Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Abstand Punkt-Ebene

Einleitung

Innerhalb des dreidimensionalen reellen kartesischen x_1-x_2-x_3-Vektorraums haben Punkte die Form $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$, Ebenen (u.a.) die Koordinatenform E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Zwischen Punkten P und Ebenen E lassen sich dann mit Punktprobe, relativer Lage sowie Abstandsformel Lagebeziehungen und Lotgeraden-/Lotfußpunktverfahren herleiten.

Punktprobe

Ein Punkt P liegt auf der Ebene E, wenn nach Einsetzen der Punktkoordinaten p_1, p_2, p_3 in die linke Seite der Ebenengleichung: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ die Identität:

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$$

gilt. Der Punkt P liegt nicht auf der Ebene, wenn die Beziehung:

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 \neq d$$

erfüllt ist. Es gilt also für Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = d \Rightarrow P \in E$$
$$ap_1 + bp_2 + cp_3 \neq d \Rightarrow P \notin E.$$

Relative Lage

Für Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ermöglicht ein Vergleich zwischen den Zahlen $ap_1 + bp_2 + cp_3$, $aq_1 + bq_2 + cq_3$ und d, die relative Lage der Punkte zur Ebene festzustellen. Eine Ebene E teilt den dreidimensionalen Vektorraum in zwei Teile; Punkte liegen daher auf der gleichen Seite oder auf verschiedenen Seiten der Ebene („oberhalb" und/oder „unterhalb der Ebene"), näher oder weiter entfernt von der Ebene. Es gelten daher die folgenden Übersichten:

Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$		Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$	
		$ap_1 + bp_2 + cp_3 > d$	$ap_1 + bp_2 + cp_3 < d$
Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$	$aq_1 + bq_2 + cq_3 > d$	Punkte P, Q auf der gleichen Seite der Ebene E („oberhalb der Ebene")	Punkte P, Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E
	$aq_1 + bq_2 + cq_3 < d$	Punkte P, Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E	Punkte P, Q auf der gleichen Seite der Ebene E („unterhalb der Ebene")

Punkte auf der gleichen/auf verschiedenen Seiten einer Ebene

Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$, Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$		
$ap_1 + bp_2 + cp_3 > aq_1 + bq_2 + cq_3 > d$ $ap_1 + bp_2 + cp_3 < aq_1 + bq_2 + cq_3 < d$	Punkte P, Q auf der gleichen Seite der Ebene E	Punkt P weiter von der Ebene E entfernt als Punkt Q
$aq_1 + bq_2 + cq_3 > ap_1 + bp_2 + cp_3 > d$ $aq_1 + bq_2 + cq_3 < ap_1 + bp_2 + cp_3 < d$	Punkte P, Q auf der gleichen Seite der Ebene E	Punkt Q weiter von der Ebene E entfernt als Punkt P
$\lvert ap_1 + bp_2 + cp_3 - d\rvert > \lvert aq_1 + bq_2 + cq_3 - d\rvert$	Punkte P, Q auf der gleichen Seite/auf verschiedenen Seiten der Ebene E	Punkt P weiter von der Ebene E entfernt als Punkt Q
$\lvert ap_1 + bp_2 + cp_3 - d\rvert > \lvert aq_1 + bq_2 + cq_3 - d\rvert$	Punkte P, Q auf der gleichen Seite/auf verschiedenen Seiten der Ebene E	Punkt Q weiter von der Ebene E entfernt als Punkt P

Relative Lage von Punkten zur Ebene

Abstandsformel

Die Überlegungen zur relativen Lage von Punkten zur Ebene münden ein in die Abstandsformel, wonach sich der Abstand d(P,E) zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ letztlich auf der Differenz $ap_1 + bp_2 + cp_3 - d$ gründet, deren Betrag $|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|$ und dessen Normierung durch den Betrag des Normalenvektors der Ebene $\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Es gilt damit die (den absoluten Abstand in Längeneinheiten [LE] messende) Abstandsformel:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Eine weitere Herleitung der Abstandsformel beruht auf der Koordinatengleichung der Ebene und deren Division durch den Betrag des Normalenvektors:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ | -d

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$ | : $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$ (Hessesche Normalform der Ebenengleichung).

Einsetzen des Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ in die Hessesche Normalform bei Betragssetzung führt wieder auf die Abstandsformel:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Lotgeraden-/Lotfußpunktverfahren (Hilfsgeradenverfahren)

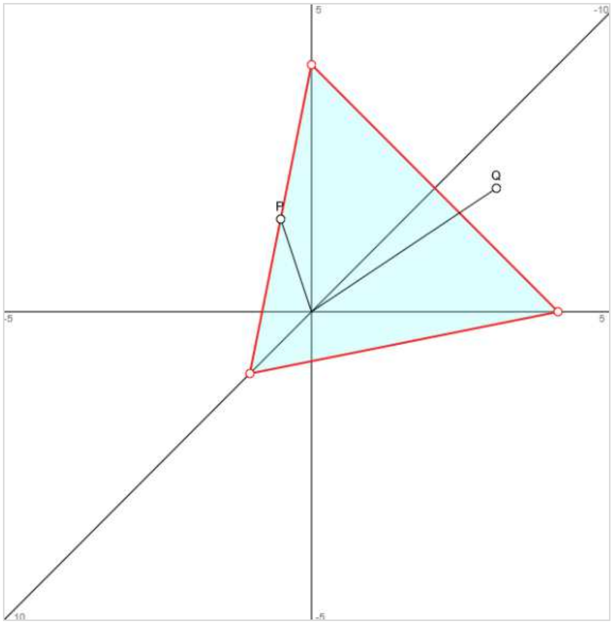
Die Abstandsbestimmung zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ kann auch erfolgen über die Bestimmung des Lotfußpunktes F als Ebenenpunkt, der durch Fällen des Lotes vom Punkt P auf die Ebene E entsteht. Der Differenzvektor $\vec{PF}$ steht somit senkrecht auf der Ebene und ist parallel zum Normalenvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Der Lotfußpunkt F ergibt sich als Schnittpunkt der zum Normalenvektor parallelen Lotgeraden h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E. Ist $F(f_1|f_2|f_3)$ der so ermittelte Lotfußpunkt, so errechnet sich der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E als Betrag des Differenzvektors $\vec{PF}$:

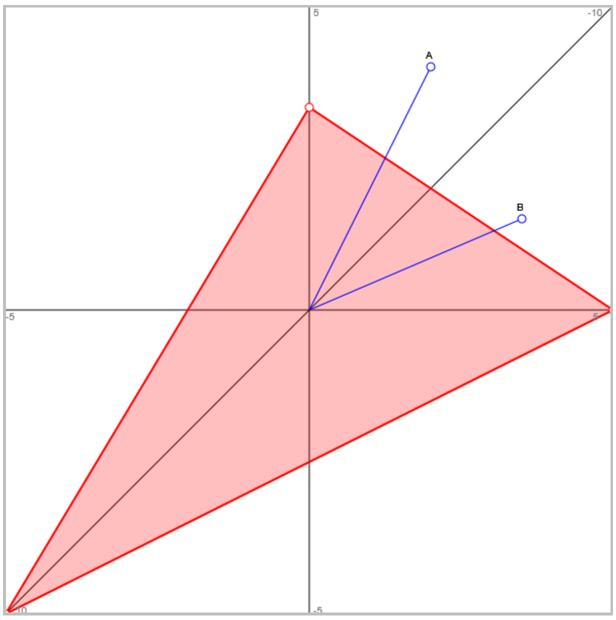
$$d(P,E) = |\vec{PF}| = \left|\begin{pmatrix} f_1 - p_1 \\ f_2 - p_2 \\ f_3 - p_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(f_1-p_1)^2 + (f_2-p_2)^2 + (f_3-p_3)^2}\ .$$

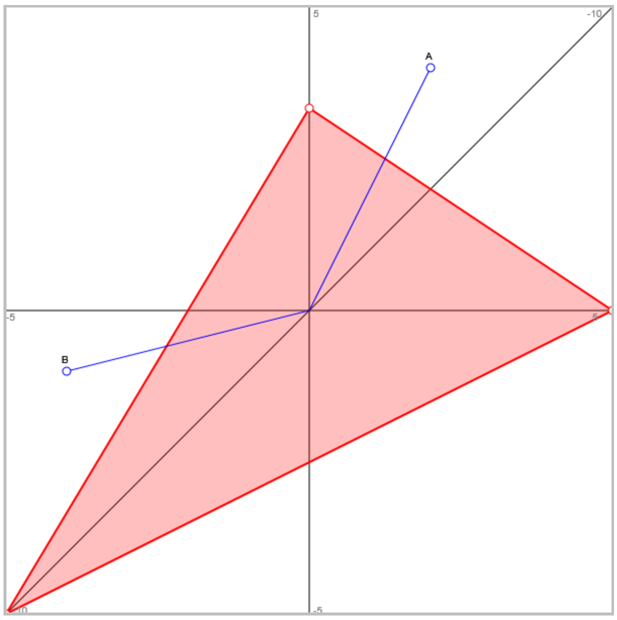
Beispiele:

a) Der Punkt P(1|0|2) liegt auf der Ebene E: $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (Punktprobe: $2\cdot1+0+2 = 4$; $P\in E$), der Punkt Q(2|4|3) nicht (Punktprobe: $2\cdot2+4+3 = 11 \neq 4$; $Q\notin E$).



b) Gegeben ist die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$. I. Die Punkte A(2|3|5) und B(1|4|2) liegen auf der gleichen Seite der Ebene E (A: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot5 = 23 > 10$; B: $1\cdot1+2\cdot4+3\cdot2 = 15 > 10$), der Punkt A befindet sich von der Ebene E weiter entfernt als der Punkt B (A, B: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot5 = 23 > 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot2 = 15$). II. Die Punkte A(2|3|5) und B(2|-3|0) liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene E (A: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot5 = 23 > 10$; B: $1\cdot2+2\cdot(-3)+3\cdot0 = -4 < 10$), der Punkt B befindet sich von der Ebene E weiter entfernt als der Punkt A (A, B: $|1\cdot2+2\cdot3+3\cdot5 - 10| = |23-10| = 13 < |1\cdot2+2\cdot(-3)+3\cdot0 - 10| = |-4-10| = |-14| = 14$).





c) Der Abstand des Punktes P(-2|6|2) zur Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$ ermittelt sich mit der Abstandsformel als:

$$d(P,E) = \frac{|1\cdot(-2)+2\cdot6+2\cdot2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|14-8|}{\sqrt{9}} = \frac{|6|}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (LE)}.$$

d) Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 + 4x_2 = 12$ und der Punkt P(7|4|4). Wir ermitteln im Folgenden den Lotfußpunkt F auf der Ebene, deren Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ beträgt. Dazu bilden wir die zur Ebene senkrechte Lotgerade h durch den Punkt P und erhalten:

h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von Lotgerade und Ebene ist der Lotfußpunkt F, der wie folgt errechnet wird:
Lotgerade h -> $x_1 = 7+3t$, $x_2 = 4+4t$, $x_3 = 4$ -> Ebene E -> Gleichung $3(7+3t) + 4(4+4t) = 12$ ->
Umformungen: $3(7+3t) + 4(4+4t) = 12 \Leftrightarrow 21+9t+16+16t = 12 \Leftrightarrow 25t+37 = 12 \Leftrightarrow 25t = -25 \Leftrightarrow t = -1$

-> Einsetzen in Geradengleichung: $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ -> Lotfußpunkt F(4|0|4).

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist dann:

d(P,E) = $|\vec{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$ (LE).