Michael Buhlmann

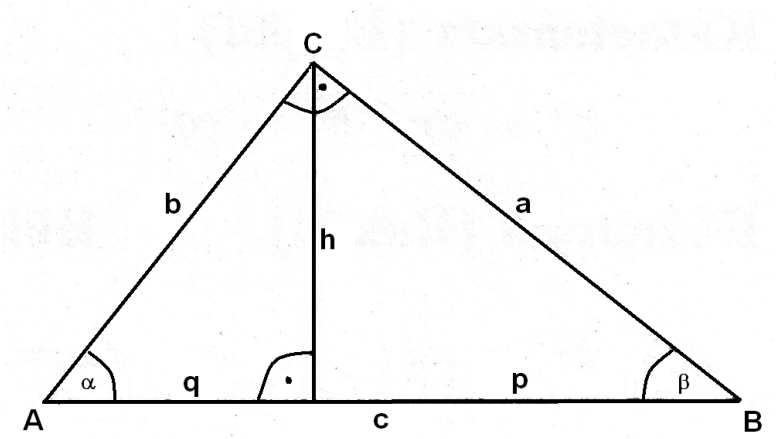
Mathematik-Formelsammlung
> Geometrie
> Trigonometrie (Dreiecksberechnung)

Eine ebene geometrische Figur aus drei Punkten (Ecken) A, B, C und den Seiten *a, b, c* heißt Dreieck ΔABC, das Rechnen mit Dreiecken nennt man Trigonometrie. Die Winkel im Dreieck heißen α, β, γ und liegen bei den Punkten A, B, C. Rechtwinklige Dreiecke sind Dreiecke, die einen rechten Winkel enthalten, spitzwinklige, die nur spitze Winkel besitzen, stumpfwinklige, die einen stumpfen Winkel haben. Gleichschenklige Dreiecke sind Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten, gleichseitige Dreiecke haben nur (drei) gleich lange Seiten.

Rechtwinklige Dreiecke

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit den Seiten *a, b, c* und den Winkeln α, β, γ mit γ = 90°. *a* und *b* heißen Katheten, *c* heißt Hypotenuse, *p* und *q* heißen Hypotenusenabschnitte, $h = h_c$ heißt Höhe des Dreiecks.

Rechtwinklige Dreiecke



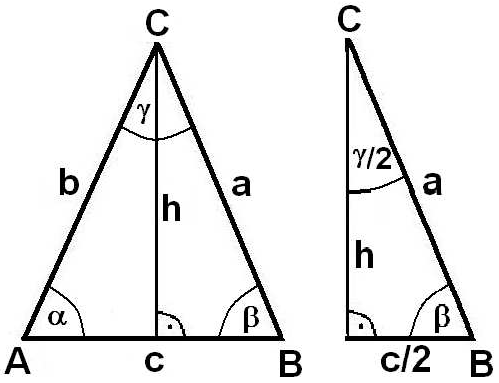
Winkelsumme	α+β+γ = 180°		
γ = 90°	α+β = 90°	α = 90°– β	β = 90°– α
Umfang	U = a + b + c		
	a = U – b – c	b = U – a – c	c = U – a – b
Flächeninhalt	$A = \frac{1}{2}ab$		$A = \frac{1}{2}ch$
	$a = \frac{2A}{b}$	$b = \frac{2A}{a}$	$c = \frac{2A}{h}$
Satz des Pythagoras	$a^2 + b^2 = c^2$		
	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a^2 = c^2 - b^2$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b^2 = c^2 - a^2$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Kathetensatz	$a^2 = c \cdot p$		
	$a = \sqrt{cp}$	$c = \frac{a^2}{p}$	$p = \frac{a^2}{c}$
	$b^2 = c \cdot q$		
	$b = \sqrt{cq}$	$c = \frac{b^2}{q}$	$q = \frac{b^2}{c}$
Höhensatz	$h^2 = p \cdot q$		
	$h = \sqrt{pq}$	$p = \frac{h^2}{q}$	$q = \frac{h^2}{p}$
	$h = \frac{ab}{c}$	$h = \frac{2A}{c}$	
	$a = \frac{hc}{b}$	$b = \frac{hc}{a}$	$c = \frac{ab}{h}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$		(Sinus)
	$a = c\sin\alpha$	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$	
	$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$		(Cosinus)
	$b = c\cos\alpha$	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$	
	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$		(Tangens)
	$a = b\tan\alpha$	$b = \frac{a}{\tan\alpha}$	
	$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$		(Sinus)
	$b = c\sin\beta$	$c = \frac{b}{\sin\beta}$	
	$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$		(Cosinus)
	$a = c\cos\beta$	$c = \frac{a}{\cos\beta}$	
	$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$		(Tangens)

	$b = a \tan \beta$	$a = \frac{b}{\tan \beta}$	
	$\sin \alpha = \cos \beta$	$\cos \alpha = \sin \beta$	
	$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$	$\tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$	
Rechtwinklige Dreiecke			

Gleichschenklige Dreiecke

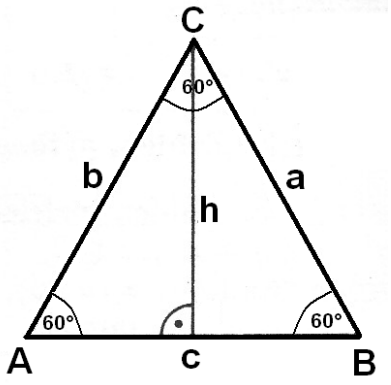
Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit den Seiten *a* = *b* als Schenkeln, der Seite *c* als Grundseite (Basis) und den Winkeln α = β als Basiswinkeln, γ als Winkel in der Spitze. Die Höhe $h = h_c$ auf der Basis halbiert die Grundseite *c* und den Winkel γ.

Gleichschenklige Dreiecke			
			
Winkelsumme	α+β+γ = 180°		
α = β	$\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$	$\beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$	$\gamma = 180° - 2\alpha$ $\gamma = 180° - 2\beta$
Umfang	U = a + b + c	U = 2a + c	U = 2b + c
a = b	$a = \frac{U - c}{2}$	$b = \frac{U - c}{2}$	c = U – 2a c = U – 2b
Flächeninhalt	$A = \frac{1}{2} ch$		
a = b	$c = \frac{2A}{h}$	$h = \frac{2A}{c}$	
	$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$	$A = \frac{c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$	

Satz des Pythagoras	$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$	$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$	
a = b	$a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$	$b = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$	$c = 2\sqrt{a^2 - h^2}$ $c = 2\sqrt{b^2 - h^2}$
	$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$	$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$	
Trigonometrische Funktionen	$\sin\alpha = \frac{h}{a}$	$a = \frac{h}{\sin\alpha}$	$h = a\sin\alpha$
a = b, α = β	$\sin\beta = \frac{h}{b}$	$b = \frac{h}{\sin\beta}$	$h = b\sin\beta$
	$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2a}$	$a = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$	$c = 2a\sin\frac{\gamma}{2}$
	$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2b}$	$b = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$	$c = 2b\sin\frac{\gamma}{2}$
	$\cos\alpha = \frac{c}{2a}$	$a = \frac{c}{2\cos\alpha}$	$c = 2a\cos\alpha$
	$\cos\beta = \frac{c}{2b}$	$b = \frac{c}{2\cos\beta}$	$c = 2b\cos\beta$
	$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h}{a}$	$a = \frac{h}{\cos\frac{\gamma}{2}}$	$h = a\cos\frac{\gamma}{2}$
	$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h}{b}$	$b = \frac{h}{\cos\frac{\gamma}{2}}$	$h = b\cos\frac{\gamma}{2}$
	$\tan\alpha = \frac{2h}{c}$	$c = \frac{2h}{\tan\alpha}$	$h = \frac{c}{2}\tan\alpha$
	$\tan\beta = \frac{2h}{c}$	$c = \frac{2h}{\tan\beta}$	$h = \frac{c}{2}\tan\beta$
	$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2h}$	$c = 2h\tan\frac{\gamma}{2}$	$h = \frac{c}{2\tan\frac{\gamma}{2}}$
Gleichschenklige Dreiecke			

Gleichseitige Dreiecke

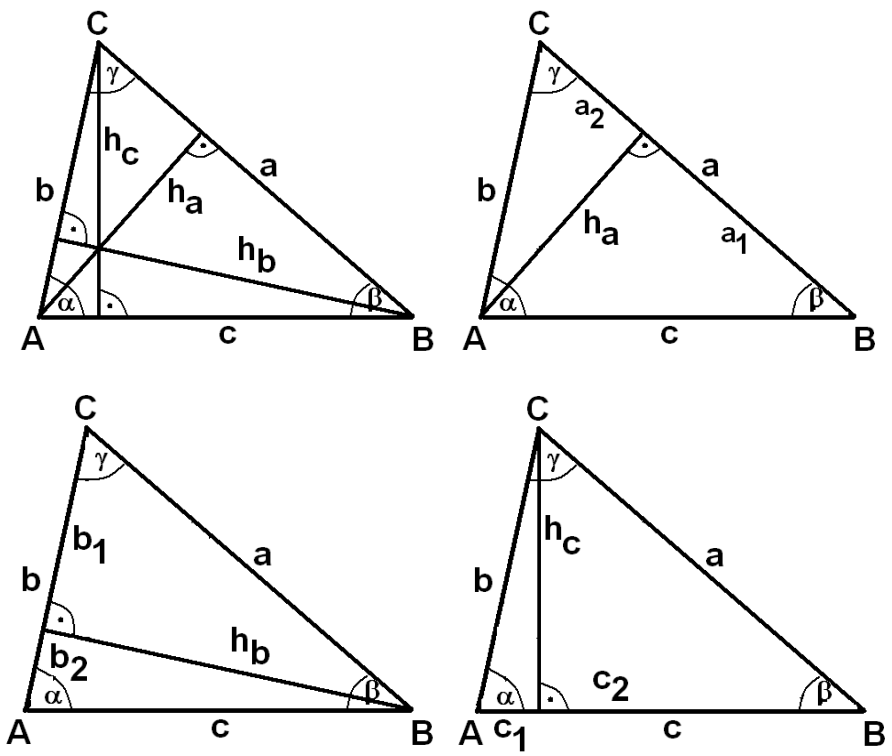
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ΔABC mit den Seiten $a = b = c$ und den Winkeln $\alpha = \beta = \gamma$. Die Höhe $h = h_a = h_b = h_c$ halbiert jeweils die Seiten und die Winkel.

Gleichseitige Dreiecke			
			
Winkelsumme	$\alpha+\beta+\gamma = 180°$		
$\alpha = \beta = \gamma$	$\alpha = 60°$	$\beta = 60$“	$\gamma = 60°$
Umfang	U = a + b + c	U = 3a = 3b = 3c	
a = b = c	$a = \frac{U}{3}$	$b = \frac{U}{3}$	$c = \frac{U}{3}$
Höhe	$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$	$a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$	
Flächeninhalt	$A = \frac{1}{2}ch$	$c = \frac{2A}{h}$	$h = \frac{2A}{c}$
	$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$a = 2\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$	$h = \sqrt{A\sqrt{3}}$
Gleichseitige Dreiecke			

Beliebige Dreiecke

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ. Der Inkreis berührt die Dreieckseiten, der Umkreis läuft durch die Dreiecksecken. Die drei Seitenhalbierenden halbieren jeweils von der gegenüberliegenden Ecke aus die Dreiecksseite, die drei Winkelhalbierenden halbieren die jeweiligen Dreieckswinkel.

Beliebige Dreiecke



Winkelsumme	$\alpha+\beta+\gamma = 180°$		
	$\alpha = 180° - \beta - \gamma$	$\beta = 180" - \alpha - \gamma$	$\gamma = 180° - \alpha - \beta$
Umfang	$U = a + b + c$		
	$a = U - b - c$	$b = U - a - c$	$c = U - a - b$
Flächeninhalt	$A = \frac{1}{2} a h_a$	$A = \frac{1}{2} b h_b$	$A = \frac{1}{2} c h_c$
	$a = \frac{2A}{h_a}$	$h_a = \frac{2A}{a}$	
	$b = \frac{2A}{h_b}$	$h_b = \frac{2A}{b}$	
	$c = \frac{2A}{h_c}$	$h_c = \frac{2A}{c}$	
	$A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$	$A = \frac{1}{2} ac \sin\beta$	$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$
	$a = \frac{2A}{b \sin\gamma}$	$b = \frac{2A}{a \sin\gamma}$	$\sin\gamma = \frac{2A}{ab}$
	$a = \frac{2A}{c \sin\beta}$	$c = \frac{2A}{a \sin\beta}$	$\sin\beta = \frac{2A}{ac}$
	$b = \frac{2A}{c \sin\alpha}$	$c = \frac{2A}{b \sin\alpha}$	$\sin\alpha = \frac{2A}{bc}$

	$A=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$	$A=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$	$A=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$
$s=\frac{a+b+c}{2}$	$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$		(Heronsche Formel)
	$A=r_I^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$		
Höhen	$h_a=b\sin\gamma$	$h_b=a\sin\gamma$	$h_c=a\sin\beta$
	$h_a=c\sin\beta$	$h_b=c\sin\alpha$	$h_c=b\sin\alpha$
	$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$		
	$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}$	$\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}$	$\frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}$
Satz des Pythagoras	$a_1^2+h_a^2=c^2$ $c=\sqrt{a_1^2+h_a^2}$	$a_2^2+h_a^2=b^2$ $b=\sqrt{a_2^2+h_a^2}$	$h_a^2=c^2-a_1^2$ $h_a=\sqrt{c^2-a_1^2}$
$a_1 + a_2 = a$ bzw. $a_1 - a_2 = a$ bzw. $a_2 - a_1 = a$	$a_1^2=c^2-h_a^2$ $a_1=\sqrt{c^2-h_a^2}$	$a_2^2=b^2-h_a^2$ $a_2=\sqrt{b^2-h_a^2}$	$h_a^2=b^2-a_2^2$ $h_a=\sqrt{b^2-a_2^2}$
	$b_1^2+h_b^2=a^2$ $a=\sqrt{b_1^2+h_b^2}$	$b_2^2+h_b^2=c^2$ $c=\sqrt{b_2^2+h_b^2}$	$h_b^2=a^2-b_1^2$ $h_b=\sqrt{a^2-b_1^2}$
$b_1 + b_2 = b$ bzw. $b_1 - b_2 = b$ bzw. $b_2 - b_1 = b$	$b_1^2=a^2-h_b^2$ $b_1=\sqrt{a^2-h_b^2}$	$b_2^2=c^2-h_b^2$ $b_2=\sqrt{c^2-h_b^2}$	$h_b^2=c^2-b_2^2$ $h_b=\sqrt{c^2-b_2^2}$
	$c_1^2+h_c^2=b^2$ $b=\sqrt{c_1^2+h_c^2}$	$c_2^2+h_c^2=a^2$ $a=\sqrt{c_2^2+h_c^2}$	$h_c^2=b^2-c_1^2$ $h_c=\sqrt{b^2-c_1^2}$
$c_1 + c_2 = c$ bzw. $c_1 - c_2 = c$ bzw. $c_2 - c_1 = c$	$c_1^2=b^2-h_c^2$ $c_1=\sqrt{b^2-h_c^2}$	$c_2^2=a^2-h_c^2$ $c_2=\sqrt{a^2-h_c^2}$	$h_c^2=a^2-c_2^2$ $h_c=\sqrt{a^2-c_2^2}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin\alpha=\frac{h_c}{b}$	$b=\frac{h_c}{\sin\alpha}$	$h_c=b\sin\alpha$
	$\cos\alpha=\frac{c_1}{b}$	$b=\frac{c_1}{\cos\alpha}$	$c_1=b\cos\alpha$
	$\tan\alpha=\frac{h_c}{c_1}$	$c_1=\frac{h_c}{\tan\alpha}$	$h_c=c_1\tan\alpha$
	$\sin\alpha=\frac{h_b}{c}$	$c=\frac{h_b}{\sin\alpha}$	$h_b=c\sin\alpha$

	$\cos\alpha = \frac{b_2}{c}$	$c = \frac{b_2}{\cos\alpha}$	$b_2 = c\cos\alpha$
	$\tan\alpha = \frac{h_b}{b_2}$	$b_2 = \frac{h_b}{\tan\alpha}$	$h_b = b_2\tan\alpha$
	$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$	$a = \frac{h_c}{\sin\beta}$	$h_c = a\sin\beta$
	$\cos\beta = \frac{c_2}{a}$	$a = \frac{c_2}{\cos\beta}$	$c_2 = a\cos\beta$
	$\tan\beta = \frac{h_c}{c_2}$	$c_2 = \frac{h_c}{\tan\beta}$	$h_c = c_2\tan\beta$
	$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$	$c = \frac{h_a}{\sin\beta}$	$h_a = c\sin\beta$
	$\cos\beta = \frac{a_1}{c}$	$c = \frac{a_1}{\cos\beta}$	$a_1 = c\cos\beta$
	$\tan\beta = \frac{h_a}{a_1}$	$a_1 = \frac{h_a}{\tan\beta}$	$h_a = a_1\tan\beta$
	$\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$	$a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$	$h_b = a\sin\gamma$
	$\cos\gamma = \frac{b_1}{a}$	$a = \frac{b_1}{\cos\gamma}$	$b_1 = a\cos\gamma$
	$\tan\gamma = \frac{h_b}{b_1}$	$b_1 = \frac{h_b}{\tan\beta}$	$h_b = b_1\tan\beta$
	$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$	$b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$	$h_a = b\sin\gamma$
	$\cos\gamma = \frac{a_2}{b}$	$b = \frac{a_2}{\cos\gamma}$	$a_2 = b\cos\gamma$
	$\tan\gamma = \frac{h_a}{a_2}$	$a_2 = \frac{h_a}{\tan\gamma}$	$h_a = a_2\tan\gamma$
Sinussatz	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$		
	$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$	$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$
$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}b$	$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a$	$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta$	$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$

$b=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}c$	$c=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}b$	$\sin\beta=\frac{b}{c}\sin\gamma$	$\sin\gamma=\frac{c}{b}\sin\beta$
$a=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}c$	$c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a$	$\sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma$	$\sin\gamma=\frac{c}{a}\sin\alpha$
Cosinussatz	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$		$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
	$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$		$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
	$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$		$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
Mollweidesche Formeln	$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$	$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$	
	$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	
	$\frac{c+a}{b}=\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$	$\frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$	
Tangenssatz	$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$		
	$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$		
	$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$		
Halbwinkelsätze	$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$	$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$	$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
$s=\frac{a+b+c}{2}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$	$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$	$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

	$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$	$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$	$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
Seitensätze	a + b > c	b + c > a	a + c > b
Seitenhalbierende	$s_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}$		
	$s_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}$		
	$s_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}$		
Winkelhalbierende	$w_\alpha=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$		
	$w_\beta=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}=\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$		
	$w_\gamma=\frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$		
Umkreisradius	$r_U=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}$		
	$r_U=\frac{bc}{2h_a}=\frac{ac}{2h_b}=\frac{ab}{2h_c}$		
Inkreisradius	$r_I=\frac{A}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$		
$s=\frac{a+b+c}{2}$	$r_I=(s-a)\tan\frac{\alpha}{2}$	$r_I=(s-b)\tan\frac{\beta}{2}$	$r_I=(s-c)\tan\frac{\gamma}{2}$
	$r_I=s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$		
	$r_I=4r_U\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$		
Beliebige Dreiecke			