Michael Buhlmann

Mathematik > Operations Research > Monte-Carlo-Methoden

Referat

Inhalt:

Seite

1. Einleitung 1

1.1. Begriff und Geschichte der Monte-Carlo-Methoden.. 1

1.2. Der Buffon'sche Nadelversuch 2

1.3. Prinzip und Aufbau der Monte-Carlo-Methoden 6

2. Die Methode "Hit-or-Miss" 10

2.1. Allgemeines zum hit-or-miss - Verfahren 10

2.2. Eine Anwendung der Methode "Hit-or-Miss": Die Bestimmung der Zahl $\pi/4$ 12

3. Die Methode "Crude Monte Carlo" 14

3.1. Allgemeine Beschreibung der Methode 14

3.2. Ermittlung der Zahl $\pi/4$ durch die crude Methode.15

4. Betrachtungen zur Güte der Verfahren "Hit-or-Miss" und "Crude Monte Carlo" 17

4.1. Die Güte der hit-or-miss - Methode 17

4.2. Die Güte der Methode "Crude Monte Carlo" 18

4.3. Vergleich beider Verfahren. Analyse der Ergebnisse bei der Bestimmung der Zahl $\pi/4$ 18

5. Varianzreduzierende Methoden 21

Anmerkungen 24

Literatur 24

1. EINLEITUNG

1.1. Begriff und Geschichte der Monte - Carlo - Methoden

Die Methoden, von denen hier im folgenden die Rede sein wird, sind nach der Stadt Monte Carlo im Fürstentum Monaco benannt. Und dies nicht zu unrecht, beschäftigen sich diese Verfahren doch auch - wie bei den Roulettetischen im berühmten Spielcasino von Monte Carlo - mit Zufallsgrößen. Die Monte-Carlo-Methoden sind nämlich numerische Verfahren, bei denen "zuerst ein einem gegebenen Problem angepaßtes stochastisches Modell aufgestellt wird und dann die entsprechenden Zufallsgrößen mit Hilfe von Zufallszahlen simuliert werden."[1] Was sind nun diese eben zitierten Probleme?

Einmal handelt es sich um Probleme stochastischer Natur. Das sind im Bereich der Wirtschaft z.B. Warteschlangen- und Lagerhaltungsprobleme, aber auch Probleme bei der Bestimmung der Qualität von hergestellten Produkten.

Der zweite Problemkreis sind die Probleme deterministischer Natur, auf die hier besonders eingegangen werden soll. Darunter fallen Berechnungen von bestimmten Integralen, linearen Gleichungssystemen, Randwertprobleme etc.

Die Anwendbarkeit der Monte-Carlo-Verfahren auf die zuletzt genannten, deterministischen Problemstellungen war dabei ein Verdienst von E. Fermi, J. von Neumann, S. Ulam und Metropolis, die um das Jahr 1949 einige Arbeiten auf diesem Gebiet veröffentlichten. Ulam und Metropolis prägten dabei auch den Namen "Monte-Carlo-Verfahren". Und somit gilt das Jahr 1949 als eine Art

offizielles Geburtsjahr des Verfahrens, obwohl die Methode bereits im Zweiten Weltkrieg bei der Entwicklung der Atombombe verwendet wurde. Doch war die Methode zunächst in ihrer Anwendbarkeit beschränkt. Erst die Entwicklung und Verbreitung von elektronischer Datenverarbeitung förderte auch die Verbreitung der Monte-Carlo-Methoden. Denn um solche Verfahren durchführen zu können, um somit "Berechnungen einer sehr großen Anzahl von Einzelfällen und die statistische Verarbeitung eines umfangreichen numerischen Materials"[2] zu ermöglichen, benötigt man einfach die EDV.

Soweit die Geschichte der Monte-Carlo-Methoden im 2o. Jahrhundert. Doch schon im 18. Jahrhundert wurde von dem Franzosen George Louis Leclerc, comte des Buffon (17o7 - 1788) ein Experiment durchgeführt, das stark an die Methoden bei Monte-Carlo-Verfahren erinnert. Das sogenannte Buffon'sche Nadelexperiment soll deshalb im nächsten Abschnitt geschildert werden.

1.2. Der Buffon'sche Nadelversuch[3]

Zwei Gegenstände spielen beim Buffon'schen Nadelversuch eine Hauptrolle: zunächst einmal die Nadel, dann eine Ebene. Die Ebene ist in parallele Streifen geteilt; dies geschieht durch parallele Linien; immer zwei benachbarte Geraden haben dabei denselben Abstand, der mit d benannt sei. Die Nadel selbst habe die Länge l. Dabei sei l kleiner als d. Nun läßt man die Nadel auf die Ebene fallen.

Buffon fragte sich nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Nadel irgendeine dieser Parallelen schneidet. Um die

Frage zu beantworten, sind einige Vorarbeiten notwendig. Folgende Konstruktion wird dazu durchgeführt: Eine zu den Parallelen senkrechte Linie wird gezogen. Weiter sei angenommen, daß die Mitte der Nadel auf dieser Senkrechten liegt. Man konstruiert nun ein Koordinatensystem dergestalt, daß sein Ursprung auf einer Parallelen liegt und daß die Nadelmitte im ersten durch die Parallelen entstandenen Streifen rechts vom Ursprung zu finden ist. Damit kann die Position der Nadel durch zwei Koordinaten bestimmt werden. Die Koordinate x bezeichne den Abstand des Nadelmittelpunktes von der Parallelen, auf der der Ursprung des eben konstruierten Koordinatensystems liegt. Die Koordinate φ gibt den Winkel zwischen der Nadel und den parallelen Linien an (egal, ob die Nadel die Parallelen schneidet oder nicht. Schneidet die Nadel die Geradenschar nicht, so ist φ der Winkel zwischen den Parallelen und der Geraden, auf der die Nadel liegt. Ist die Nadel parallel zur Geradenschar gelgen, so ist $\varphi = 0$ bzw. π.). Es ist somit ein neues Koordinatensystem entstanden, in dem die Nadelposition durch die Koordinaten (x, φ) eindeutig festgelegt ist. Dabei ist: $0 \leq x \leq d$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Der Punkt (x, φ) liegt also dann in einem Rechteck mit den Seitenlängen d und π.

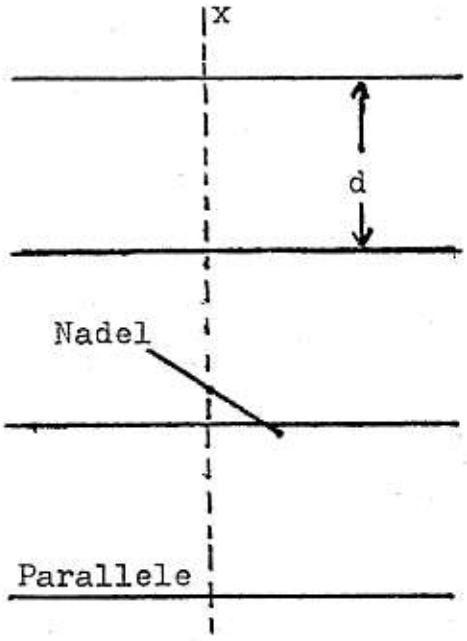


Abb. 1

Welche Beziehung muß nun zwischen x und φ gelten, damit die Na-

del eine Parallele schneidet? Man kann sich zunächst einmal auf die Parallelen beschränken, die den ersten Streifen rechts vom Ursprung des zuerst konstruierten Koordinatensystems begrenzen. Dies sind die Geraden x=o und x=d. Sei nun weiter φ fest; berühre schließlich ein Ende der Nadel die Gerade x=o.(Diese Situation wird in Abbildung 2 gezeigt.) Dann gilt doch: $\sin\varphi = x/(1/2)$. Da man nun nicht annehmen kann, daß das Ende der Nadel die Parallele immer berührt, so muß die Hypotenuse kleiner gleich 1/2 sein. Also: $\sin\varphi \geq x/(1/2)$, und damit wegen $x \geq o$: $o \leq x \leq (1/2)\sin\varphi$.

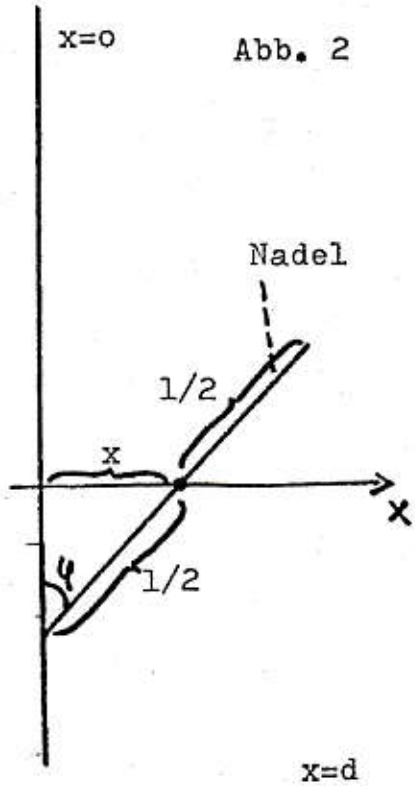


Abb. 2

Analog gilt (siehe auch Abb. 3):

$\sin\varphi \geq (d-x)/(1/2) \geq o$

$d - (1/2)\sin \leq x \leq d$.

Damit schneidet die Nadel genau dann eine Parallele, wenn eine dieser Ungleichungen erfüllt ist. Das heißt aber - bezogen auf das x-φ - Koordinatensystem -: schneidet die Nadel die Gerade x=o, so gilt für die Koordinate(x,φ) der Nadelposition, daß sie links eines Sinusbogens mit der Amplitude 1/2 zwischen o und π liegen muß; schneidet die Nadel die Parallele x=d, so liegt der Punkt (x,φ) rechts einer Sinuskurve gleichen Typs (Abb. 4).

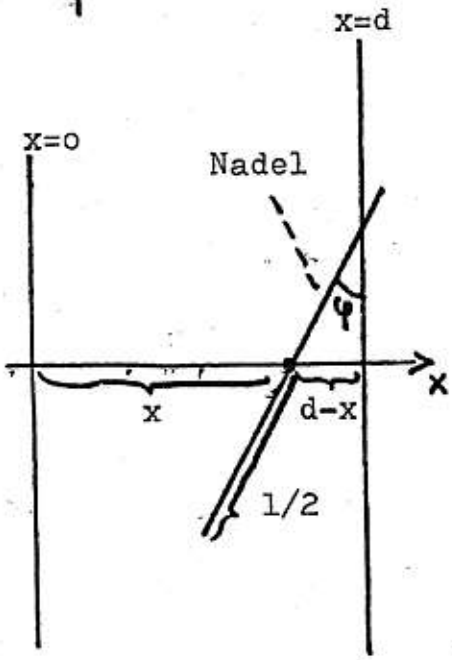


Abb. 3

Die Fläche links bzw. rechts von je ei-

ner dieser Kurven ist in jedem Falle 1 (Integrieren!). Der Flächeninhalt der Punkte, die in Beziehung zum Schneiden der Parallelen durch die Nadel stehen, ist somit 2l, der gesamte Flächeninhalt des Rechtecks $\pi \cdot d$ (siehe Abb. 4). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Nadel schneidet Parallele" - es sei im folgenden mit A benannt - läßt sich also berechnen als $(2l)/(\pi d)$.

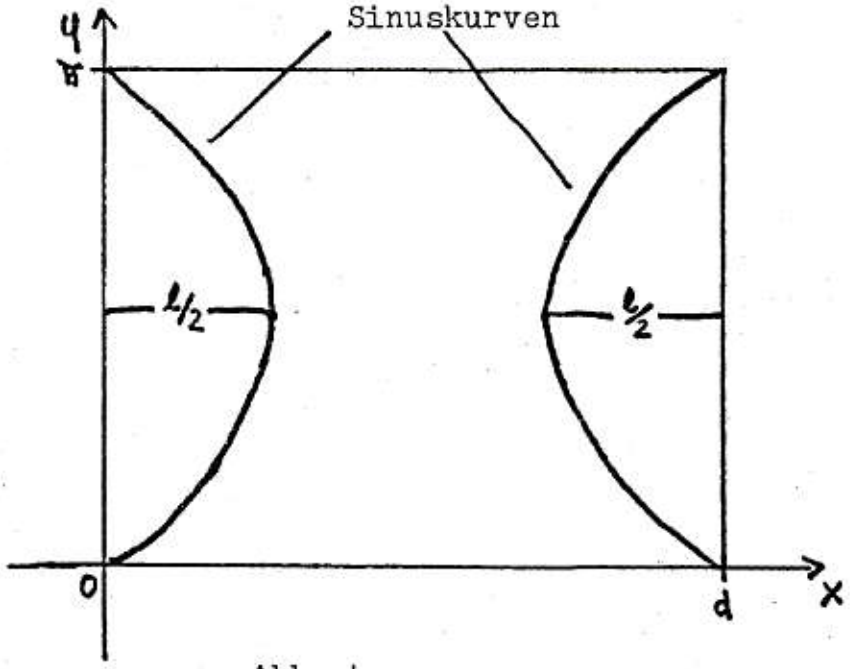


Abb. 4

Man kann nun den Versuch des Nadelwerfens n-mal wiederholen. Setzt man voraus, daß die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A immer dieselbe ist und daß die Versuche vollständig unabhängig voneinander sind, so kann man hier von einen Bernoulli-Experiment reden. Beschreiben nun die Zufallsvariablen Z_i den i-ten Versuch, so definiert man:

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{, falls das Ereignis A nicht eintritt} \\ 1 & \text{, bei Eintreten des Ereignisses A} \end{cases}$$

Die Zufallsvariable Z_i gibt also quasi den Erfolg oder Mißerfolg

des i-ten Versuches an.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ ist nun ebenfalls eine Zufallsvariable, die die Werte o ,1,...n annehmen kann. Sie gibt die Anzahl der Erfolge, die Anzahl des Auftretens des Ereignisses A an, wenn man den Versuch des Nadelwerfens n-mal widerholt.

Konsequenterweise bezeichnet die Zufallsvariable $\frac{1}{n} S_n$ die relative Häufigkeit der Erfolge. Für diese Zufallsvariablen gilt nun nach dem Gesetz der großen Zahlen: $\frac{1}{n} S_n$ strebt mit wachsendem n gegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, gegen $(2l)/(\pi d)$; dies gilt fast sicher.

Mit Hilfe dieser wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen läßt sich nun die Zahl π bestimmen. Man weiß, es gilt für grosses n: $\frac{1}{n} S_n \approx (2l)/(\pi d)$, also: $\pi \approx (2l/d)(\frac{1}{n} S_n)^{-1}$. Setzt man noch vereinfachend d=2l, so gilt unmittelbar: $\pi \approx (\frac{1}{n} S_n)^{-1}$.

Grundvoraussetzung für diese Berechnungen bleibt allerdings die Zufälligkeit des Versuchs. So müssen z.B. die Richtungen, auf die die Nadel nach dem Werfen auf die Fläche weist, gleichwahrscheinlich sein, was wohl nur mit viel Mühe zu realisieren ist. Diese Mühe wird noch übertroffen durch die Ausdauer, die der Experimentator beim andauernden Wiederholen des Nadelwerfens haben muß. Denn erst einige tausend dieser Wiederholungen ergeben einen auf ein paar Stellen genauen Wert der Zahl π.

1.3. Prinzip und Aufbau der Monte - Carlo - Methoden

Das Buffon'sche Nadelexperiment macht schon einiges vom Wesen der Monte-Carlo-Verfahren deutlich. Die eingangs erwähnte Definition dieser Methoden kann nun ausführlicher erläutert werden.

Man kann die Verfahren unter mehreren Aspekten betrachten.
Da ist einmal das stochastische Modell, das adäquat zum betrachteten Problem aufgestellt werden muß. Dies Modell ist i. a. nicht eindeutig zu bestimmen: mochte es beim Buffon'schen Nadelversuch das Wiederholen des Nadelwurfes sein, so wird man im nächsten Abschnitt die Zahl π mittels eines anderen Modells zu ermitteln versuchen.
Doch nicht nur das Modell ist ausschlaggebend bei den Monte-Carlo-Verfahren. Ebenso bedeutend sind hierbei die Zufallszahlen, mit deren Hilfe die Simulation durchgeführt wird.
Zunächst zu den Zufallszahlen!
Ist X eine reelle Zufallsvariable, so heißt jeder Wert x, den X annimmt (realisiert), eine Zufallszahl. "Somit ist eine endliche oder unendliche Folge von Zufallszahlen nichts anderes als eine bezüglich der Zufallsvariablen ausgeführte Stichprobe von endlichem oder unendlichem Umfang."[4] Im Buffonschen Nadelexperiment wurden Zufallszahlen in einem endlichen Umfange durch Wiederholung des Nadelwurfes erzeugt; man muß hier sogar richtiger von erzeugten Zufallspunkten sprechen, da ja aus jedem Wurf die Koordinaten x und φ resultierten ((x, φ) ist eben ein Punkt im x-φ- Koordinatensystem, ein Zufallspunkt).
Man muß nun noch Zufallszahlen von Zufallsvariablen mit verschiedenen Verteilungsfunktionen unterscheiden: es gibt gleichverteilte, Bernoullische und normalverteilte Zufallszahlen beispielsweise, die man als Realisierung einer gleichverteilten, Bernoulli-verteilten und normalverteilten Zufallsvariablen ver-

steht. Da hier besonders gleichverteilte Zufallszahlen von Interesse sind, seien diese kurz definiert.

Def.: a) Eine Zufallsvariable heißt gleichverteilt über dem Intervall $[o,1]$ (dies kann ohne Einschränkung definiert werden), wenn sie eine Dichtefunktion folgenden Typs besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [o,1] \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[o,1]$ sind Realisierungen, der in a) definierten Zufallsvariablen.

Die Zufallspunkte im Buffon'schen Nadelversuch waren gleichverteilt, sieht man einmal von der Kritik an der "Zufälligkeit" des Nadelwurfes ab. Die Erzeugung von Zufallszahlen soll im folgenden sowieso nicht interessieren; es werden hier vielmehr die durch Zufallsgeneratoren erzeugten Zufallszahlen als gegeben vorausgesetzt.

Nun zum Begriff "Simulation"! Allgemein versteht man unter Simulation "eine möglichst wirklichkeitsgetreue Nachbildung eines realen Geschehens. Dabei wird der zugrundeliegende reale Sachverhalt durch ein Modell ersetzt, das man dann experimentell auf seine Eigenschaften hin untersucht."[5] Das Modell ist hier ein mathematisches Problem, die Simulation seine Behandlung mit Hilfe von Zufallsmechanismen.

Was die Monte-Carlo-Methode als numerisches Verfahren anbetrifft, so ist zu sagen, daß sie sich im Hinblick darauf einfach gestaltet. Die Methode zeichnet sich nämlich durch eine

einfache Struktur des Rechenalgorithmus aus. Es wird nur ein Programm zur Realisierung eines Zufallsexperiments benötigt, das dann n-mal wiederholt wird (n natürliche Zahl). Die Versuche müssen voneinander unabhängig sein. Zum Schluß wertet man die Ergebnisse aller Versuche statistisch aus.
So wird der Aufbau der Monte-Carlo-Methoden offenbar: Ein Problem ist gegeben. Es wird ein geeignetes mathematisches Modell aufgestellt, was mittels Wiederholung eines Zufallsexperimentes (man beachte den dazu benötigten Rechenalgorithmus) behandelt wird (Simulation).
Soweit die Einleitung. Die nächsten Abschnitte beschäftigen sich mit speziellen Monte-Carlo-Methoden.

2. DIE METHODE "HIT - OR - MISS"

2.1. Allgemeines zum hit-or-miss - Verfahren[6]

Sei f eine reellwertige Funktion $f:[o,1] \longrightarrow [o,1]$. Weiter sei g eine Funktion mit $g:[o,1] \times [o,1] \longrightarrow [o,1]$ derart, daß gilt:

$$g(x,y) = \begin{Bmatrix} o & \text{für } f(x) < y \\ 1 & \text{für } f(x) \geq y \end{Bmatrix}.$$

Dann läßt sich f(x) darstellen als:

$$f(x) = \int_o^1 g(x,y)dy \quad .$$

Ziel des hit-or-miss - Verfahrens ist es nun mittels des im Abschnitt 1.3. beschriebenen Mechanismus der Monte-Carlo-Methoden folgendes Integral zu berechnen:

$$\Theta = \int_o^1 f(x)\, dx = \int_o^1 \int_o^1 g(x,y)dxdy \; .$$

Dazu werden n Zufallspunkte im Einheitsquadrat $[o,1] \times [o,1]$ erzeugt. Und zwar sind alle dazu benötigten 2n Zufallszahlen Realisierungen einer gleichverteilten Zufallsvariablen. Seien also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ diese Zufallszahlen, (α_1, α_2), $(\alpha_3, \alpha_4), \ldots$ $(\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}), \ldots$ $(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ die zweidimensionalen Zufallspunkte im Einheitsquadrat.

Die n-malige Wiederholung eines Zufallsexperiments ergibt sich aus der Anwendung der Funktion g auf die Zufallspunkte. Wie die Zufallsvariable Z_i im Buffon'schen Nadelversuch, so ordnet g dem Zufallspunkt $(\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i})$ die reelle Zahl $g(\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}) \in \{o,1\}$ zu, je nachdem ob der Zufallspunkt unterhalb oder oberhalb der Kurve f(x) liegt, also ob gilt: $f(\alpha_{2i-1}) \geq \alpha_{2i}$ oder: $f(\alpha_{2i-1}) < \alpha_{2i}$ (Abb. 5).

Entsprechend ist $n^* := \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i})$ die Häufigkeit der Zufallspunkte, die unterhalb der Kurve liegen, die Häufigkeit der "hits" (Treffer) gegenüber den "misses" (daher der Name des Verfahrens). n^*/n ist dann die relative Häufigkeit der Treffer bei der n-maligen Wiederholung des zugrundeliegenden Zufallsexperiments.

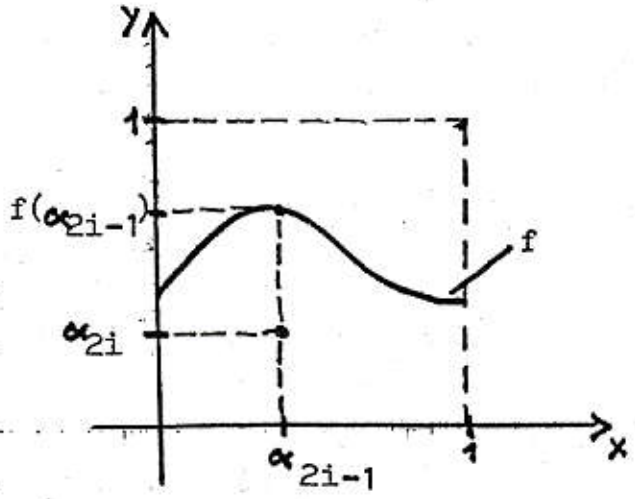


Abb. 5

Da es sich hierbei um ein Bernoulli-Experiment handelt, läßt sich das Gesetz der großen Zahlen anwenden. Es gilt somit:

$$n^*/n \longrightarrow \Theta \quad (n \to \infty).$$

Θ, als Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)dx$, ist dabei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallspunkt unterhalb der Kurve f(x) erzeugt wurde, errechnet sich doch Θ als Quotient der Fläche unter der Kurve (das Integral) und dem Flächeninhalt des Einheitsquadrates (dieser ist gleich 1) (Θ als Wahrscheinlichkeit aufgefaßt).

Das Gesetz der großen Zahlen nun weist darauf hin, daß man für große n das Integral Θ gut schätzen kann. Auf die Güte der Monte-Carlo-Methoden wird übrigens später noch eingegangen. Zuvor ein Beispiel zur hit-or-miss - Methode!

2.2. Eine Anwendung der Methode "Hit-or-Miss": Die Bestimmung der Zahl $\pi/4$

Wie bekannt, ist der Flächeninhalt des Einheitskreises π. Die Funktion $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ beschreibt dann einen Viertelkreis-Bogen des Einheitskreises im Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$. Demgemäß errechnet sich die Fläche unterhalb des Funktionsgraphen von f(x) als Flächeninhalt des Einheitskreises geteilt durch 4, also als $\pi/4$.

Damit ist eine Situation gegeben, die die Anwendung der hit-or-miss - Methode möglich macht. Es kann also

$$\Theta = \int_0^1 f(x)dx = \pi/4$$

berechnet werden.

Als Funktion g ergibt sich: $g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$.

Die Berechnung liefert dann für n, n^* und die Näherung von $\pi/4$ (also: n^*/n) folgende Tabelle:

$\pi/4 = 0.785398$

n	n^*	n^*/n	$\lvert n^*/n - \pi/4 \rvert$
50	37	0.74	0.045398
100	78	0.78	0.005398
150	115	0.766667	0.018731
200	160	0.8	0.014602
250	201	0.804	0.018602
500	397	0.794	0.008602
750	598	0.797333	0.011935
1000	791	0.791	0.005602

n	n^*	n^*/n	$\lvert n^*/n - \pi/4 \rvert$
1250	982	0.7856	0.000202
1500	1182	0.788	0.002602
1750	1371	0.783428	0.00197
2000	1569	0.7845	0.000898
2500	1957	0.7828	0.002598
3000	2341	0.780333	0.005065
3500	2748	0.785142	0.000256
4000	3148	0.787	0.001602
4500	3542	0.787111	0.001713
5000	3934	0.7868	0.001402
5500	4329	0.787091	0.001693
6000	4738	0.789667	0.004269

Tab. 1

Die Analyse der Daten in Tabelle 1 soll erst später, beim Vergleich der hit-or-miss - Methode mit der noch vorzustellenden crude - Methode, geschehen.

3. DIE METHODE "CRUDE MONTE CARLO"

3.1. Allgemeine Beschreibung der Methode[7]

Es sei f wieder eine reellwertige Funktion von $[0,1]$ nach $[0,1]$. Ziel ist es - analog zum hit-or-miss - Verfahren - das Integral

$$\Theta = \int_0^1 f(x)dx$$

zu berechnen. Dies geschieht beim crude Monte Carlo allerdings mit Hilfe von n Zufallszahlen, die zur n-maligen Wiederholung eines Zufallsexperimentes benötigt werden. Die n Zufallszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ seien dabei gleichverteilt im Einheitsintervall. Bildet man nun die Werte

$$f_i := f(\alpha_i) \qquad (i=1,\ldots n) \quad ,$$

so gilt:

$$\bar{f} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \quad ,$$

das arithmetische Mittel der f_i ist eine "erwartungstreue (unverfälschte Schätzung"[8] für das Integral Θ.

(Sei X nämlich eine stetige Zufallsvariable auf dem Einheitsintervall. f_i seien Realisierungen von X (i=1,... n). Dann kann man X als die vorgegebene Funktion f identifizieren, und der Erwartungswert von X ist:

$$E(X) = \Theta \ .$$

Dann läßt sich E(X) nach Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie durch $\bar{f}$ schätzen.)

Mit Hilfe der crude-Methode soll nun ebenfalls die Zahl $\pi/4$ bestimmt werden.

3.2. Ermittlung der Zahl $\pi/4$ durch die crude - Methode

Sei f wieder die Funktion in 2.2., also:

$$f: \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto 1 - x^2 \end{array} \right\} .$$

Es ergeben sich nun bei gewissen n für f folgende Werte:

n	$\sum f_i$	$\bar{f}$	$\lvert \bar{f} - \pi/4 \rvert$
50	37.859397	0.757187	0.028211
100	77.838901	0.778389	0.007009
150	118.399886	0.789332	0.003934
200	158.801902	0.794009	0.008611
250	197.943730	0.791774	0.006376
500	400.953330	0.801906	0.016508
750	593.948164	0.791931	0.006533
1000	786.260281	0.786260	0.000862
1250	984.904944	0.787923	0.002525
1500	1183.062224	0.788708	0.00331
1750	1381.904234	0.789659	0.004261
2000	1576.823818	0.788412	0.003014
2500	1962.050035	0.784820	0.000578
3000	2361.936927	0.787312	0.001914
3500	2751.668521	0.786191	0.000793
4000	3147.184372	0.786796	0.001398
4500	3537.571965	0.786127	0.000729
5000	3926.630503	0.785326	0.000072
5500	4321.614742	0.785748	0.00035

n	$\sum f_i$	$\bar{f}$	$\lvert\bar{f} - \pi/4\rvert$
6000	4710.18643	0.785031	0.000367

Tabelle 2

Auch die Analyse dieser Ergebnisse soll im nächsten Kapitel erfolgen.

4. BETRACHTUNGEN ZUR GÜTE DER VERFAHREN "HIT - OR - MISS" UND "CRUDE MONTE CARLO"

4.1. Die Güte der hit-or-miss - Methode [9]

Zur Erinnerung: Jedem Zufallsexperiment, das bei der hit-or-miss - Methode auftrat, konnte eine Zufallsvariable Z_i mit Realisierungen o und 1 (miss oder hit) zugeschrieben werden. Die Zufallsvariable $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ (siehe auch 1.2.) ist dann binomial verteilt mit den Parametern n (Anzahl der Wiederholungen eines Zufallsversuchs) und Θ (als Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Treffers). Demgemäß ergibt sich als Varianz für diese Zufallsvariable: $\sigma^2 = \Theta(1 - \Theta)/n$, und damit die Standardabweichung als Maß des Fehlers beim Ergebnis des Monte-Carlo-Verfahrens nach n Wiederholungen eines Zufallsexperiments:

$$\sigma = \sqrt{\Theta(1 - \Theta)/n} \quad .$$

Mit anderen Worten: Der Fehler, der bei der Simulation durch die hit-or-miss - Methode auftritt, ist proportional zu $n^{-1/2}$. Möchte man ihn z.B. auf ein Zehntel verkleinern, so muß man einhundertmal mehr Zufallsversuche durchführen. Und dann ist noch nicht sicher, ob dieser Fehler nicht doch überschritten wird, liegt doch die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler kleiner als eine vorgegebene Zahl ist, nur nahe bei 1.

Und noch eine Schwierigkeit! Die Formel für den Fehler berücksichtigt den exakten Wert von Θ ; dieser ist aber in den meisten Anwendungen der Monte-Carlo-Methoden unbekannt. Eine Formel zur näherungsweisen Berechnung der Varianz, also auch des Feh-

lers, ohne Berücksichtigung von θ wird in 4.2. angegeben.

4.2. Die Güte der Methode "Crude Monte Carlo" [10]

In 3.1. wurde die Funktion f mit einer Zufallsvariablen identifiziert. Demgemäß gilt für die Varianz dieser Zufallsvariablen, die ja den Erwartungswert θ hat: $\sigma^2 = \int_0^1 (f(x) - \theta)^2 \, dx$.

Dann gilt für die Varianz von f:

$$\sigma_{\bar{f}}^2 = \sigma^2/n = \frac{1}{n} \int_0^1 (f(x) - \theta)^2 \, dx$$

und für die Standardabweichung: $\sigma_{\bar{f}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Doch auch hier wird zur Berechnung des Fehlers der wahre Wert von θ benutzt. Um dies nun zu vermeiden, kann man in der Praxis die Varianz der zugrundeliegenden Zufallsvariable f mit der Formel:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (f_i - \bar{f})^2$$

schätzen.

4.3. Vergleich beider Verfahren. Analyse der Ergebnisse bei der Bestimmmung der Zahl $\pi/4$

Ein Maß für die Güte eines Verfahrens ist die Varianz. Je besser das Verfahren, desto kleiner ist auch seine Varianz. Dies gilt zuwenigstens bei den hier vorgestellten zwei Methoden (Es gibt noch andere Faktoren, die die Güte bestimmen; doch soll auf diese hier nicht eingegangen werden).

Wie erwähnt, gilt: $\sigma_{h-o-m}^2 = \theta(1-\theta)/n$ für die hit-or-miss - Methode, und : $\sigma_c^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 (f(x) - \theta)^2 \, dx$ für die crude -

Methode. Dabei gilt noch: $\sigma_c^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 f^2 dx - \theta^2/n$.

Damit ergibt sich:

$$\sigma^2_{h-o-m} - \sigma_c^2 = (\theta - \theta^2)/n - \frac{1}{n}\int_0^1 f^2 dx + \theta^2/n$$

$$= \theta/n - \frac{1}{n}\int_0^1 f^2 dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f dx - \frac{1}{n}\int_0^1 f^2 dx =$$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 (f - f^2) dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(1-f) dx \geq 0 \text{ , da mit } f: [0,1] \to [0,1]$$

auch die Funktion $1-f$ im Einheitsquadrat liegt, also auch positiv ist.

Dadurch hat aber das hit-or-miss - Verfahren die größere Varianz, ist somit weniger effizient als die crude - Methode.

Dies zeigt sich auch an den Werten in Tabelle 1 und 2. Im 5000. Schritt ist die Zahl $\pi/4$ durch die crude-Methode bis zur dritten Stelle hinter dem Komma bestimmt (0,785...). Die hit-or-miss - Methode liefert einen nur auf zwei Stellen hinter dem Komma genauen Wert. Für die Varianz und Standardabweichnung der zwei Verfahren beim 5000. Schritt gilt:

	hit-or-miss	crude
Varianz	$(\pi/4(1-\pi/4))/5000 =$ 0.00003371	$(1/5000)(\int_0^1 (1-x^2)dx - \pi^2/16) =$ 0.000009963
Standardabweichung	0.005806	0.003156466

Tab. 3

Die Standardabweichungen passen dabei gut zu den exakten Fehlern 0.001402 (bei hit-or-miss) bzw. 0.000072 (bei crude).

Daß die exakten Fehler weit unter den Standardabweichungen liegen, ist aber Zufall, da z.B. der 6000. Schritt der hit-or-miss -

Methode einen Fehler von o.004269 aufweist, während sich die Varianz als o.oooo281 und die Standardabweichung als o.oo53 berechnet. Hier liegen also wirklicher Fehler und Standardabweichung näher beieinander.

Man sieht aber, daß die "praktischen" Ergebnisse der Monte-Carlo-Methoden mit der Theorie übereinstimmen.

5. VARIANZREDUZIERENDE METHODEN [11]

Die Genauigkeit der Monte-Carlo-Methoden ist von der Ordnung $n^{-1/2}$. Will man die Genauigkeit erhöhen, so kann man also die Zahl n erhöhen. Doch ist dies im allgemeinen mit Schwierigkeiten (Rechenaufwand!) verbunden, da man n ja verhundertfachen muß, um die Genauigkeit zu verzehnfachen. Mittels Vergrößerung von n wurde also die Varianz verkleinert. Und wie Abschnitt 4.3. zeigte, ist eine Monte-Carlo-Methode effizienter, wenn die Varianz kleiner ist.

Es gibt nun neben der Vergrößerung von n andere Verfahren zur Reduzierung der Varianz, ohne daß n erhöht zu werden braucht. Folgende Überlegung sei zunächst durchgeführt:

. Betrachte die crude-Methode! Dort ließ sich f als Zufallsvariable beschreiben, die den Erwartungswert θ hat. Nun kann man andere Funktionen, Zufallsvariablen finden, die denselben Erwartungswert haben, jedoch eine kleinere Varianz besitzen. Die Methoden, solche Funktionen zu finden, sind dann:

1. Das Verfahren der wesentlichen Stichprobe. Es sei die Situation in 3.1. gegeben (crude-Methode). Sei weiter X eine Zufallsvariable mit positiver Dichtefunktion auf dem Einheitsintervall. Dann läßt sich θ darstellen als:

$$\theta = \int_0^1 (f(x)/g(x))\, g(x)\, dx \quad \text{mit g als Dichtefunktion.}$$

Dann hat die Zufallsvariable $Z = f(X)/g(X)$ auch den Erwartungswert θ. $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(\alpha_i)/g(\alpha_i))$ (α_i Zufallszahlen) schätzt θ.

Weiter gilt:

$$\sigma^2_{\bar{z}} = \frac{1}{n} \int_0^1 (f^2/g)dx - \theta^2/n \quad .$$

Würde man nun $g = (1/\theta)f$ wählen, so wäre $\sigma^2_{\bar{z}} = o$. Da man dies aus verständlichen Gründen nicht wählen kann, versucht man:

$f/g \approx$ const. anzunähern (konstant kann f/g nicht werden). Damit ist gewährleistet, daß $\sigma^2_{\bar{f}} \geq \sigma^2_{\bar{z}}$ ist.

2. Das Control-Variate-Verfahren. Wieder seien die Voraussetzungen wie in 3.1. gegeben. Es sei $h: [o,1] \rightarrow [o,1]$ eine Funktion, die f approximiert und deren Integral:

$$\theta_h = \int_0^1 h(x)dx \qquad \text{bekannt ist.}$$

Dann gilt doch:

$$\theta = \int_0^1 (f-h)dx + \int_0^1 hdx = \int_0^1 (f-h)dx + \theta_h \quad .$$

Man identifiziere f-h+h als Zufallsvariable mit Erwartungswert θ und seinem Schätzer: $\overline{f-h+h} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(f(\alpha_i)-h(\alpha_i))) + \theta_h$.

Die Varianz:

$$\sigma^2_{\overline{f-h+h}} = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 (f-h)^2dx - (\theta - \theta_h)^2\right)$$ ist dann umso kleiner, je besser f durch h approximiert wird.

3. Die Methode der geschichteten Stichprobe. Vorausgesetzt sei

3.1. Durch eine geeignete Zerlegung wird das Intervall $[o,1]$ so unterteilt, daß f in den Teilintervallen nur gering variiert. Die Teilintervalle $[a_j, a_{j+1}]$ mit ihren Intervallängen $a_{j+1} - a_j$ bekommen Werte n_j - proportional zu den Intervalllängen - zugewiesen. (j=1,... m entsprechend der Zerlegung). Als Schätzer erhält man:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{m}((a_{j+1}-a_j)/n_j) \sum_{i=1}^{n_j} f(\alpha_i^{(j)}) .$$

Durch die Proportionalität der n_j zu den Intervallängen wird i.a. erreicht, daß dann die Varianz verkleinert wird.

Soweit die varianzreduzierenden Verfahren!

ANMERKUNGEN

1) Hengartner,Theodoresu, Einführung in die Monte-Carlo-Methode, München 1978, S. 11

2) ebenda, S. 17

3) A. Rényi,Probability Theory, Amsterdam-London 197o, S.68 f.

4) Hengartner, Theodorescu, S. 23

5) K. Neumann, Operations Research Verfahren Bd. II, S. 282

6) Hammersley, Handcomb, Monte Carlo Methods, S. 53 f.

7) ebenda, S. 51 f.

8) N. Schmitz, F. Lehmann, Monte-Carlo-Methoden I, Meisenheim 1976, S. 3

9) Hammersley, Handcomb, S. 54

1o) ebenda, S. 51 f.

11) Hengartner, Theodorescu, S. 56 ff. sowie:
Hammersley, Handcomb, S. 55 - 6o

LITERATUR

1. K. Bosch, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Reinbek b. Hamburg 1976

2. H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Berlin 1974[2]

3. J.M.Hammersley, D.C.Handcomb, Monte Carlo Methods, Norwich 1967[3]

4. W. Hengartner, R. Theodorescu, Einführung in die Monte-Car-

lo-Methode, München 1978

5. J.Kohlas, Monte Carlo Simulation im Operations Research, Berlin-Heidelberg-New York 1972

6. S. Krüger, Simulation, Berlin-New York 1975

7. K. Neumann, Operations Research Verfahren, Bd. II, München-Wien 1977

8. A. Rényi, Probability Theory, Amsterdam-London 197o

9. N. Schmitz, F. Lehmann, Monte-Carlo-Methoden I, Meisenheim 1976

1o. I.M. Sobol, Die Monte-Carlo-Methode, Berlin 1974

Handout

MONTE - CARLO - VERFAHREN

1. Einleitung

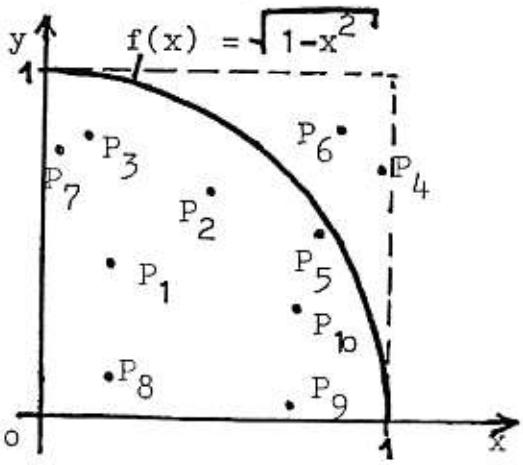
1.1. Definition der Monte-Carlo-Verfahren: Monte-Carlo-Methoden sind numerische Verfahren, bei denen zuerst ein einem gegebenen Problem angepaßtes stochastisches Modell aufgestellt wird und dann die entsprecheneden Zufallsgrößen mit Hilfe von Zufallszahlen simuliert werden.

1.2. Der Buffon'sche Nadelversuch. Ein Versuch aus dem 18. Jahrhundert, um die Zahl π zu bestimmen. Dabei wird eine Nadel auf eine mit parallelen Linien versehene Fläche geworfen. Nach dem Wurf wird festgestellt, ob die Nadel die Parallelen schneidet oder nicht. Das Ereignis "Nadel schneidet Parallele" tritt dann gegenüber der Gesamtanzahl der Versuchswiederholungen im Verhältnis $1/\pi$ auf.

2. Die Methode "Hit-or-Miss"

2.1. Ziel dieser Methode soll hier sein, ein bestimmtes Integral einer Funktion f über dem Einheitsintervall $[o,1]$ zu bestimmen. Dabei sei der Wertebereich von f ebenfalls $[o,1]$. Man erzeugt nun gleichverteilte Zufallszahlen in $[o,1]$, von denen je zwei zu Zufallspunkten im Einheitsquadrat zusammengefaßt werden. Für jeden dieser Zufallspunkte wird bestimmt, ob er unter der Kurve von f (Treffer=hit) oder oberhalb (miss) liegt. Bei einer Erzeugung von n Zufallspunkten gibt dann das Verhältnis von Anzahl der Treffer n und Gesamtanzahl n eine Schätzung für den Wert des Integrals der Funktion f. Diese Schätzung ist nach dem Gesetz der großen Zahlen umso besser, je größer n ist.

2.2. Beispiel: Berechnung der Zahl $\pi/4$. Das Integral der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ entspricht der Fläche des Einheitskreises, ist also $\pi/4$. Nebenstehende Zeichnung weist 1o Zufallspunkte auf; acht davon liegen unter der Kurve von f. Als Näherung ergibt sich also $8/1o = o,8$, während $\pi/4 = o,78539$ ist.



3. Die Methode "Crude Monte Carlo"

3.1. f sei wieder eine Funktion mit Definitions- und Wertebereich $[o,1]$. Das Integral dieser Funktion läßt sich dann mit n Zufallszahlen und deren f(x)-Werte f_i (i=1,... n) schätzen, und zwar durch das arithmetische Mittel der f_i:

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \quad .$$

3.2. Die Zahl $\pi/4$ kann durch die Crude-Methode besser bestimmt werden als durch das Hit-or-Miss-Verfahren in 2.2.

4. Die Güte der Verfahren "Hit-or-Miss" und "Crude Monte Carlo"

4.1. Güte der hit-or-miss-Methode. Ist Θ der Wert des zu berechnenden Integrals, so errechnet sich die Standardabweichung, der Fehler des Verfahrens aus: $\sigma = \sqrt{\Theta(1-\Theta)/n}$.

4.2. Güte der Crude-Methode. Hier gilt für den Fehler:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \int_o^1 (f(x)-\Theta)^2 dx} \quad .$$

Beiden Verfahren ist gemeinsam, daß der Fehler proportional zu $1/\sqrt{n}$ ist.

Text aus: Referat, Hauptseminar „Betriebsinformatik/Operations Research" (Prof. Dr. A. SCHÖNLEIN, Universität Essen, Fachbereich 5: Wirtschaftswissenschaften, WS 1980/81)