7.0711	-2.7389	7.583	7.0711	6.1661
1.1	7.0711	-3.7199	7.9899	7.7782	5.8431
1.2	7.0711	-4.7009	8.4911	8.4853	5.4221
1.3	7.0711	-5.6819	9.0711	9.1924	4.9029
1.4	7.0711	-6.6629	9.7157	9.8995	4.2857
1.5	7.0711	-7.6439	10.413	10.6066	3.5704
1.6	7.0711	-8.6249	11.153	11.3137	2.7569
1.7	7.0711	-9.6059	11.9279	12.0208	1.8454
1.8	7.0711	-10.5869	12.7312	12.7279	0.8357
1.88	7.0711	-11.3717	13.3909	13.2671	0



Ein waagerechter Wurf (φ=0°) von einer Anfangshöhe y_0 führt auf das folgende Szenario:

$$v_x = v_0 \text{ (konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung)}$$

$$v_y = -gt \text{ (konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung)}$$

$$x = v_0 t \text{ (horizontale Richtung)}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (vertikale Richtung)}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0 \text{ (Wurfparabel)}$$

$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfweite), } v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}}$$

$$t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \text{ (Wurfdauer).}$$

Für einen senkrechten Wurf nach oben (φ=90°) von einer Anfangshöhe y_0 ergibt sich:

$$v_x = 0 \text{ (konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung)}$$

$$v_y = v_0 - gt \text{ (konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung)}$$

$$x = 0 \text{ (horizontale Richtung)}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \text{ (vertikale Richtung)}$$

$$t_H = \frac{v_0}{g} \text{ (Steigzeit)}$$

$$y_H = \frac{v_0^2}{2g} + y_0 \text{ (maximale Wurfhöhe)}$$

$$x_W = 0 \text{ (Wurfweite)}$$

$$t_W = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g} \text{ (Wurfdauer), } t_W = \frac{2v_0}{g} \text{ (Wurfdauer, } y_0\text{=0).}$$

Für einen senkrechten Wurf nach unten (φ=-90°) von einer Anfangshöhe y_0 ergibt sich:

$$v_x = 0 \text{ (konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung)}$$

$$v_y = -v_0 - gt \text{ (konstant wachsende Geschwindigkeit in vertikaler Richtung)}$$

$$x = 0 \text{ (horizontale Richtung)}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y_0 \text{ (vertikale Richtung)}$$

$$x_W = 0 \text{ (Wurfweite)}$$

$$t_W = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g} \text{ (Wurfdauer).}$$

Aufgaben: 1. Wie lange braucht ein Gegenstand, der vom Rottweil-Essener Aufzugstestturm (Höhe: 246 m) im freien Fall herunterfällt, wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Aufprall auf dem Erdboden?

Lösung: Es liegt ein senkrechter Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 0 m/s und Anfangshöhe y_0 = 246 m vor. Die Wurfdauer berechnet sich als: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 7,08 s, die Endgeschwindigkeit als: $v = \sqrt{2gy_0}$ = 69,47 m/s = 250,1 km/h.

2. Eine Silvesterrakete startet senkrecht mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 30 m/s vom Erdboden aus. Wie hoch fliegt die Rakete, wie lange dauert der Raketenflug?

Lösung: Es liegt bei y_0 = 0 m (Erdboden) ein senkrechter Wurf nach oben vor. Die maximale Flughöhe beträgt: $y_H = \frac{v_0^2}{2g}$ = 45,87 m, die Wurfdauer berechnet sich als: $t_W = \frac{2v_0}{g}$ = 6,12 s.

3. Vergleiche die Wurfdauern bei einem senkrechten Wurf nach oben und unten mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 10 m/s mit dem freien Fall, wenn die Anfangshöhe y_0 = 40 m beträgt.

Lösung: I. Freier Fall: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 2,86 s. II. Senkrechter Wurf nach oben, v_0 = 10 m/s: $t_W = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$ = 4,05 s. III. Senkrechter Wurf nach unten, v_0 = 10 m/s: $t_W = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$ = 2,01 s.

4. Bei einem waagerechten Wurf beträgt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 5 m/s und die Anfangshöhe y_0 = 8 m. Wann und wo erreicht der geworfene Gegenstand den Erdboden?

Lösung: Es berechnet sich mit: v_0 = 5 m/s, y_0 = 8 m die Wurfdauer: $t_W = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 1,28 s, die Wurfweite: $x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ = 6,39 m.

5. Von einem Tisch mit 80 cm Höhe wird ein Gegenstand gerollt, der 1 m vor dem Tisch landet. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit?

Lösung: Es ist y_0 = 0,8 m, x_w = 1 m, so dass hinsichtlich der Anfangsgeschwindigkeit gilt: $v_0 = x_W \cdot \sqrt{\frac{g}{2y_0}}$ = 2,48 m/s.

6. Ein Golfball wird unter einem Winkel von φ=38° vom Abschlag aus gespielt. Wie groß muss seine Anfangsgeschwindigkeit sein, damit er das 158 m entfernte Loch trifft?

Lösung: Umstellen von $x_W = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi$ führt bei φ=38° und x_W = 158 m auf: $v_0 = \sqrt{\frac{gx_W}{\sin 2\varphi}}$ = 39,97 m/s.

7. Ein Fußball wird vom Erdboden aus ins 20 m entfernte Tor geschossen, die Flugbahn erreicht die maximale Höhe 4,2 m. Berechne Abschusswinkel und Anfangsgeschwindigkeit.

Lösung: Es ist y_0 = 0 m, x_w = 20 m, y_H = 4,2 m. Es gilt laut Scheitelpunkt und Wurfweite: $y_H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi$ = 4,2, $x_W = \frac{2v_0^2}{g}\sin\varphi\cos\varphi$ = 20, woraus durch Division der beiden Gleichungen folgt: $\frac{y_H}{x_W} = \frac{1}{4}\tan\varphi = \frac{4{,}2}{20}$ => φ= 40,04°. Umstellen der Gleichung mit y_H ergibt die Geschwindigkeit: $v_0 = \frac{\sqrt{2gy_H}}{\sin\varphi}$ = 14,11 m/s.

Literaturhinweise: Dorn Physik. Oberstufe Ausgabe A, Berlin-Darmstadt-Dortmund [16]1972, S.29-39; HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., Physik, Weinheim 2003, S.69-76.