Michael Buhlmann

Spätrömische Stadtbefestigungen in Gallien

Spätantikes Gallien

Vom Wandel, der sich im Römischen Reich seit dem 3. Jahrhundert n. Chr. sowohl in gesellschaftlicher als auch politischer Hinsicht vollzog, blieben die Städte nicht unberührt; dies gilt insbesondere für den gallischen Raum. Eine Ursache war sicher die äußere Bedrohung, erkennbar u.a. an den Einfällen von Franken, Alemannen oder Sachsen nach Gallien. Dem wurde von römischer Seite durch Bau und Instandsetzung von Befestigungsanlagen begegnet. So veränderten auch die Städte, die *civitates*, ihr Aussehen: Der spätantike Mauerbau, die Verlagerung und Verkleinerung des Stadtkerns sind wesentlich für diese Entwicklung.[1]
Das Vorliegende hat auf der Basis eines mathematischen Modells eine statistische Untersuchung zu Größe und Form spätantiker gallischer Stadtbefestigungen zum Ziel. Die entscheidenden Daten werden dabei aus deren Umfang und der dadurch umschlossenen Fläche gewonnen. Denn gerade das Verhältnis dieser beiden Parameter zueinander ist ein Indikator u.a. für den Einfluss ökonomischer, geografischer und militärischer Notwendigkeiten auf Konzeption und Bau spätrömischer Festungsanlagen.[2]
Allein die wahrscheinlich ins 3. Jahrhundert[3] zu datierende Ummauerung der *civitas* Senlis hatte einen Umfang von 900m bei einer Höhe von 7m und einer Dicke von 3,3m.[4] Das verbaute Material besaß somit ein Volumen von immerhin rund 20.000m^3; auf einen Meter Umfang umgerechnet sind dies ca. 23m^3 (dabei sind Türme und Tore nicht mit einbezogen). Geht man nun weiter davon aus, dass seit der zweiten Hälfte des 3. Jahrhunderts allein in Gallien, Spanien und Italien rund 180 Städte einer Neu- oder Wiederbefestigung bedurften, so kommt man ohne Weiteres auf mindestens vier Millionen Kubikmeter Ummauerung (das ist immerhin das Anderthalbfache des Volumens der Cheopspyramide), die zum großen Teil innerhalb von nur wenigen Jahrzehnten errichtet oder ausgebessert wurden.[5] Die Bauleistung muss also enorm gewesen sein, und dies gilt auch für die Beschaffung und Bereitstellung des Baumaterials. Jeder Meter Mauer weniger bedeutete daher eine Entlastung in ökonomischer und zeitlicher Hinsicht. Es ist somit zu vermuten, dass man bemüht war, ein städ-

[1] Vgl. JONES, A.H.M., The Later Roman Empire, Oxford 1964; KOLB, F., Die Stadt im Altertum, München 1984, S. 222-260.
[2] An grundlegender Literatur für das Folgende seien genannt: BLANCHET, A., Les Enceintes Romaines de la Gaulle, Paris 1907; BRÜHL, C., Palatium und Civitas. Studien zur Profantopographie spätantiker Civitates vom 3. bis zum 13. Jahrhundert. Bd. 1: Gallien, Köln/Wien 1975; DUPONT, A., Les cités de la Narbonnaise première, Nimes 1942; GANSHOF, F., Etudes sur les développement des villes entre Rhin et Loire, Paris 1943; GRENIER, A., Manuel d'archéologie Gallo-Romaine, première partie, Paris 1931; JOHNSON, S., Late Roman Fortifications, London 1983; F. LOT, Recherches sur la population et la superficie des cités remotant a la période Gallo-Romaine, Premiére partie, Paris 1969/1970; VERCAUTEREN, F., Etude sur les civitates de la Belgique Seconde, Brüssel 1934.
[3] BRÜHL, wie Anm.2, S. 86
[4] JOHNSON, wie Anm.2, S.95.
[5] JOHNSON, wie Anm.2, S.10.

tisches Areal durch eine Mauer mit möglichst geringem Umfang zu schützen, und dass man ebenso versuchte, die Vorteile der geografischen Lage auszunutzen.
In der neueren Forschung spielten Fläche und Umfang der gallischen *civitates* schon immer eine Rolle. Es sei hier nur verwiesen auf A. BLANCHET und seine Studien über die römischen Befestigungen in Gallien oder auf C. BRÜHL und dessen Untersuchungen zu *palatium* und *civitas.*[6] Doch wurden die Parameter lediglich zur Beschreibung der Größe von ummauerten Städten bzw. Stadtkernen verwendet, während weitergehende Folgerungen bestenfalls indirekt oder intuitiv daraus gezogen wurden.[7] Dies führte u.a. zu fehlerhaften Angaben: So beträgt nach F. LOT der Umfang von Senlis nur 840m bei einer Fläche von 6.38 ha,[8] diese Daten sind aber, wie wir nachher sehen werden, mathematisch nicht miteinander zu vereinbaren. Andere ungenügende Angaben zu Umfang und Fläche ließen sich im Übrigen noch anführen.[9] Zudem muss uns klar sein, dass eine spätantike *civitas* nicht nur aus einem ummauerten Areal bestand. Vielmehr war neben dem befestigten Stadtkern eine unbefestigte Vorstadt, das *suburbium*, vorhanden.[10] Wir identifizieren allerdings der Einfachheit halber im Folgenden die Stadt mit ihrem befestigten Stadtkern.

Mathematische Grundlagen

A) Definition einer optimalen Stadt. Bei der Herleitung unseres *mathematischen Modells* gehen wir zunächst von *geometrischen Überlegungen* aus. Daher betrachten wir die Stadt in idealtypischer Weise als einen von einer Stadtbefestigung umgebenen Ort in einer Ebene. Wir können einer solchen Siedlung dann ihren Umfang (als Umfang der Befestigungsanlagen) und ihre Fläche (als die umschlossene Fläche) zuordnen; der Umfang werde dabei mit U bezeichnet, die Fläche mit F (= FU; also in Abhängigkeit von U).
Dann soll die Stadt *optimal (hinsichtlich ihrer Stadtbefestigung)* heißen, falls ihre Befestigungsanlage mit Umfang U die größtmögliche Fläche F umschließt oder falls die Stadt mit Fläche F von einer Stadtbefestigung mit möglichst geringem Umfang U umgeben ist. Diese Definition ist sicher sinnvoll nach dem, was wir im vorhergehenden Abschnitt über spätrömische Stadtbefestigungen gesagt haben. Sie impliziert mithin eine ökonomische Betrachtung von Bau und Planung.
Wir wollen nun *mathematische Kriterien* für optimale Städte aufstellen und benötigen dazu Ergebnisse aus der Geometrie.

B) Geometrische Sachverhalte. Grundlage für das Folgende sind die ebenen Vielecke und Figuren. Dabei spielen die *isoperimetrischen Figuren* eine wesentliche Rolle. Und zwar heißen Figuren (zueinander) isoperimetrisch, wenn sie den gleichen Umfang besitzen. Sie können sich dann sehr wohl durch Fläche und Aussehen voneinander unterscheiden. Was wir nun darlegen, wird auch als Theorie der isoperimetrischen Probleme bezeichnet.[11]

---

6 Siehe Anm.2.
7 BRÜHL, wie Anm.2, S.164, Anm. 33.
8 LOT, wie Anm.2, S.255.
9 Vgl. LOT, wie Anm.2, S.157, zu Avignon mit einer Fläche von ca. 20 ha und einem Umfang von 1500 bis 1550m. LOT übernimmt ältere Zahlen aus BLANCHET, wie Anm.2, und GRENIER, wie Anm.2.
10 KAISER, R., Civitas und Bischofssitz, in: JÄGER, H. (Hg.), Stadtkernforschung (= Städteforschung A/27), Köln/Wien 1987, S.257.
11 Vgl. GERICKE, H., Mathematik im Abendland, Heidelberg 1990, S.17ff; M. SIMON, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909, S.308-311.

Schritt 1. Für eine idealtypische Stadt gilt: Die Stadtbefestigung ist im mathematischen Sinne (näherungsweise, siehe Schritt 7) durch einen geschlossenen, ebenen Polygonzug darstellbar, die Stadt selbst als n-Eck mit Fläche F und Umfang U (n ist dabei eine natürliche Zahl 3,4,5,...).
Schritt 2. Wir definieren eine besondere Klasse von n-Ecken; und zwar heißt ein n-Eck *regelmäßig*, falls es gleich lange Seiten und gleich große Innenwinkel besitzt.
Schritt 3. Es lässt sich das folgende *klassische Problem* beweisen:[12] *Von allen n-Ecken mit einem fest vorgegebenen Umfang U hat das regelmäßige n-Eck den größten Flächeninhalt* F_n.
Schritt 4. Es gilt: *Von zwei regelmäßigen n-Ecken mit demselben Umfang U besitzt dasjenige mit mehr Ecken den größeren Flächeninhalt*[13].
Schritt 5. Wir betrachten alle regelmäßigen n-Ecke mit festem Umfang U. Bei wachsendem n – wir sagen auch n-> ∝ („n gegen unendlich“) – nähern sich die n-Ecke immer mehr einem Kreis mit demselben Umfang an. Dieser Kreis hat dann aber nach Schritt 4 den größtmöglichen Flächeninhalt $F_\propto$. Wir kommen daher zu dem Resultat: *Der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit Umfang U ist kleiner als der eines Kreises mit gleichem Umfang*[14].
Schritt 6. Wir erkennen: *Eine Stadt ist optimal genau dann, wenn sie kreisförmig ist.*
Schritt 7. Wir verweisen auf Schritt 1. Ist nämlich eine Stadt durch eine beliebige geschlossene Kurve mit Umfang U begrenzt, so kann man diese Kurve durch n-Ecke in beliebiger Genauigkeit annähern. Für jedes so entstandene n-Eck würde aber die Optimalitätsabschätzung aus Schritt 5 gelten, mithin also auch für die exakte Befestigungslinie. Auch in diesem Fall ist bei festem Umfang U die kreisförmige Stadt die optimale Variante.

Das Ergebnis unserer kleinen mathematischen Untersuchung kann nicht überraschen. Nicht nur hinsichtlich Umfang und Fläche ist eine runde Stadt optimal. Vielmehr ist sie auch der Siedlungstyp mit den durchschnittlich kürzesten Wegen; der längste Weg beträgt gerade das Doppelte vom Kreisradius, mithin weniger als ein Drittel des Stadtumfangs. Auch ist die Stadtfläche konvex, d.h.: die direkte Verbindung von einem zum anderen Punkt befindet sich innerhalb der Stadt, wenn nur die Punkte ebenfalls darin liegen.

C) Der isoperimetrische Koeffizient. Jetzt wollen wir ein Maß für die Optimalität angeben. Es ist dies der *isoperimetrische Koeffizient*.

Schritt 1. Gegeben sei eine beliebige ebene Figur mit Umfang U und Fläche F. Der isoperimetrische Koeffizient k errechnet sich dann definitionsgemäß als:

$$k = U^2/F .$$

Schritt 2. Aus B) folgern wir, dass k unter allen Figuren mit n Ecken und konstantem Umfang U nur beim regelmäßigen n-Eck minimal wird, also den kleinsten Wert annimmt. k wird sogar noch kleiner, wenn wir einen Kreis mit Umfang U in Betracht ziehen. Der isoperimetrische Koeffizient für einen Kreis mit Radius r ergibt sich dabei aus Kreisumfang $U=2\pi r$ und Kreisinhalt $F=\pi r^2$. Dann gilt:

[12] Mathematische Beweise sind zu finden in: GERICKE, wie Anm.11, S.19-22; L. FEJES TOTH, Regular Figures, Oxford/London/Paris/ Frankfurt a.M. 1964, S.157-159.
[13] Vgl. GERICKE, wie Anm.11, S.18.
[14] Ebd., S.19.

$$k = U^2/F = (2\pi r)^2/(\pi r^2) = 4\pi^2 r^2/(\pi r^2) = 4\pi \; .$$

k ist damit vom Kreisradius unabhängig, also für jeden Kreis gleich groß, und hat den Wert 4π (mit: $\pi = 3.1415$).

Eine Stadt ist also optimal, wenn für ihren isoperimetrischen Koeffizienten $k=4\pi$ gilt. Städte, die in diesem Sinne nicht optimal sind, erfüllen dann die Bedingung: $k>4\pi$.

Schritt 3. Da sich mit einem isoperimetrischen Koeffizienten $k\geq 4\pi$ die nachfolgenden Resultate nur schlecht überblicken lassen, führen wir noch eine Normierung durch, d.h. es soll

$$k^0 := k/(4\pi) = U^2/(4\pi F)$$

gelten. k^0 heißt *normierter isoperimetrischer Koeffizient*, kurz *NIK*.

Schritt 4. Für den normierten isoperimetrischen Koeffizienten k^0 sind folgende Aussagen richtig:

a) Für eine beliebige Stadt mit Umfang U und Fläche F gilt: $k^0 \geq 1$.

b) Eine Stadt ist optimal genau dann, wenn die Bedingung $k^0=1$ erfüllt ist.

In Tab.1 sehen wir dann die NIK der suboptimalen regelmäßigen n-Ecke und des Kreises (hierbei: $n=\infty$) aufgelistet.

Tabelle 1: Der Flächeninhalt F_n (in ha) und der normierte isoperimetrische Koeffizient k^0 bei regelmäßigen n-Ecken

Ecken zahl			Umfang (in m)			NIK k^0
n	1000	2000	3000	4000	5000	
3	4.81	19.25	43.30	76.98	120.28	1.6540
4	6.25	25.00	56.25	100.00	156.25	1.2732
5	6.88	27.53	61.94	110.11	172.05	1.1563
6	7.22	28.87	64.95	115.47	180.42	1.1027
8	7.54	30.18	67.90	120.71	188.61	1.0548
10	7.69	30.78	69.25	123.11	192.36	1.0343
12	7.78	31.10	69.98	124.40	194.38	1.0235
16	7.86	31.42	70.70	125.68	196.38	1.0131
32	7.93	31.73	71.39	126.91	198.30	1.0032
∞	7.96	31.83	71.62	127.32	198.94	1.0000
			Flächeninhalt F_n (in ha)			

Wir erkennen noch: Der NIK ist ein Maß für den Umriss einer Stadt. Geometrisch ähnliche Figuren (d.h.: Städte) haben nämlich denselben Koeffizienten. Die Umkehrung gilt leider nicht, da beispielsweise ein langgestrecktes Oval den gleichen NIK haben kann wie ein in etwa quadratisches Rechteck. Beim Grenzfall $k^0=1$ können wir aber von einer annähernden Kreisförmigkeit der Figur ausgehen. Wegen der Invarianz gegenüber ähnlichen Figuren beschränken wir uns in den Tab.2 und 3 nur auf die Angabe von (Seiten- bzw. Achsen-) Verhältnissen für den Typ der rechteckigen und ovalen Stadt.

Tabelle 2: Der Flächeninhalt F (in ha) und der normierte isoperimetrische Koeffizient k^0 bei Rechtecken mit den Seiten a und b und dem Seitenverhältnis a:b

Seiten-verhältnis	Umfang U (in m)					NIK k^0
a:b	1000	2000	3000	4000	5000	
1:1	6.25	25.00	56.25	100.00	156.25	1.2732
1.5:1	6.00	24.00	54.00	96.00	150.00	1.3263
2:1	5.56	22.22	50.00	88.89	138.89	1.4324
3:1	4.69	18.75	42.19	75.00	117.19	1.6977
4:1	4.00	16.00	36.00	64.00	100.00	1.9894
6:1	3.06	12.24	27.55	48.98	76.53	2.5995
	Flächeninhalt F (in ha)					

Tabelle 3: Der Flächeninhalt F (in ha) und der normierte isoperimetrische Koeffizient k^0 bei Ellipsen mit den Achsen a und b und dem Achsenverhältnis a:b

Achsen-verhältnis	Umfang U (in m)					NIK k^0
a:b	1000	2000	3000	4000	5000	
1:1	7.96	31.83	71.62	127.32	198.94	1.0000
1.5:1	7.49	29.95	67.39	119.80	187.18	1.0628
2:1	6.69	26.74	60.17	106.97	167.14	1.1903
3:1	5.24	20.97	47.18	83.88	131.06	1.5179
4:1	4.21	16.84	37.88	67.34	105.23	1.8906
6:1	2.95	11.79	26.52	47.15	73.67	2.7004
	Flächeninhalt F (in ha)					

Wir folgern gemäß Tab.2 noch: *Für eine rechteckige Stadt mit Umfang U und Fläche F ist die Abschätzung:* $k^0 \geq 1.2732$ *richtig*.
Das letzte Resultat gibt dann Anlass zu der Definition: Wir nennen einen Ort eine *Stadt vom Typ I*, falls $k^0 < 1.2732$ ist; andernfalls heißt er *Stadt vom Typ II*. Städte vom Typ II sind also insbesondere Städte mit rechteckigem Umriss, Orte vom Typ I u.a. annähernd kreisförmige Städte.[15]

D) Abschätzungen. Zu einem Umfang U können wir die *optimale Fläche* Fo berechnen, wenn wir beachten, dass im Optimum, also bei einem Kreis, die Beziehung: $k^0 = U^2/(4\pi F_o) = 1$ gilt. Daraus folgt nämlich sofort: $F_o = U^2/(4\pi)$. Bei nichtoptimalen Flächen muss dann der Flächeninhalt kleiner als der der optimalen Fläche sein; eine Abschätzung für solche Flächen F ist daher: $0 < F \leq F_o$. Auch erhalten wir aus den Beziehungen: $k^0=U^2/(4\pi F)$ und: $k^0 \geq 1$ die Ungleichung: $U^2 \geq 4\pi F$ für eine beliebige Figur mit Umfang U und Fläche F.
Unsere wichtigste Abschätzung, die wir aus der isoperimetrischen Theorie hergeleitet haben, ist aber die für den NIK k^0, also: $k^0 \geq 1$. Wir können sie beispielsweise wie folgt anwenden: Senlis hat nach BRÜHL[16] mit einem Umfang von 900m und einer Fläche von 6.1 ha einen NIK von $k^0 = 900^2/6.1/(4\pi) = 1.0567$, ist also ein Ort vom Typ I. Nach LOT[17] beträgt der NIK $k^0 = 840^2/6.38/(4\pi) = 0.8800$; k^0 ist damit kleiner als 1, und das ist nach unseren Abschätzungen und in der Realität selbstverständlich nicht möglich.

E) Die statistische Analyse. Bevor wir mit Resultaten der isoperimetrischen Theorie hinsich-

15 Vgl. GRENIER, wie Anm.2, S.411ff. GRENIER teilt die befestigten Städte auf in *les villes fortes de forme circulaire* und in *les villes fortes rectangulaires*.
16 Vgl. BRÜHL, S.86.
17 Vgl. Anm.7.

tlich ihrer Folgerungen für die statistische Analyse aufwarten, gehen wir kurz auf ein paar statistische Begriffe und Schlussweisen ein.[18] Ein *statistisches Merkmal* X ist eine Größe, deren *Ausprägungen* wir bei den *Merkmalswerten* x_i der *Merkmalsträger* i=1, ... n beobachten können; die Menge aller Merkmalsträger nennen wir dabei eine *Grundgesamtheit*. Wird ein Merkmal X n-mal mit kardinal skalierten Werten $x_1, \dots x_n$ beobachtet, so lassen sich zu *Häufigkeitsverteilungen* die *Lage-* und *Streuungsparameter* feststellen, und zwar als Lageparameter das *arithmetische Mittel* (*Durchschnittswert*) $\bar{x}$, als Streuungsparameter die sogenannte *mittlere quadratische Abweichung* s^2 und deren Wurzel, die *Standardabweichung* s.[19] Sind nun bzgl. einer Grundgesamtheit von Merkmalsträgern zwei Merkmale X und Y mit ihren beobachteten Ausprägungen gegeben, so interessiert man sich darüber hinaus für einen eventuellen *Zusammenhang*. Kontingenztafeln und Regressionsanalyse bieten dazu einen Ansatzpunkt.

Bei den *Kontingenztafeln* tabelliert man die Häufigkeiten von Merkmalsträgern hinsichtlich der Ausprägungen der Merkmale X und Y. Eventuelle Zusammenhänge können dann z.B. mit Hilfe des *korrigierten Pearsonschen Kontingenzkoeffizienten* c_{corr} untersucht werden. Dieser gibt an, ob zwischen den Merkmalen eine statistische Unabhängigkeit ($c_{corr} = 0$) oder Abhängigkeit ($c_{corr} = 1$) besteht.[20]

Die *Regressionsanalyse* arbeitet mit den kardinal skalierten Merkmalswerten $x_1, \dots x_n$ bzw. $y_1, \dots y_n$. Sie liefert dann u.a. mit dem *Streuungsdiagramm* (in einem x-y-Koordinatensystem) zunächst die optische Aussage der zu den Ausprägungen beider Merkmale gehörenden Punktewolke $\{(x_i,y_i) \mid i=1,\dots n\}$, mit dem *Korrelationskoeffizienten* r schließlich eine mathematische Größe zwischen -1 und 1 mit sogenannter starker Korrelation nahe bei +1 oder -1 und schwacher Korrelation bei ungefähr 0. Schließlich ist die *Regressionsgerade* y = g(x) mit g als linearer Funktion diejenige Ausgleichsgerade, die dem Streuungsdiagramm am besten angepasst ist.[21]

Wir betrachten wieder unser mathematisches Modell. Jetzt können wir dank B) bis D) für die Regressionsanalyse noch folgern:

Schritt 1. Wir wissen: *Im Falle der Optimalität gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen Umfang und Fläche, nämlich die Funktion:* $F = U^2/(4\pi)$ *.* Optimalität bedeutet, dass zu einem Umfang U sich nach D) die optimale Fläche als $F = U^2/(4\pi)$ errechnen lässt. Die dadurch definierte Funktion F = F(U) ist dann eine *Parabel* im U-F-Koordinatensystem.

Schritt 2. Für unsere statistische Untersuchung mit Hilfe der *linearen* Regression benötigen wir auch lineare Abhängigkeiten zwischen den Größen. Nun ist es aber für uns gleichgültig, ob wir die Merkmale U und F untersuchen oder die Größen U^2 und F. Nur haben wir beim letzteren Merkmalspaar den Vorteil einer linearen Beziehung $F = F^*(U^2)$, denn mit $x=U^2$ und y=F gilt sofort die Funktionsvorschrift: $y = x/(4\pi)$, und dies ist eine Gerade, die *optimale Gerade* im U^2-F-/x-y-Koordinatensystem.

Schritt 3. Mit den Merkmalen U^2 und F bilden deren Ausprägungen U_i^2 und F_i eine Punktewolke im U^2-F-(x-y-)Koordinatensystem; jedem Paar (U_i^2,F_i) entspricht dabei ein Punkt. Nun gilt: *Jedes Paar* (U_i^2,F_i) *(i=1, ... n) liegt im 1. Quadranten des* U^2*-F-Koordinatensystems un-*

[18] Nachzulesen ist dies u.a. bei: JARAUSCH, K.H., ARMINGER, G., THALLER, M., Quantitative Methoden in der Geschichtswissenschaft, Darmstadt 1985; OHLER, N., Quantitative Methoden für Historiker, München 1980. Wir verwenden im folgenden: HARTUNG, J., Statistik, München/Wien [3]1985.

[19] HARTUNG, wie Anm.15, S.15-19, S.31f, S.43-47.

[20] Ebd., S.407-464, insbesondere S.451.

[21] Ebd., S.569-608, besonders S.573-584.

terhalb der optimalen Gerade $F = U^2/(4\pi)$. Dies ergibt sich unmittelbar aus Schritt 1, wenn man bedenkt, dass für jeden Punkt (U_i^2,F_i) mit optimaler Fläche F_{oi}, $1\leq i\leq n$, die Beziehung: $F_{oi}\geq F_i>0$ erfüllt ist.

Schritt 4. Alle Punkte der Punktewolke befinden sich also unterhalb der optimalen Geraden. Darüber hinaus bestimmt die Form der Punktewolke eine etwaige Korrelation der beiden Merkmale und die Existenz einer „vernünftigen“ Ausgleichsgeraden. Wir können natürlich nicht erwarten, dass diese Regressionsgerade identisch mit der optimalen Geraden ist, denn dann wären alle zu untersuchenden Städte bzgl. Umfang und Fläche optimal. Wir können aber aus der Lage der Ausgleichsgeraden und ihrer „räumlichen Nähe“ zur optimalen Geraden unsere Schlüsse ziehen.

Auswertung

A) Das Datenmaterial. Es standen die Zahlen zu Umfang und Fläche von 50 spätrömischen Stadtbefestigungen in dreizehn gallischen Provinzen zur Verfügung. Dabei wurden die Stadtbefestigungen aufgenommen, die in der Spätantike in Benutzung waren, egal, ob die Befestigungen nun aus dem 3. bis 5. Jahrhundert stammen oder aus der Zeit davor (wie bei Trier oder Köln). Tab.4 zeigt nun die relevanten *civitates* und Provinzen in der Reihenfolge der *Notitia Galliarum.*[22]

Tabelle 4: Die untersuchten *civitates* mit Umfang U, Fläche F und normiertem isoperimetrischen Koeffizienten k0

Civitas	Umfang (in m)	Fläche (in ha)	NIK k^0	Beleg
Lugdunensis I:				
1 Lyon	2350	21.50	2.0440	BRÜHL, S.209
2 Autun	1300	10.00	1.3449	BRÜHL, S.116
3 Chalon-sur-Saone	1500	15.00	1.1937	BRÜHL, S.133
4 Dijon	1200	11.00	1.0417	JOHNSON, S.84f[23]
Lugdunensis II:				
1 Rouen	1680	17.00	1.3212	GRENIER, S.421f
2 Bayeaux	1200	9.00	1.2732	JOHNSON, S.87
3 Evreux	1250	9.50	1.3088	GRENIER, S.424
4 Lisieux	1200	8.00	1.4324	JOHNSON, S.88
Lugdunensis III:				
1 Tours	1260	9.00	1.4038	BRÜHL, S.105[24]
2 Le Mans	1400	10.00	1.5597	GRENIER, S.422ff
3 Rennes	1200	10.00	1.1459	GRENIER, S.420
4 Angers	1200	8.00	1.4324	BRÜHL, S.155
5 Nantes	1600	17.00	1.1983	GRENIER, S.422
6 Jublains	480	1.40	1.3096	GRENIER, S.454ff
Lugdunensis IV:				
1 Sens	2680	43.00	1.3292	BRÜHL, S.141
2 Auxerre	1080	6.00	1.5470	BRÜHL, S.125
3 Troyes	1350	11.60	1.2503	BRÜHL, S.148

[22] Zur *Notitia Galliarum* vgl. SEECK, O. (Hg.), Notitia dignitatum, 1876, Nachdruck Frankfurt a.M. 1983, S.261-274. In der Referenz-Spalte der Tab.4 werden folgende Abkürzungen verwendet: BRÜHL: wie Anm. 2; CÜPPERS: H. CÜPPERS (Hg.), Die Römer in Rheinland-Pfalz, Stuttgart 1990; GRENIER: wie Anm. 2; HORN: H.G. HORN (Hg.), Die Römer in Nordrhein-Westfalen, Stuttgart 1987; JOHNSON: wie Anm. 2: LOT: wie Anm. 2; VERC.: VERCAUTEREN, wie Anm. 2.

[23] Dijon ist zwar nicht in der *Notitia Galliarum* verzeichnet, doch der *civitas* Laon zugeordnet; vgl. auch Gregor von Tours *Hist. Franc.* III,19.

[24] BRÜHL, wie Anm.2, S.105 gibt 1200m an.

4 Orleans	2150	27.00	1.3624	Brühl, S.46
5 Paris	1750	13.00	1.8747	Brühl, S.13
Belgica I:				
1 Trier	6418	285.00	1.1501	Cüppers, S.614
2 Metz	3500	70.00	1.3926	Grenier, S.196
Belgica II:				
1 Reims	2950	60.50	1.1447	Brühl, S.59
2 Soissons	1450	12.00	1.3943	Brühl, S.37
3 Chalon-sur-Marne	1000	6.00	1.3263	Vercauteren, S.354f[25]
4 Arras	1220	9.10	1.3016	Brühl, S.95
5 Senlis	900	6.10	1.0567	Brühl, S.86
6 Beauvais	1270	10.00	1.2835	Vercauteren, S.266
7 Amiens	1150	7.00	1.5035	Vercauteren, S.293[26]
8 Laon	1300	9.00	1.4943	Brühl, S.78
Germania I:				
1 Mainz	4200	120.00	1.1698	Grenier, S.420
2 Straßburg	1800	19.00	1.3570	Grenier, S.406
3 Speyer	1600	15.00	1.3581	Cüppers, S.566
Germania II:				
1 Köln	3912	96,8	1.2580	Horn, S.462
Viennensis:				
1 Vienne	1950	20.00	1.5130	Brühl, S.229
2 Grenoble	1130	9.00	1.1290	Lot, S.59
3 Die	1940	23.00	1.3022	Johnson, S.104f
4 Cavaillon	1450	12.00	1.3943	Lot, S.142[27]
5 Arles	1675	17.50	1.2758	Brühl, S.240
6 Genf	1150	5.00	2.1048	Lot, S.34
Aquitanica I:				
1 Bourges	1900	22.00	1.3058	Brühl, S.164
2 Limoges	1000	7.00	1.1368	Brühl, S.184
Aquitanica II:				
1 Bordeaux	2000	23.40	1.3603	Johnson, S.106f
2 Poitiers	2650	47.00	1.1890	Brühl, S.174
Narbonensis I:				
1 Narbonne	1525	14.00	1.3219	Lot, S.311
2 Toulose	3950	90.00	1.3796	Brühl, S.192
3 Nimes	2200	32.00	1.2036	Lot, S.372
4 Lodève	750	4.00	1.1191	Lot, S.384
5 Carcassonne	995	6.50	1.2121	Lot, S.399[28]
Narbonensis II:				
1 Antibes	590	2.00	1.3851	Lot, S.504
2 Toulon	950	6.00	1.1970	Lot, S.199

Wie aus der Tabelle ersichtlich wird, umfasst das Untersuchungsgebiet u.a. die germanischen und belgischen Provinzen sowie die Provinzen Zentral- und Südgalliens; lediglich das südwestliche Novempopulona und die Alpen wurden auf Grund des schlechten Datenmaterials ausgespart. In den behandelten Provinzen schwankt der Anteil der untersuchten *civitates* an der Gesamtzahl zwischen 25 und 75 Prozent; der Gesamtanteil beträgt – ausgehend von 120 spätantiken gallischen *civitates* – rund 42 Prozent.
Bearbeitet und untersucht wurde das Datenmaterial schließlich mit Hilfe eines Datenbank-

[25] Vercauteren, wie Anm.2, gibt 6-7ha Fläche bei 900-1000m Umfang an.
[26] Die Fläche entspricht mehr 7ha statt der bei Vercauteren, wie Anm.2, S.293 angegebenen 8ha. Vgl. Johnson, wie Anm.2, S.267.
[27] Lot, wie Anm.2, S.142 schätzt den Umfang zwischen 1400 und 1500m.
[28] Die Fläche beträgt richtiger 6.5ha statt der 7.1ha bei Lot, wie Anm.2, S.399.

systems, das auch einfache, aber hierfür völlig ausreichende statistische Berechnungen erlaubt.

B) Die Städte vom Typ I und II. Im vorhergehenden Abschnitt, C) hatten wir anhand des NIK die annähernd kreisförmigen Städte vom Typ I (*Gruppe I*, *Städtetyp I*) und die u.a. rechteckigen vom Typ II *(Gruppe II*, *Städtetyp II*) definieren können. Tab.4 gibt uns jetzt die Möglichkeit, Näheres darüber herauszufinden.
Betrachten wir zunächst einige Städte im Einzelnen. Von den 50 *civitates* gehören immerhin 17, das ist ein gutes Drittel, zur Gruppe vom Typ I. Die fast kreisförmige *civitas* Dijon (Lugdunensis I) hat dabei den geringsten NIK. Weiter gehören dazu kleinere Städte wie Senlis (Belgica II) oder Grenoble (Viennensis), aber auch Großstädte wie Trier (Belgica I), Mainz (Germania I) oder Köln (Germania II). Die Gruppe II zeichnet sich insbesondere durch Städte mittleren Flächeninhalts aus. Hier sind auch die rechteckigen Stadtbefestigungen vertreten, wie beim fast quadratischen Bayeaux (Lugdunensis II), bei Bourges (Aquitanica I), Evreux (Aquitanica II), Straßburg (Germania I) oder Soissons (Belgica II). Hohe NIK haben Paris (Lugdunensis IV) und Lyon (Lugdunensis I). Geographische Faktoren scheinen dabei eine wesentliche Rolle zu spielen: die Cité von Paris befindet sich auf der langgestreckten Seine-Insel; Lyon nimmt eine Hügellage ein, oberhalb der Saone kurz vor deren Mündung in die Rhone.
Die statistische Analyse hinsichtlich der Merkmale Umfang und Fläche erbringt zunächst die Zahlen in Tab.5.

Tabelle 5: Mittelwert und Standardabweichung von Umfang U, Fläche F und normiertem isoperimetrischen Koeffizienten k^0

	Anzahl	Umfang (in m) $\bar{U}$	s_U	Fläche (in ha) $\bar{F}$	s_F	NIK k^0 $\bar{k}^0$	s_{k^0}
Typ I	17	2053	1497	43.79	68.78	1.1645	0.0574
Typ II	33	1618	702	17.53	18.00	1.4333	0.1987
Gesamt	50	1766	1063	26.46	44.46	1.3419	0.2083

($\bar{U}$,$\bar{F}$,$\bar{k}^0$: Mittelwerte; s_U,s_F,s_{k^0}: Standardabweichungen)

Bei der gesamten Stichprobe liegt der durchschnittliche Umfang bei 1766m, die durchschnittliche Fläche bei 26.46ha.[29] Der Mittelwert aller NIK ist 1.3419; dies entspricht dem Koeffizienten einer rechteckigen Stadt mit einem Seitenverhältnis von etwa 1.6:1. Die Standardabweichung als Maß für die Streuung ist dabei gering; die Werte liegen also relativ dicht beieinander, sieht man einmal von Ausreißern (wie den NIK von Paris oder Genf) ab. Mittelwert und Streuung des NIK lassen daher vermuten, dass im Allgemeinen der Mauerring den römischen Stadtkern sicher nicht in einer extremen Art und Weise umschloss. Die (klassierte) Häufigkeitsverteilung bzgl. des NIK ist nachfolgend zu finden.

[29] Diese Durchschnittszahlen sind mit Vorsicht zu betrachten; sie können nur einen sehr groben und teilweise falschen Überblick über das Datenmaterial geben. So gibt es keine „Durchschnittsstadt“; deren NIK wäre nämlich kleiner als 1.

Tabelle 6: Häufigkeitsverteilung des NIK

NIK	Anzahl der Städte Typ I	Anzahl der Städte Typ II
1.0000-1.1366	3	0
1.1366-1.2732	14	0
1.2732-1.4098	0	23
1.4098-1.5464	0	5
1.5464-1.6830	0	2
1.6830-1.8196	0	0
1.8196-1.9562	0	1
1.9562-2.0928	0	1
2.0928-2.2294	0	1

Analysieren wir die Städtegruppen I und II im Einzelnen auf Grund ihrer Lage- und Streuungsparameter, so liegen (definitionsgemäß) in der Gruppe I Städte mit einem relativ einheitlichen (sprich: kreisförmigen) Aussehen vor, was für die Gruppe II augenscheinlich nicht gilt; die unterschiedlichen Standardabweichungen für den NIK sind hierfür ein Indiz. Hingegen zeigt die geringere Streuung des Städtetyps II bei den Merkmalen Umfang und Fläche auf eine Gruppe von Städten, die hinsichtlich ihrer Größe nicht so stark variieren. Wir hatten ja schon den hohen Anteil von *civitates* mittlerer Größe in der Gruppe II erwähnt; auch der niedrige Mittelwert bzgl. der Fläche entspricht dem. Gruppe I enthält dagegen sowohl kleine als auch sehr große Städte; das schlägt sich in der großen Streuung bzgl. Umfang und Fläche und in den diesbezüglichen Mittelwerten nieder. Tab.7 verdeutlicht den Sachverhalt ebenfalls.

Tabelle 7: Flächeninhalt und Städtetypen

Flächeninhalt (in ha)	Anzahl der Städte Typ I	Anzahl der Städte Typ II
0- 5	1	2
5- 10	4	11
10- 15	3	7
15- 20	2	4
20- 30	1	6
30- 50	1	1
50-100	2	2
ab 100	2	0

C) Geografische Verteilung. Wir betrachten jetzt die beiden Städtegruppen vom Typ I und II hinsichtlich ihrer geografischen Verteilung im Raum Gallien. Dazu stellen wir die folgende Kontingenztafel 8 auf:

Tabelle 8: Kontingenztafel der Städtetypen nach Provinzen

Provinzen	Anzahl der Städte Typ I	Anzahl der Städte Typ II	Summe	Anzahl der Städte Typ I	Anzahl der Städte Typ II	Geogr. Gebiet
Lugdunensis I	2	2	4			
Lugdunensis II	0	4	4 /19	5	14	Mittel-
Lugdunensis III	2	4	6			gallien
Lugdunensis IV	1	4	5			
Belgica I	1	1	2			
Belgica II	2	6	8 /14	5	9	Nord-
Germania I	1	2	3			osten
Germania II	1	0	1			
Viennensis	1	5	6			
Aquitanica I	1	1	2			

Aquitanica II	1	1	2 /17	7	10	Süd-
Narbonensis I	3	2	5			gallien
Narbonensis II	1	1	2			
Gesamt	17	33	50 /50	17	33	

Um statistische Aussagen treffen zu können, haben wir die dreizehn Provinzen zu den drei Gebieten Nordost-, Mittel- und Südgallien zusammengefasst.[30] Der *korrigierte Pearsonsche Kontingenzkoeffizient* errechnet sich dann als:

$$c_{corr} = 0.1889 .$$

Er ist also relativ gering. Wir vermuten deshalb, dass die Merkmale Geografie und Städtetyp unabhängig voneinander sind. Und das bedeutet: Beide Gruppen von *civitates* treten im gallischen Raum ohne erkennbare geografische Unterschiede auf.

D) Regressionsanalyse. Auch die Korrelationsrechnung gibt weitere Aufschlüsse. Wir haben dazu gemäß unserer Vorüberlegungen die Merkmale Umfang zum Quadrat und Fläche von allen *civitates* aus Tab.4 zu untersuchen. Zunächst lässt sich der *Korrelationskoeffizient* r berechnen als:

$$r = 0.9962 .$$

Dies ist eine sehr hohe, positive Korrelation, die wegen der Abhängigkeiten zwischen Umfang und Fläche auch kaum verwundern mag. Die durch die Regression erzielte Anpassung der Ausgleichsgeraden an die Punktewolke ist damit ebenfalls hoch. Es ergibt sich als *Regressionsgerade* die Gleichung im U^2-F-Koordinatensystem:

$$F = -2.2071 + 6.7469 \cdot U^2 ,$$

wobei U^2 in Millionen m^2 (=km^2) und F in ha gemessen wird. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der *optimalen Gerade*:

$$Fo = 7.9577 \cdot U^2 ,$$

so sehen wir zwar Unterschiede, doch sind auch Gemeinsamkeiten vorhanden. Wie wir erkennen, verlaufen beide Geraden von links unten nach rechts oben, Regressionsgerade und Punktewolke gemäß unserer Theorie immer unterhalb der optimalen Geraden liegend. Alles in allem ist aber eine räumliche Nähe der Ausgleichsgeraden hin zum Optimum gegeben. Wir können jetzt die Gleichung der Regressionsgeraden dazu verwenden, einer „typischen“ römischen Stadt mit Umfang U ihren Flächeninhalt zuzuordnen. So ist:

Tabelle 9: Funktionswerte und Prognoseintervalle der Regressionsgeraden

Umfang (m)	Fläche (ha)	Prognoseintervall der Fläche (ha)	NIK-Intervall
1000	4.53	[0; 7.96]	[1; ∝)
2000	24.78	[18.11; 31.45]	[1.0121; 1.7576]
3000	58.52	[51.80; 65.22]	[1.0981; 1.3826]
4000	105.74	[98.86; 112.62]	[1.1305; 1.2879]
5000	166.47	[159.17; 173.76]	[1.1449; 1.2499]
6000	240.68	[232.62; 248.74]	[1.1517; 1.2315]

Eine gallische Stadt mit einem Umfang von 1000m müsste also eine (durchschnittliche) Flä-

[30] Statistische Schlüsse sind hier nur dann zulässig, wenn die zugrundeliegende Verteilung hinreichend genau approximiert wird. Dies ist aber der Fall, wenn alle in der Kontingenztafel auftretenden Häufigkeiten $\geq$ 5 sind. Eine „geeignete“ Zusammenfassung der Häufigkeiten ist damit unabdingbar.

che von 4.53ha besitzen, eine mit 4000m Umfang den Flächeninhalt 105.74ha. Der Umfang von Trier beträgt 6418m bei einer Fläche von 285ha; die Regressionsgerade hat bei solch einem Umfang den Wert 275.70ha und liegt damit nur rund 9ha unter dem exakten Wert, wodurch ein relativer Fehler in Höhe von 3.3% entsteht. Tab.9 beinhaltet also Werte, die in der Praxis gute Entsprechungen haben.

In derselben Tabelle finden sich noch zwei Spalten: die eine enthält die mit der Ausgleichsgeraden verbundenen Prognoseintervalle, die andere die daraus resultierenden Intervalle für den NIK. In den zu einem vorgegebenen Umfang gehörenden Prognoseintervallen liegen hier mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die statistischen Ausprägungen des Merkmals Fläche. Die unteren und oberen Grenzen dieser Intervalle weichen dabei um rund 6 bis 8 ha vom Wert der Regressionsgeraden ab. Wir haben damit recht kleine Prognoseintervalle, eine Folge u.a. der hohen Korrelation.[31] Die Intervalle des NIK erhalten wir dann dank der Beziehungen:

$$k_1^0 = U^2/(4\pi F_2)\ ,\ \ k_2^0 = U^2/(4\pi F_1)$$

aus den Prognoseintervallen, wobei k_1^0, k_2^0 die untere und obere Grenze des Intervalls für den NIK, F_1 und F_2 die Grenzen des Prognoseintervalls bezeichnen. Wir sind also in der Lage, für den NIK statistisch untermauerte Abschätzungen anzugeben. Diese weisen ebenso wie Mittelwert und geringe Streuung darauf hin, dass der NIK innerhalb gewisser Bandbreiten verläuft, so dass Extreme im Großen und Ganzen auszuschließen sind.

E) Prinzipatszeitliche und spätantike Stadtbefestigungen. Ein Drittel der eben untersuchten *civitates* gehören dem Typ I an, sind also vom NIK her „besser“ als die Städte mit rechteckiger Stadtummauerung. Wir können dies, wie wir nachher sehen werden, als Resultat einer zeitlichen Entwicklung ansehen und betrachten dazu in Tab.10 einige schon während der Prinzipatszeit befestigte Städte.[32]

Tabelle 10: Form und Größe prinzipatszeitlicher und spätantiker Städte

Civitas	Prinzipat			Spätantike		
	Umfang (in m)	Fläche (in ha)	NIK k^0	Umfang (in m)	Fläche (in ha)	NIK k^0
Lyon	5000	140.00	1.3263	2350	21.50	2.0440
Autun	6000	200.00	1.4324	1300	10.00	1.3449
Senlis	2860	49.00	1.3284	900	6.10	1.0567
Avenches	5500	150.00	1.6048	1200	8.70	1.2440
Vienne	7000	200.00	1.9496	1950	20.00	1.5130
Nimes	6000	220.00	1.3021	2200	32.00	1.2036

Auf die Verkleinerung der Stadtbefestigungen seit dem 3. Jahrhundert haben wir schon hingewiesen; alle Städte weisen eine Verringerung von Umfang und Fläche auf. Darüber hinaus belegen auch die im Allgemeinen niedrigeren Werte des normierten isoperimetrischen Koeffizienten der Spätantike die Tendenz hin zu Städten vom Typ I mit ihren (in unserem Sinne) verbesserten Befestigungsanlagen. Tab.10 gibt damit einen (wenn auch nicht repräsentativen) Eindruck von den Veränderungen.

[31] Vgl. HARTUNG, wie Anm.15, S.582ff.

[32] Die Daten stammen hauptsächlich aus GRENIER, wie Anm.2, S.356; zu Avenches vgl. GRENIER, S.355, zu Senlis BRÜHL, wie Anm.2, S.86. Es kann hier nur eine kleine Auswahl von Städten getroffen werden, da von relativ wenigen *civitates* Stadtmauern aus dem 1. und 2. Jh. überliefert sind; viele Städte waren ja auch in dieser Zeit unbefestigt.

Folgerungen

GRENIER schrieb in seinem *Manuel d'Archélogie Gallo-Romaine*: „La ville fortifée tend vers la forme circulaire, ovale, ou demiciculaire."[33] Er unterschied (annähernd) runde und rechteckige Städte voneinander, und das ist ein Prinzip, das sich auch bei unserer Unterteilung in die Städtegruppen I und II als fruchtbar erwies.[34] Allerdings ist zu bemerken, dass die hier definierten Typen nur grob mit denen von GRENIER übereinstimmen. Aber immerhin liegen in der Gruppe I hauptsächlich die runden und ovalen, in der Gruppe II die rechteckigen Städte. GRENIER vermutete also laut obigem Zitat eine *Entwicklung* hin zu kreisförmigen und runden Stadtbefestigungen. Und auch dies können wir dank unserer statistischen Analyse untermauern. Ein Drittel der betrachteten *civitates* ist ja vom Typ I, und auch die Städte der anderen Gruppe weichen im Allgemeinen nicht sehr extrem von der „typischen" römischen Stadt im spätantiken Gallien ab. Das beweist schon der normierte isoperimetrische Koeffizient, auch in seinem zeitlichen Wandel.

Maßgeblich für den Aufbau der römischen Stadt war seit der Zeit der römischen Republik das Straßenraster des orthogonalen Stadtschemas (hippodamisches System). Es spiegelt sich z.B. in vielen spätrepublikanisch-norditalischen Städten wider, die mit ihrem planmäßig angelegten und an das römische Militärlager erinnernden Gründungsrechteck spezifisch römisch waren. So einfach wie in Oberitalien liegen die Verhältnisse im gallischen Raum allerdings nicht. Neben den bewusst durchgeführten Gründungen erkennen wir auch „natürlich gewachsene" Städte, die nur teilweise oder gar nicht dem „typisch" römischen Stadtbild entsprachen (wir können dahinter u.a. unsere Städte vom Typ II und I vermuten).[35]

Das hat Konsequenzen für die Stadtbefestigungen. Dem 1. Jahrhundert gehören die ausgedehnten Stadtmauern besonders im südgallischen Raum an (Vienne, Nimes, Autun, aber auch Köln)[36]. Sie dienten mitunter, wie die Befestigungsanlage von Avenches, zur reinen Rangerhöhung der *civitas* und besaßen daher kaum militärisches Gewicht.[37] Aber ein Großteil der gallischen Städte war zu dieser Zeit noch unbefestigt und ist erst seit dem 2., vornehmlich im 3. Jahrhundert ummauert worden. Lorenz beschreibt den Verlauf dieser Stadtmauern als unregelmäßig, meistens oval.[38] Stadtmauer und ein eventuell vorhandenes orthogonales Straßensystem bildeten daher meist auch keine Einheit, obwohl es hiervon natürlich Ausnahmen gab (Bordeaux, Orleans).[39] Im 3. Jahrhundert trat nun der Wandel ein, der sich vornehmlich in der Verkleinerung und Verlagerung des nunmehr zu Verteidigungszwecken befestigten Stadtkerns niederschlug, aber auch in der Entstehung von ovalen Befestigungsanlagen.

Diese Tendenz anhand unseres mathematischen Modells und der statistischen Analyse zu konstatieren, ist eine Sache. Die andere ist es, den Gründen dafür nachzugehen. Wenn überhaupt eine *Planung* dahinter stand, dann konnte diese doch nur durch die kaiserliche Regierung initiiert worden sein: So hat Johnson beispielsweise „Städteprovinzen" mit gleichartigen Befestigungsanlagen nachweisen können und dieses Phänomen mit Recht dem

33 Vgl. GRENIER, wie Anm.2, S.411.
34 S.o. Anm.15.
35 LORENZ, T., Römische Städte, Darmstadt 1987, S.130,135.
36 Vgl. GRENIER, wie Anm.2, S.356f.
37 Vgl. LORENZ, wie Anm.34, S.152ff.
38 Ebd., S.136.
39 Ebd., S.175f.

Eingreifen von Kaiser, Diözesen- und Provinzverwaltung zugeschrieben.[40] Einer zentralen Planung entspricht es aber auch, dass die Städte vom Typ I und II im Großen und Ganzen gleichmäßig über Gallien verstreut sind, ohne dass wesentliche geographische Unterschiede erkennbar wären. Denn nur eine übergeordnete Institution kann die weite geographische Streuung der im 3. Jahrhundert aufkommenden runden und ovalen *civitates* erklären.[41]
Vorzugsweise *ökonomische und militärische Gründe* können nun für den Wandel bei den Stadtbefestigungen verantwortlich gemacht werden. Wir erwähnten schon die riesigen Mengen an verbautem Material; wir wiesen den hohen Anteil an runden und ovalen Städten nach.[42] Auch die Verkleinerung des befestigten Stadtkerns gehört hierher. Der *archäologische Befund* erbringt aber noch mehr, gerade in ökonomischer Hinsicht. Die Einbeziehung alter Mauerzüge in die neue Ummauerung (Autun), die Verwendung des Amphitheaters als Teil der Befestigung (Tours, Périgeaux), die Wiederverwendung von Steinen – dies alles ist nachweisbar.[43] Auch die Konstruktion der Mauer entsprach ökonomischen Gegebenheiten, wurde doch im Gegensatz zur Prinzipatszeit beim spätantiken Mauerbau auf die hinter den Befestigungen liegenden Erdwälle verzichtet. Die Mauern waren nun freistehend und hatten dafür eine wesentlich größere Dicke. Die verfügbare Fläche im Innern der Befestigung stieg an, zumal sich jetzt auch Gebäude gegen die Mauer lehnen konnten, ein Indiz für die dichte Bebauung der Stadtkerne.[44] Schließlich konnten kleinere Städte von weniger Soldaten verteidigt werden.
Die archäologischen Quellen stützen also die ökonomische Bauweise von Stadtbefestigungen. Dies bedeutet aber noch lange nicht, dass jetzt nur rund gebaut wurde. Dem können nämlich wiederum wirtschaftliche Gründe entgegenstehen, z.B. wenn alte Stadtmauern beim spätantiken Bau mit einbezogen wurden. Eine runde Ummauerung ist daher nur ein hinreichendes Kriterium für den Einfluss wirtschaftlicher Faktoren. Sie könnte aber vorzugsweise bei Neubefestigungen entstanden sein.
Auch Aussagen antiker Autoren lassen sich zu diesem Problemkreis finden. Die von Vergil (Aeneis I 12) oder Varro (*De lingua Latina* V 143) postulierten *kreisförmigen Städte* können wir mehr dem mythischen Bereich zuordnen. Dasselbe gilt auch für ein kreisförmig gegründetes Rom nach Plutarch (Romulus 11).[45] Anders sieht es bei Vitruv aus, der militärische Gründe dafür angibt, Städte nicht viereckig, sondern mit Biegungen anzulegen (I,V,2), und der entsprechend die runden Türme gegenüber den eckigen bevorzugt (I,V,4).
Entscheidend scheint mir allerdings auch die *Kenntnis des isoperimetrischen Problems* zu sein.[46] Das Prinzip tritt uns dabei unmittelbar in seinen Anwendungen entgegen, die in der griechisch-römischen Antike meistens mit geografischen Gegebenheiten sowie mit Landvermessung und Stadtplanung im weitesten Sinne zu tun hatten. Thukydides (VI,1) maß die Größe Siziliens anhand der Zeit, die ein Lastschiff zur Umfahrung der Insel benötigte; Plinius (Hist. nat. VI,208) verglich die Flächen zweier Gebietsstreifen, indem er deren Längen und Breiten aufaddierte.[47] Beides zeugt jedoch von nur wenig Verständnis, denn es werden hierbei Fläche und Umfang als zueinander proportional gesehen.

---

[40] Vgl. JOHNSON, wie Anm.2, S.114f; LORENZ, wie Anm.34, S.175.
[41] S.o. Auswertung, C).
[42] S.o. Auswertung, B).
[43] Vgl. JOHNSON, wie Anm.2, S.33.
[44] Ebd., S.37.
[45] Vgl. LORENZ, wie Anm.34, S.14-16, S.33f.
[46] S.o. Mathematische Grundlagen, B).
[47] Vgl. CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd.1, Leipzig ^{2}1894, S.161f; T. HEATH, A History of Greek Mathematics, Vol.II, Oxford 1920, Ndr. 1960, S.207.

Dagegen erfasste Quintilian in seinen *Institutiones oratoriae* (I,10) schon das Wesentliche der Isoperimetrie, wenn er in Anspielung u.a. auf Thukydides (den er nicht namentlich nennt) auf die verschiedene Größe einer kreisförmigen und einer quadratischen Insel bei gleichem Umfang hinweist und weiter aussagt, dass der Kreis den meisten Raum einschließt, dass ein Quadrat sich durch eine größere Fläche auszeichnet als ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Umfang und dass von allen umfangsgleichen Dreiecken das gleichseitige die größte Fläche besitzt. Er überträgt dann diese Erkenntnisse auf die römische Feldvermessung: rechteckige Felder mit identischem Umfang können sehr wohl verschieden groß sein.[48]

Über die Agrimensoren gelangen wir nun zwanglos zur römischen Stadtplanung, die – zumindest was die Militärlager anbetrifft – vergleichbar mit der Vorgehensweise bei der Äckeraufteilung ist.[49] Und wirklich finden wir bei Polybios einige recht interessante Feststellungen. So schildert er in seiner Beschreibung des idealen römischen Lagers, dass dieses ein gleichseitiges Viereck (Rechteck!) sein müsse und dass ein solcher Aufbau mit seinem Straßensystem einer Stadt ähnle (VI,31).[50] Später vergleicht der Historiker zwei berühmte griechische Städte miteinander; er zeigt auf, dass Sparta trotz seines geringeren Umfangs doppelt so groß wie Megalopolis ist, und erklärt, dass die Größe von Städten und Lagern nicht auf Grund ihres Umfangs beurteilt werden kann (IX,21). Polybios verweist dabei sogar auf den Geometrieunterricht in der Schule.

Der Zusammenhang zwischen Isoperimetrie einerseits sowie Umfang und Fläche einer Stadt andererseits wird damit deutlich. Wir sehen auch den theoretischen Unterbau, den das isoperimetrische Prinzip spätestens seit dem 2. Jahrhundert v.Chr., also seit dem griechischen Mathematiker *Zenodoros*, erfahren hat. Zenodoros ist uns nur aus einigen spätantiken Überlieferungen bekannt[51]. Dort sind auch die (von uns erwähnten[52]) Sätze des Mathematikers über umfangsgleiche Figuren enthalten und geometrisch bewiesen. Das isoperimetrische Problem stellt sich daher als von Zenodoros gelöst dar.[53]

Die Spätantike hatte offenbar Interesse an den Ergebnissen des Mathematikers. Eine Passage bei Proklos Diadochos (410-485) bringt Zenodoros mit dem so genannten hohlwinkligen Dreieck (der Form nach eine Lanzenspitze) in Verbindung; aber auch das isoperimetrische Problem (bei Länderverteilungen) wird an anderer Stelle angesprochen. Theon von Alexandrien (4.Jh., 2.H.) überliefert Zenodoros wahrscheinlich wörtlich in seinem Kommentar zum Almagest; Pappos von Alexandrien (4.Jh., 1.H.) beschäftigt sich mit der Isoperimetrie im 5. Buch seiner Sammlung[54]. Diese neuerliche theoretische Durchleuchtung des geometrischen Problems fällt nun in die Zeit des spätantiken Mauerbaus mit seinen ökonomischen, militärischen (mithin isoperimetrischen) Implikationen. Man mag dies als einen Zufall werten. Doch geht immerhin Pappos in seiner Einleitung zum 5. Buch (Coll. V) bei der Betrachtung der Bienenwaben davon aus, dass die dabei auftretenden regelmäßigen Sechsecke zu einen möglichst geringen Materialverbrauch führen. Den Beweis dafür liefert Pappos dann gemäß der Methode des Zenodoros.[55]

---

[48] Vgl. CANTOR, wie Anm.48, S.510f.
[49] Vgl. LORENZ, wie Anm.36, S.45.
[50] Vgl. Ennius mit seinem *Romae quadratae* (A 157).
[51] Zur Lebenszeit von Zenodoros vgl. GERICKE, wie Anm.11, S.348; SIMON, wie Anm.11, S.309f. Zu seiner Überlieferung siehe GERICKE, S.18.
[52] S.o. Mathematische Grundlagen, B), Schritt 1 bis 5.
[53] Dies mit Einschränkungen, wie GERICKE, wie Anm.11, S.22, bemerkt.
[54] Vgl. Proklus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“, übers. von P.L. Schönberger, ed. von M. STECK, Halle 1945, S.281 bzw. S.332; GERICKE, wie Anm.11, S.18; SIMON, wie Anm.11, S.309f.
[55] Vgl. GERICKE, wie Anm.11, S.22; HEATH, wie Anm.48, S.389f.

Gerade solche regelmäßigen Sechsecke sind es, die wir häufig in den zeitgenössischen Abbildungen ummauerter spätantiker Städte sehen. Münzen, die Peutinger-Tafel oder die *Notitia dignitatum* belegen dies.[56] Daneben treten noch andere regelmäßige Formen auf, meistens Quadrate oder Kreise. Die abstrakten Abbildungen entsprechen natürlich nicht der Realität. Doch können wir neben ästhetischen Gesichtspunkten sehr wohl die Kenntnis des isoperimetrischen Prinzips vermuten.

Ergebnisse

Wir kommen damit zur *Zusammenfassung* unserer Ergebnisse, indem wir die folgenden Aussagen treffen:

a) Das isoperimetrische Problem ist in der griechisch-römischen Antike seit langem bekannt und mindestens seit Zenodoros mathematisch bewiesen, wie uns u.a. die Überlieferungen der Spätantike nahe legen.
b) Die Landvermessung, der Umfang und die Fläche von Äckern, Städten und Militärlagern, stehen in enger Beziehung zur Isoperimetrie. Auch können die spätantiken Abbildungen von Städten entsprechend interpretiert werden.
c) Die archäologisch-statistische Analyse von gallischen Stadtbefestigungen ergibt einen hohen Anteil von annähernd runden Städten, die dem rechteckigen („typischen“) Aufbau einer römischen Stadt entgegenstehen. Der spätantike Mauerbau ist also durch den Wandel hin zu kreisförmigen und ovalen Stadtbefestigungen geprägt.
d) Für den Wandel können ökonomische und militärische Beweggründe verantwortlich gemacht werden und insbesondere eine (relativ) einheitliche und zentrale Planung, die über das isoperimetrische Prinzip Bescheid wusste und dies, wenn möglich, auch angewendet hat. Der Beitrag, den wirtschaftliche Gegebenheiten beim Mauerbau geleistet haben, ist jedenfalls nicht zu niedrig zu veranschlagen.

Wir haben damit dank unserer theoretischen Überlegungen zum isoperimetrischen Problem recht gute Einblicke in Ökonomie und Praxis der spätantiken Stadtbefestigungen gewinnen können. Die Methode, den Umfang und die Fläche einer Stadt zu analysieren, ist natürlich auch in einem größeren Maße und unter anderen Fragestellungen anwendbar. So können Vergleiche zwischen Stadtlandschaften einer oder unterschiedlicher Kulturen durchgeführt werden; man denke dabei nur an die sicherlich verschiedenen Resultate bei Regression und normiertem isoperimetrischen Koeffizienten, wenn dem im Allgemeinen rechteckigen Städtetyp eines römischen Oberitalien die Städtelandschaft des spätantiken Gallien gegenübergestellt wird. Interessante Schlussfolgerungen mag der Einsatz der vorgestellten Methode auch bei Fragestellungen hinsichtlich der Funktionen von Siedlungen versprechen. Hier wären vielleicht – rein statistisch gesehen – Unterschiede im normierten isoperimetrischen Koeffizienten auf eine vorzugsweise militärisch-geographische (Festungen, Militärlager) oder wirtschaftliche Ausrichtung (Kaufmannssiedlung, Handelsstadt) zurückzuführen. Und schließlich ermöglicht es die isoperimetrische Theorie durch ihre Abschätzungen, Daten zu Größe und Umfang einer Siedlung auf deren Plausibilität zu überprüfen.

[56] Vgl. JOHNSON, wie Anm.2, S.42f