Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Ebenenabstände und Ebenenkonstruktionen

Einleitung

Im dreidimensionalen Vektorraum lassen sich zweidimensionale Ebenen darstellen vermöge der Parameterform E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v_1} + s\vec{v_2}$ mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und den Spannvektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ sowie vermöge der Koordinatenform E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen Zahlen a, b, c, d; der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Ebene, für jeden Ebenenpunkt $P(p_1|p_2|p_3)$ gilt als Stützvektor der Ebene die Identität: $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$. Für einen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ auch außerhalb der Ebene folgt die letztlich aus der Koordinatenform resultierende Hessesche Normalform als Maß des Abstands zwischen Punkt und Ebene (Abstandsformel):

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sind mit E und F zwei zueinander parallele Ebenen gegeben, so lassen sich diese in Koordinatenform mit demselben Normalenvektor darstellen als: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = h$, so dass sich aus der Hesseschen Normalform die Abstandsformel für parallele Ebenen ergibt:

$$d(E, F) = \frac{|h-d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|h-d|}{|\vec{n}|}.$$

Schneiden sich zwei (somit nicht parallele) Ebenen E und F mit E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ in einer Schnittgeraden g, so ergibt sich der Schnittwinkel φ vermöge:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_E} \cdot \vec{n_F}|}{|\vec{n_E}||\vec{n_F}|}$$

mit $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ als Normalenvektoren. Der Nebenwinkel des Schnittwinkels ist:

$$\varphi_1 = 180° - \varphi.$$

Parallele Ebenen

Zu einer Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ lassen sich zwei parallele Ebenen F_1 und F_2 konstruieren, die zur Ebene E einen vorgegebenen Abstand D>0 besitzen. Alle drei Ebenen besitzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit denselben Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, so dass unter Berücksichtigung der Hesseschen Normalform für die parallelen Ebenen gilt:

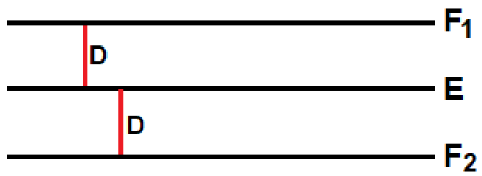
$$F_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + D\left|\vec{n}\right| = d + D\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$F_2: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - D\left|\vec{n}\right| = d - D\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.$$

In der Tat gilt dann gemäß der Abstandsformel für parallele Ebenen:

$$d(E,F_1) = d(E,F_2) = \frac{|d \pm D\sqrt{a^2+b^2+c^2} - d|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{|\pm D\sqrt{a^2+b^2+c^2}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{D\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = D.$$



Wir fügen dazu das folgende <u>Beispiel</u> an: Zur Ebene E: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$ lauten wegen dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und dessen Betrag $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ die Ebenen mit Abstand D = 6:

F_1: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 + 6\cdot 3 = 8 + 18 = 24$
F_2: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 - 6\cdot 3 = 8 - 18 = -10$.

<u>Mittelparallele Ebenen</u>

Umgekehrt lässt sich die Ebene E des vorigen Abschnitts auffassen als Mittelebene zwischen den parallelen, im Abstand D zu E liegenden Ebenen F_1 und F_2. Sind allgemein zwei Ebenen E und F zueinander parallel und besitzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit denselben Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, sind sie von der Form: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, F: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = h$. Dann errechnet sich die mittelparallele Ebene H als:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$H: ax_1 + bx_2 + cx_3 = \frac{d+h}{2}$$

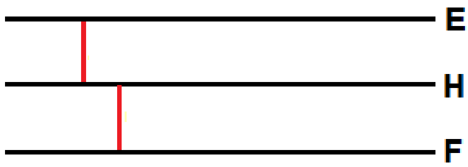
$$F: ax_1 + bx_2 + cx_3 = h.$$

Die Ebene H ist auf Grund desselben Normalenvektors parallel zu den Ebenen E und F, mit der Abstandsformel für parallele Ebenen gilt:

$$d(H,E) = \frac{\left|\frac{d+h}{2} - d\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\frac{h-d}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|h-d|}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(H,F) = \frac{\left|\frac{d+h}{2} - h\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\frac{d-h}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d-h|}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|h-d|}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

und damit die Gleichheit der Abstände d(H,E) = d(H,F). Die mittelparallele Ebene H ist zudem Spiegelebene der Ebenen E und F.



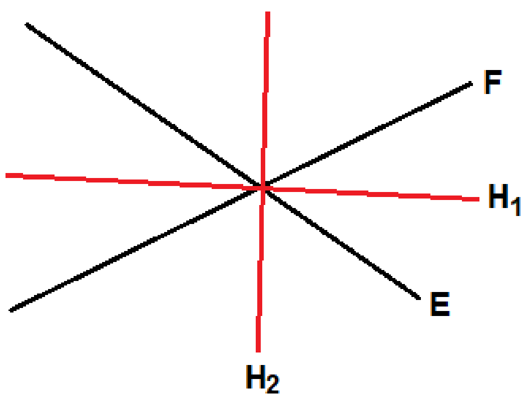
Als <u>Beispiel</u> betrachten wir zu den (wegen den gleichen Normalenvektoren) parallelen Ebenen

E: $4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 40$ und F: $4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -20$ mit $\frac{40+(-20)}{2}=10$ die mittelparallele Ebene H: $4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10$.

<u>Mittelebenen</u>

Der Fall von parallelen Ebenen E und F und der mittelparallelen Ebene H des obigen Abschnitts gibt Anlass auch sich schneidende Ebenen E und F zu betrachten und damit Mittelebenen H, die mit den Ebenen E und F die Schnittgerade g gemeinsam haben und die Schnittwinkel (Schnittwinkel und Nebenwinkel) zwischen diesen Ebenen halbieren.
Wir setzen im Folgenden die Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Normalenvektoren $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ als Vektoren derselben Länge mit $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = |\vec{n_E}| = |\vec{n_F}| = \sqrt{e^2+f^2+g^2}$ an. Weiter schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgeraden g und unter dem Schnittwinkel φ. Mittelebenen zwischen den Ebenen E und F lassen sich unter diesen Voraussetzungen bestimmen als:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$
H_1: $(a+e)x_1 + (b+f)x_2 + (c+g)x_3 = d+h$
H_2: $(a-e)x_1 + (b-f)x_2 + (c-g)x_3 = d-h$.



Betrachten wir die durch Addition von E und F entstandene Ebene H_1, so enthält diese wie die Ebenen E und F die Schnittgerade g. Denn ist $P(p_1|p_2|p_3)$ ein beliebiger Punkt auf der Schnittgeraden g, so liegt er gleichzeitig auf den Ebenen E und F, d.h. es gilt: $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$ sowie: $ep_1 + fp_2 + gp_3 = h$; Addition der beiden Gleichungen führt auf $(a+e)p_1 + (b+f)p_2 + (c+g)p_3 = d+h$, d.h. P liegt auch auf der Ebene H_1, so dass Letztere auch die

Schnittgerade g enthalten muss. Die Ebene H_1 halbiert auch den Schnittwinkel φ auf Grund von:

Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $\vec{n}_{H_1} = \begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}$ =>

$$\frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{H_1}\right|}{\left|\vec{n}_E\right|\left|\vec{n}_{H_1}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|a^2+ae+b^2+bf+c^2+cg\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{(a+e)^2+(b+f)^2+(c+g)^2}} \underset{a^2+b^2+c^2=e^2+f^2+g^2}{=}$$

$$\frac{\left|e^2+ae+f^2+bf+g^2+cg\right|}{\sqrt{e^2+f^2+g^2}\cdot\sqrt{(a+e)^2+(b+f)^2+(c+g)^2}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\vec{n}_F \cdot \vec{n}_{H_1}\right|}{\left|\vec{n}_F\right|\left|\vec{n}_{H_1}\right|} = \cos\varphi^*$$

mit gleichem Schnittwinkel φ* zwischen den Ebenen E und H_1 sowie F und H_1 und dem daraus folgenden Sachverhalt: φ* = φ/2. Gleiches gilt für die durch Subtraktion von E und F entstandene Mittelebene H_2.
Wir bemerken noch, dass die Ebenen H_1 und H_2 senkrecht aufeinander stehen wegen:

Normalenvektoren $\vec{n}_{H_1} = \begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}$, $\vec{n}_{H_2} = \begin{pmatrix} a-e \\ b-f \\ c-g \end{pmatrix}$ =>

$$\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-e \\ b-f \\ c-g \end{pmatrix} = (a+e)(a-e)+(b+f)(b-f)+(c+g)(c-g) \underset{\substack{3.\textit{binomische} \\ \textit{Formel}}}{=} a^2-e^2+b^2-f^2+c^2-g^2 =$$

$$(a^2+b^2+c^2)-(e^2+f^2+g^2) \underset{a^2+b^2+c^2=e^2+f^2+g^2}{=} 0.$$

Die Mittelebenen H_1 und H_2 sind schließlich Spiegelebenen der Ebenen E und F.

Im folgenden <u>Beispiel</u> werden zu den sich schneidenden Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$ und F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$ bei Normalvektoren gleicher Länge die Mittelebenen H_1 und H_2 gebildet. Die Parametergleichung der Schnittgeraden lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, die Weite des Schnittwinkels beträgt: φ = 83,62°. Die Mittelebenen lauten durch Addition und Subtraktion der Ebenen E und F: H_1: $4x_1 + 2x_2 = 14$, H_2: $4x_3 = 4$, verkürzt auf: H_1: $2x_1 + x_2 = 7$, H_2: $x_3 = 1$.