Michael Buhlmann

Mathematik > Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik > Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve)

Carl Friedrich Gauß

Der Mathematiker und Gelehrte Carl Friedrich Gauß (*1777-†1855) studierte nach Schulausbildung und Abitur am Collegium Carolinum Braunschweig (1792-1795) und an der Universität Göttingen Mathematik (1795-1798); die Promotion erfolgte 1799, die Promotionsarbeit beschäftigte sich mit den komplexen Zahlen. Einen gewissen Abschluss fand diese erste Phase von Gauß' Forschungen über Analysis und Geometrie (1790/1800) in den *Disquisitiones Arithmeticae* (1801; daneben: Methode der kleinsten Quadrate ab 1789, geometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks 1796, Osterfestberechnung 1800/02/07). In den folgenden Jahrzehnten (1800/20) wandte sich der auch praktisch veranlagte Gauß der Astronomie und Geodäsie zu (Landvermessungen ab 1799, Planetoidenentdeckungen 1801/07, *Theoria Motus* 1809, „Über die hypergeometrische Reihe“ 1813). 1805 wurde Gauß Professor für Astronomie an der Universität Göttingen und Direktor der dortigen (zunächst noch im Bau befindlichen) Sternwarte (astronomische Hilfstafeln 1808/12, Refraktionstafeln 1822). Die Beschäftigung mit der Geodäsie und dem Erdmagnetfeld (1820/45) führte zu Erkenntnissen bei der Erdabplattung (Geoid, 1828); 1829 veröffentlichte der Gelehrte die Schriften „Die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustand“ und „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“ (Prinzip des kleinsten Zwangs); 1831 erschien Gauß' „Theorie der biquadratischen Reste“ zu den komplexen Zahlen. Ausfluss von Gauß' Beschäftigung mit dem Elektromagnetismus war u.a. die telegrafische Göttinger Drahtverbindung von 1833. 1843 und 1846 folgten noch zwei „Untersuchungen über Gegenstände der Geodäsie“. Nach seinem Tod wurde Gauß als *princeps mathematicorum* gewürdigt (1855).

Gaußsche Glockenkurve

Nach Vorarbeiten von Abraham de Moivre (†1754; uneigentliches Integral über die Gaußsche Glockenkurve, 1733) und Pierre Simon Laplace (†1827; Wert des uneigentlichen Integrals, 1782) stellte Gauß im Jahr 1809 in seiner Schrift *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* („Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper“) neben anderem die Normalverteilung auf der Grundlage „seiner“ Glockenkurve vor.
Die Gaußsche Glockenkurve ist eine von reellen Parametern μ und σ (>0) abhängige Schar von reellwertigen Funktionen $f_{\mu,\sigma}(x)$:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Die Glockenkurve hat – wie der nachstehenden Funktionsuntersuchung zu entnehmen ist – folgende Eigenschaften:

I. $f_{\mu,\sigma}(x)$ ist definiert auf allen reellen Zahlen und dort positiv: $f_{\mu,\sigma}(x) > 0$.

II. $f_{\mu,\sigma}(x)$ ist achsensymmetrisch zur Senkrechten x = μ wegen:

$$f_{\mu,\sigma}(\mu - x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu+x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f_{\mu,\sigma}(\mu + x)$$

III. Die Ableitungen von $f_{\mu,\sigma}(x)$ sind (nach Ketten- und Produktregel):

$$f_{\mu,\sigma}'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{\mu,\sigma}''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{\mu,\sigma}'''(x) = \frac{2(x-\mu)}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \left(-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{2(x-\mu)}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{x-\mu}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-\mu)^3}{\sigma^7\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{2(x-\mu)}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} + \frac{x-\mu}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-\mu)^3}{\sigma^7\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\left(\frac{2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right)(x-\mu) - \frac{(x-\mu)^3}{\sigma^7\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

IV. $f_{\mu,\sigma}(x)$ besitzt einen <u>Hochpunkt</u> an der Stelle $x_H = 0$ auf Grund von:

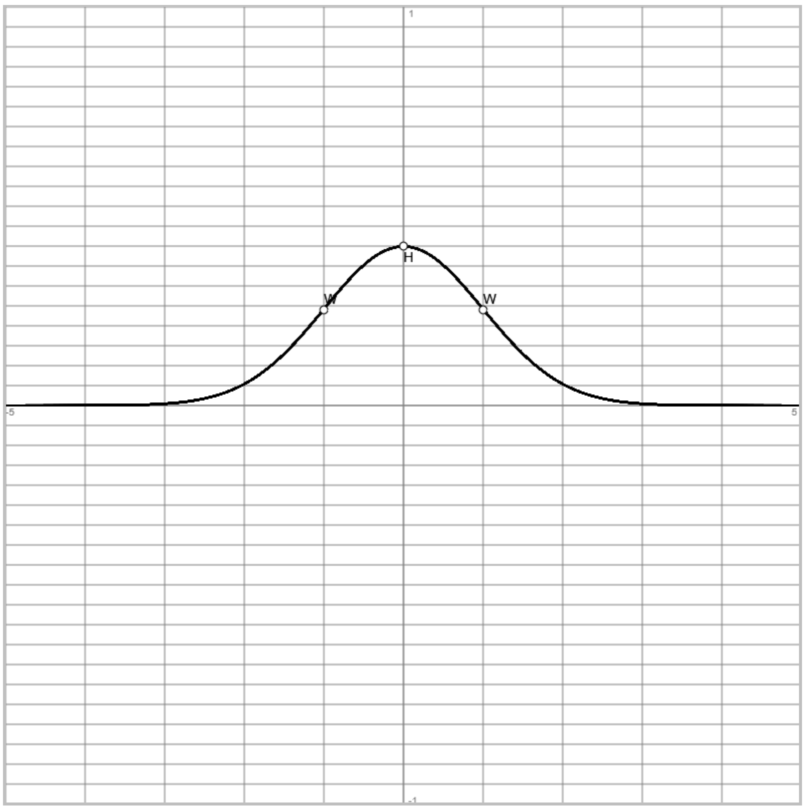
$$f_{\mu,\sigma}'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Leftrightarrow x-\mu = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$

$$f_{\mu,\sigma}''(\mu) = \left(-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} + \frac{(\mu-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} + 0\right) e^0 = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} < 0 .$$

Der Funktionswert des Hochpunkts ist:

$$f_{\mu,\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} .$$

Der Hochpunkt hat also die Koordinaten: H(μ| $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$).



Gaußsche Glockenkurve $f_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

V. $f_{\mu,\sigma}(x)$ besitzt zwei Wendepunkte, denn:

$$f_{\mu,\sigma}''(x)=\left(-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow$$

$$(x-\mu)^2=\sigma^2 \Leftrightarrow x-\mu=\pm\sigma \Leftrightarrow x=\mu\pm\sigma$$

$$f_{\mu,\sigma}'''(\mu\pm\sigma)=\left(\left(\frac{2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right)(\mu\pm\sigma-\mu)-\frac{(\mu\pm\sigma-\mu)^3}{\sigma^7\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{(\mu\pm\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\left(\frac{2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\right)(\pm\sigma)-\frac{\pm\sigma^3}{\sigma^7\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}=\pm\frac{2}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

Wegen der Achsensymmetrie zur Senkrechten x = μ ist:

$$f_{\mu,\sigma}(\mu\pm\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu\pm\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}},$$

so dass sich $W_1(\mu-\sigma|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ und $W_2(\mu+\sigma|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ als Wendepunkte der Funktion ergeben.

VI. Das <u>Verhalten für betragsmäßig große</u> x folgt aus:

x->±∞: $f_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ -> 0 = y

mit y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote.

Es gilt die <u>Transformationsregel</u> für die Gaußsche Glockenkurve:

$$f_{\mu,\sigma}(\sigma x+\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sigma x+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sigma x)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sigma}f_{0;1}(x),$$

so dass jede Funktion $f_{\mu,\sigma}(x)$ letztlich auf die Funktion $f_{0;1}(x)$ zurückgeführt werden kann. Die Transformation betrifft auch das uneigentliche <u>Integral</u> über jede Funktion $f_{\mu,\sigma}(x)$; es gilt nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1.$$

auf Grund der Substitution t = (x–μ)/σ.

<u>Normalverteilung</u>

Die Eigenschaften der Funktionen $f_{\mu,\sigma}(x)$ führen zu deren Verwendung in der Stochastik, stellt doch jede Funktion $f_{\mu,\sigma}(x)$ die <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> (Gauß-Funktion) einer sog. normalverteilten (gauß-verteilten) stetigen Zufallsvariablen X dar: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ als <u>Normalverteilung</u> mit <u>Erwartungswert</u> μ und <u>Standardabweichung</u> σ. Der Parameter μ verschiebt die Dichtefunktion (nach rechts: μ>0; nach links: μ<0), der Parameter σ (>0) steht für die Breite der Dichtefunktion (schmaler: σ<1; breiter: σ>1). Ist μ=0 und σ=1, so liegt die <u>Standardnormalverteilung</u> N(0; 1) vor. Dabei lassen sich gemäß der Transformationsregel alle Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ auf die Standardnormalverteilung N(0; 1) zurückführen. Dies gilt insbesondere für die <u>Verteilungsfunktion</u> $F_{\mu,\sigma}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen als Integralfunktion über die Dichte $f_{\mu,\sigma}(x)$:

$$F_{\mu,\sigma}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(z)dz=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=F_{0;1}(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

wegen der Substitution t = (z–μ)/σ. Die Achsensymmetrie der Dichtefunktion $f_{\mu,\sigma}(x)$ zur Senkrechten x = μ bedingt, dass die Verteilungsfunktion $F_{\mu,\sigma}(x)$ punktsymmetrisch zum Punkt Z(μ|0,5) ist. Weiter gilt: x->-∞: $F_{\mu,\sigma}(x)$ -> 0; x->+∞: $F_{\mu,\sigma}(x)$ -> 1. Die Dichte $f_{0;1}(x)$ der Standardnormalverteilung N(0; 1) wird in der Stochastik und Statistik mit φ(x) bezeichnet, die dazugehörige Verteilungsfunktion $F_{0;1}(x)$ als $\Phi(x)$. Die Funktionen $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ und

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ haben mit den Zufallsvariablen $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ wegen:

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = (Y-\mu)/\sigma \sim N(0; 1)$

die <u>Eigenschaften</u> und Wahrscheinlichkeiten p:

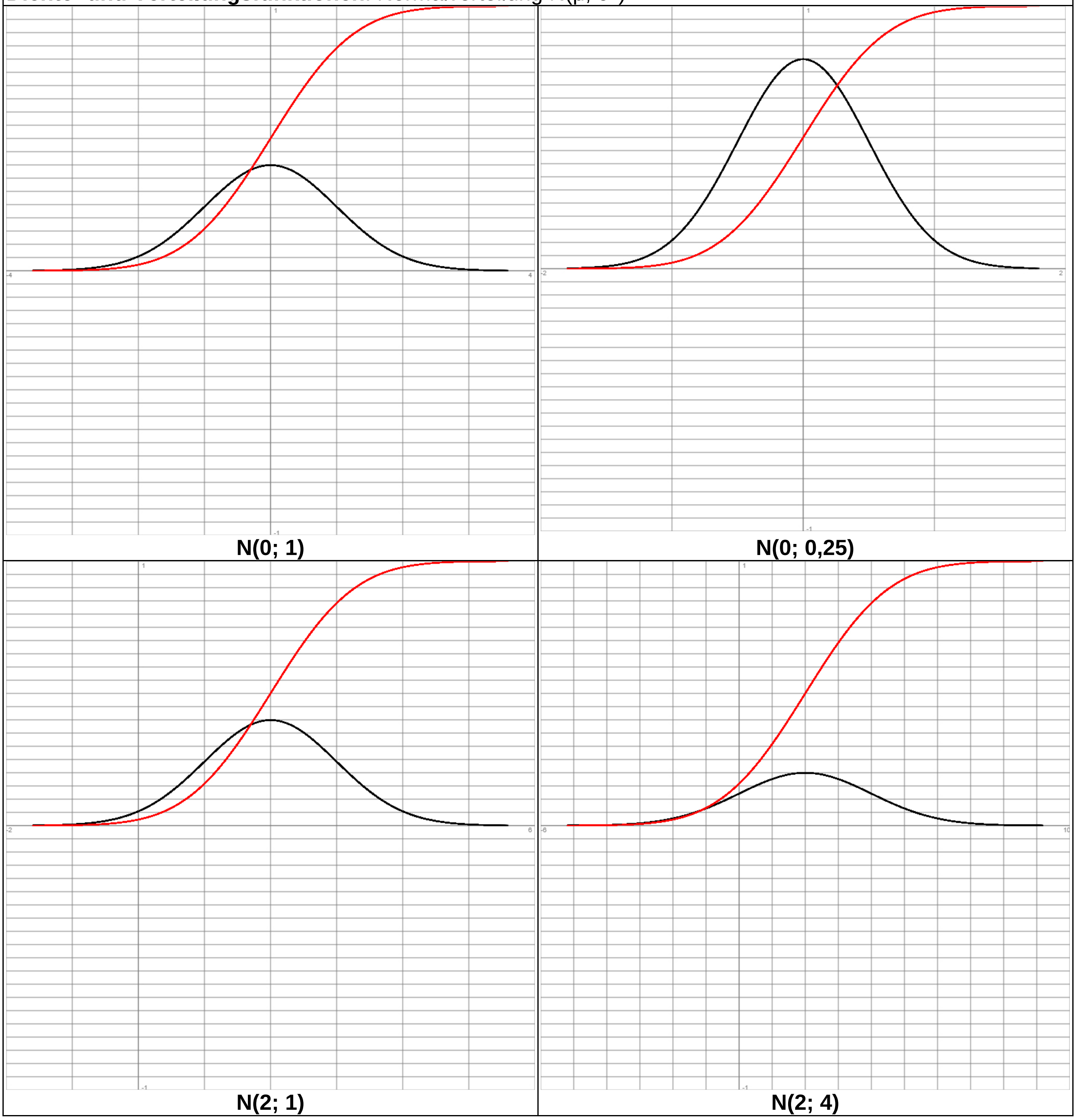
$\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(\infty) = 1$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$p(X \le x) = \Phi(x)$, $p(X \ge x) = 1 - \Phi(x)$, $p(x_1 \le X \le x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

$p(Y \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, $p(Y \ge x) = 1 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, $p(x_1 \le Y \le x_2) = \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$

$p(\mu-\sigma \le Y \le \mu+\sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0{,}683$, $p(\mu-2\sigma \le Y \le \mu+2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0{,}954$
$p(\mu-3\sigma \le Y \le \mu+3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0{,}997$ (σ-Intervalle der Normalverteilung)

Dichte- und Verteilungsfunktionen: Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$



Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsvariablen mit beliebigen Parametern μ und σ wird mithin nur die Verteilungsfunktion Φ(x) der N(0; 1)-verteilten Zufallsvariablen X benötigt. Es stellt sich aber das Problem, dass das der Verteilungsfunktion zugrunde liegende Integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ nicht elementar lösbar ist. Es müssen also Näherungen für die jeweiligen Integralwerte gefunden werden. Dies kann geschehen über die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion für alle reellen x:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!},$$

die für $-x^2/2$ im Exponenten zu:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i}}{2^i \cdot i!}$$

wird. Gliedweise Integration der Potenzreihe führt auf:

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\cdot 2^i \cdot i!},$$

so dass das Integral der Verteilungsfunktion sich errechnet als:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\cdot 2^i \cdot i!} - 0\right) + 0{,}5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)\cdot 2^i \cdot i!} + 0{,}5.$$

Für $-3{,}6 \le x \le 3{,}6$ ergeben sich brauchbare Näherungen, wenn die Berechnung der Reihe z.B. nach 20 Summanden abgebrochen wird. Es folgt daraus die nachstehende Wahrscheinlichkeitstafel für die N(0; 1)-verteilte Zufallsvariable der Verteilungsfunktion Φ(x).

Wahrscheinlichkeitstafel: Normalverteilung N(0,1)

x|Φ(x)	**_9**	**_8**	**_7**	**_6**	**_5**	**_4**	**_3**	**_2**	**_1**	**_0**	**x|Φ(x)**
-3.5_	0.000115	0.000127	0.000139	0.000150	0.000162	0.000173	0.000183	0.000194	0.000205	0.000216	**-3.5_**
-3.4_	0.000227	0.000237	0.000248	0.000260	0.000271	0.000283	0.000295	0.000307	0.000319	0.000332	**-3.4_**
-3.3_	0.000345	0.000359	0.000372	0.000387	0.000401	0.000417	0.000432	0.000448	0.000465	0.000482	**-3.3_**
-3.2_	0.000500	0.000518	0.000537	0.000556	0.000576	0.000597	0.000618	0.000640	0.000663	0.000687	**-3.2_**
-3.1_	0.000711	0.000736	0.000762	0.000789	0.000816	0.000845	0.000874	0.000904	0.000935	0.000968	**-3.1_**
-3.0_	0.001001	0.001035	0.001070	0.001107	0.001144	0.001183	0.001223	0.001264	0.001306	0.001350	**-3.0_**
-2.9_	0.001395	0.001441	0.001489	0.001538	0.001589	0.001641	0.001695	0.001750	0.001807	0.001866	**-2.9_**
-2.8_	0.001926	0.001988	0.002052	0.002118	0.002186	0.002256	0.002327	0.002401	0.002477	0.002555	**-2.8_**
-2.7_	0.002635	0.002718	0.002803	0.002890	0.002980	0.003072	0.003167	0.003264	0.003364	0.003467	**-2.7_**
-2.6_	0.003573	0.003681	0.003793	0.003907	0.004025	0.004145	0.004269	0.004396	0.004527	0.004661	**-2.6_**
-2.5_	0.004799	0.004940	0.005085	0.005234	0.005386	0.005543	0.005703	0.005868	0.006037	0.006210	**-2.5_**
-2.4_	0.006387	0.006569	0.006756	0.006947	0.007143	0.007344	0.007549	0.007760	0.007976	0.008198	**-2.4_**
-2.3_	0.008424	0.008656	0.008894	0.009137	0.009387	0.009642	0.009903	0.010170	0.010444	0.010724	**-2.3_**
-2.2_	0.011011	0.011304	0.011604	0.011911	0.012224	0.012545	0.012874	0.013209	0.013553	0.013903	**-2.2_**
-2.1_	0.014262	0.014629	0.015003	0.015386	0.015778	0.016177	0.016586	0.017003	0.017429	0.017864	**-2.1_**
-2.0_	0.018309	0.018763	0.019226	0.019699	0.020182	0.020675	0.021178	0.021692	0.022216	0.022750	**-2.0_**

-1.9_	0.023295	0.023852	0.024419	0.024998	0.025588	0.026190	0.026803	0.027429	0.028067	0.028717	**-1.9_**
-1.8_	0.029379	0.030054	0.030742	0.031443	0.032157	0.032884	0.033625	0.034380	0.035148	0.035930	**-1.8_**
-1.7_	0.036727	0.037538	0.038364	0.039204	0.040059	0.040930	0.041815	0.042716	0.043633	0.044565	**-1.7_**
-1.6_	0.045514	0.046479	0.047460	0.048457	0.049471	0.050503	0.051551	0.052616	0.053699	0.054799	**-1.6_**
-1.5_	0.055917	0.057053	0.058208	0.059380	0.060571	0.061780	0.063008	0.064255	0.065522	0.066807	**-1.5_**
-1.4_	0.068112	0.069437	0.070781	0.072145	0.073529	0.074934	0.076359	0.077804	0.079270	0.080757	**-1.4_**
-1.3_	0.082264	0.083793	0.085343	0.086915	0.088508	0.090123	0.091759	0.093418	0.095098	0.096800	**-1.3_**
-1.2_	0.098525	0.100273	0.102042	0.103835	0.105650	0.107488	0.109349	0.111232	0.113139	0.115070	**-1.2_**
-1.1_	0.117023	0.119000	0.121000	0.123024	0.125072	0.127143	0.129238	0.131357	0.133500	0.135666	**-1.1_**
-1.0_	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655	**-1.0_**
-0.9_	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176186	0.178786	0.181411	0.184060	**-0.9_**
-0.8_	0.186733	0.189430	0.192150	0.194895	0.197663	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855	**-0.8_**
-0.7_	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964	**-0.7_**
-0.6_	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253	**-0.6_**
-0.5_	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538	**-0.5_**
-0.4_	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578	**-0.4_**
-0.3_	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378280	0.382089	**-0.3_**
-0.2_	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740	**-0.2_**
-0.1_	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172	**-0.1_**
-0.0_	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488034	0.492022	0.496011	0.500000	**-0.0_**
0.0_	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856	**0.0_**
0.1_	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345	**0.1_**
0.2_	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092	**0.2_**
0.3_	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732	**0.3_**
0.4_	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933	**0.4_**
0.5_	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405	**0.5_**
0.6_	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903	**0.6_**
0.7_	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236	**0.7_**
0.8_	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267	**0.8_**
0.9_	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913	**0.9_**
1.0_	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143	**1.0_**
1.1_	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977	**1.1_**
1.2_	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475	**1.2_**
1.3_	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736	**1.3_**
1.4_	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888	**1.4_**
1.5_	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083	**1.5_**
1.6_	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486	**1.6_**
1.7_	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273	**1.7_**
1.8_	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621	**1.8_**
1.9_	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705	**1.9_**
2.0_	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691	**2.0_**
2.1_	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738	**2.1_**
2.2_	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989	**2.2_**
2.3_	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576	**2.3_**
2.4_	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613	**2.4_**
2.5_	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201	**2.5_**
2.6_	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427	**2.6_**
2.7_	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365	**2.7_**
2.8_	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074	**2.8_**
2.9_	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605	**2.9_**
3.0_	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999	**3.0_**
3.1_	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289	**3.1_**
3.2_	0.999313	0.999337	0.999360	0.999382	0.999403	0.999424	0.999444	0.999463	0.999482	0.999500	**3.2_**

3.3_	0.999518	0.999535	0.999552	0.999568	0.999583	0.999599	0.999613	0.999628	0.999641	0.999655	**3.3_**
3.4_	0.999668	0.999681	0.999693	0.999705	0.999717	0.999729	0.999740	0.999752	0.999763	0.999773	**3.4_**
3.5_	0.999784	0.999795	0.999806	0.999817	0.999827	0.999838	0.999850	0.999861	0.999873	0.999885	**3.5_**
x|Φ(x)	**_0**	**_1**	**_2**	**_3**	**_4**	**_5**	**_6**	**_7**	**_8**	**_9**	**x|Φ(x)**

Literatur:

Carl Friedrich Gauß (de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauß; Aufruf: 20.12.2018); dtv-Atlas Schulmathematik, v. FRITZ REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.244-247; Lambacher-Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe, bearb. v. HANS FREUDIGMANN u.a., Stuttgart 2010, S.366-372; Lambacher-Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe, bearb. v. ROLF DÜRR u.a., Stuttgart-Leipzig 2017, S.292ff; LELGEMANN, DIETER, Gauß und die Messkunst, Darmstadt 2011; Normalverteilung (de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung; Aufruf: 22.12.2018)

Michael Buhlmann, 12.2018