Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Geraden im dreidimensionalen Vektorraum I

Grundlagen

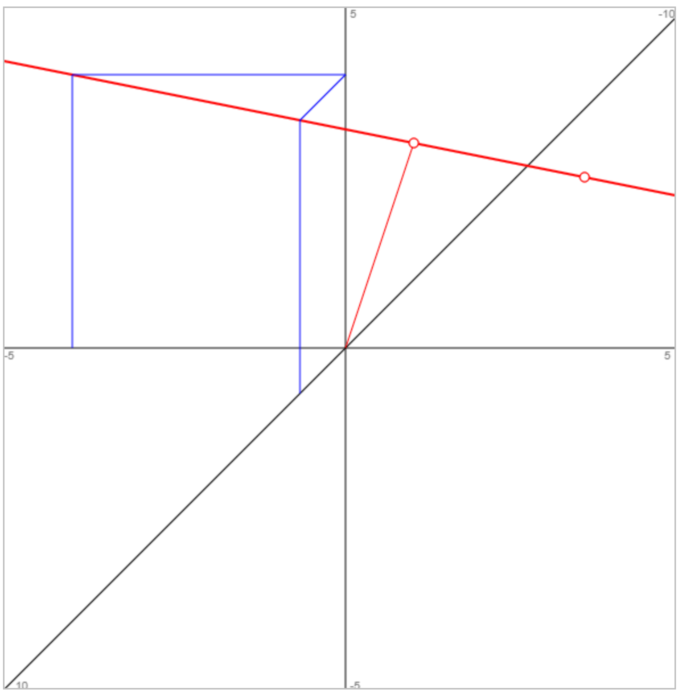
In der Vektorrechnung (analytischen Geometrie) wird eine Gerade g durch eine Gleichung in Parameterform definiert. Es gilt mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ und reellem Parameter s:

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{r}$$

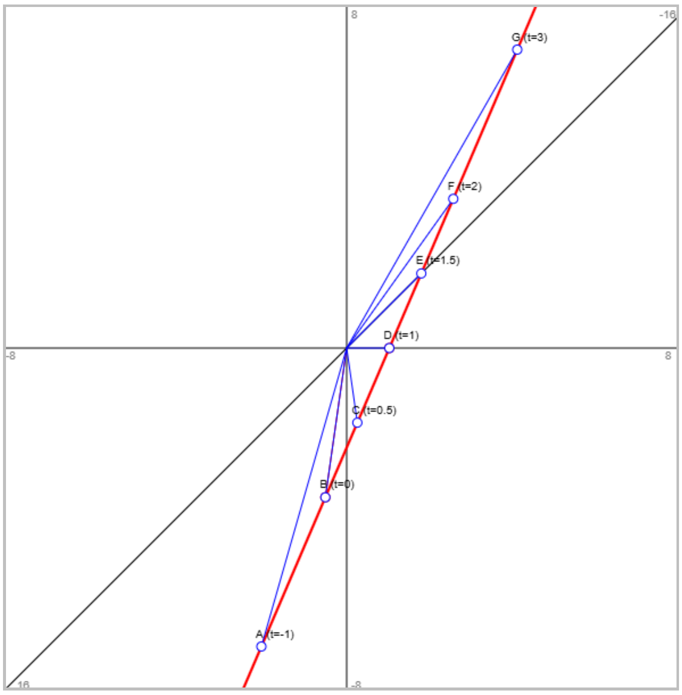
Da durch zwei Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ genau eine Gerade g läuft, lässt sich Letztere konstruieren als:

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{OA} + s\,\vec{AB}$$

mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ des Punktes A als Stützvektor und dem Differenzvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ zwischen A und B als Richtungsvektor (Geradenkonstruktion). Auf der Grundlage von Stütz- und Richtungsvektor lässt sich jede Gerade g in einem dreidimensionalen Koordinatensystem einzeichnen, insbesondere über die eventuell vorgegebenen Punkte A und B:



Geraden sind Punktemengen im dreidimensionalen Vektorraum. Für jeden reellen Parameter $s = s_0$ ist $P(a_1+s_0r_1|a_2+s_0r_2|a_3+s_0r_3)$ ein Punkt auf der Geraden g ($P\in g$):



Der Nachweis, ob ein Punkt P auf einer Geraden g liegt, wird Punktprobe genannt. Einsetzen des Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ in die Geradengleichung g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{r}$ führt auf:

$$\vec{OP} = \vec{a} + s\,\vec{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} p_1 = a_1 + sr_1 \\ p_2 = a_2 + sr_2 \\ p_3 = a_3 + sr_3 \end{matrix} \right\},$$

also auf ein lineares Gleichungssystem; im Fall der Lösbarkeit ($s = s_0$) liegt der Punkt auf der Geraden ($P\in g$), bei einem Widerspruch ist dies nicht der Fall ($P\notin g$).

Spurpunkte

Spurpunkte sind Schnittpunkte einer Geraden mit den Grundebenen des dreidimensionalen Koordinatensystem (x_1-x_2-, x_1-x_3-, x_2-x_3-Ebene). Zur Ermittlung der Spurpunkte einer Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems sind die einzelnen Komponenten (Koordinaten) der Geraden(gleichung) jeweils gleich Null zu setzen und aus den drei entstehenden Gleichungen jeweils, falls möglich, der Geradenparameter t zu berechnen. Einsetzen der berechneten Parameter in die Geradengleichung führt zu den Spurpunkten. Im Einzelnen gilt:

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ -> Geradenkomponenten $x_1 = a_1 + sr_1$, $x_2 = a_2 + sr_2$, $x_2 = a_2 + sru_2$ ->

Spurpunkt S_{23} auf der x_2-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_1 = a_1 + sr_1 = 0 \Leftrightarrow sr_1 = -a_1 \Leftrightarrow s = -a_1/r_1$ -> $\overrightarrow{OS_{23}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_1}{r_1}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - \frac{a_1}{r_1} r_2 \\ a_3 - \frac{a_1}{r_1} r_3 \end{pmatrix}$ -> S_{23} ($r_1 \neq 0$)

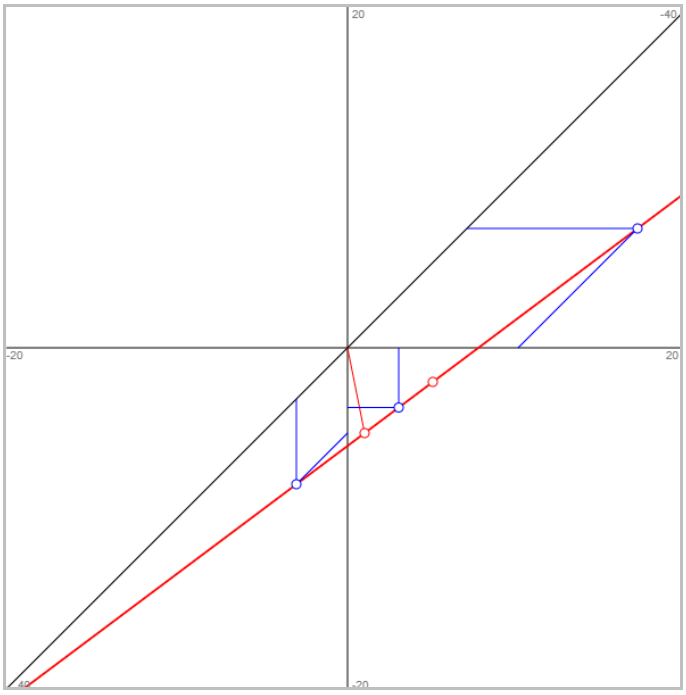
Spurpunkt S_{13} auf der x_1-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_2 = a_2 + sr_2 = 0 \Leftrightarrow sr_2 = -a_2 \Leftrightarrow s = -a_2/r_2$ -> $\overrightarrow{OS_{13}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_2}{r_2}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_2}{r_2} r_1 \\ 0 \\ a_3 - \frac{a_2}{r_2} r_3 \end{pmatrix}$ -> S_{13} ($r_2 \neq 0$)

Spurpunkt S_{12} auf der x_1-x_2-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_3 = a_3 + sr_3 = 0 \Leftrightarrow sr_3 = -a_3 \Leftrightarrow s = -a_3/r_3$ -> $\overrightarrow{OS_{12}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{r_3}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_3}{r_3} r_1 \\ a_2 - \frac{a_3}{r_3} r_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> S_{12} ($r_3 \neq 0$)

Der jeweilige Spurpunkt existiert nicht, wenn im Richtungsvektor der Geraden $r_1=0$, $r_2=0$ oder $r_3=0$ gilt. Die Gerade liegt dann parallel zu (oder auf) der Grundebene des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems, hinsichtlich der die Gerade keinen Spurpunkt besitzt. Spurpunkte, deren Komponenten mehr als eine Null enthalten, sind Spurpunkte auf den Achsen oder der Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems.



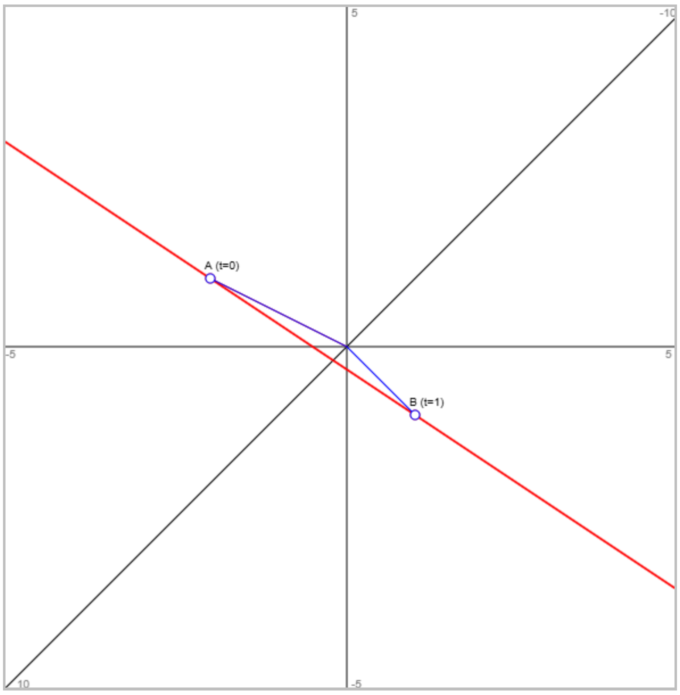
<u>Beispiele</u>

a) Mit Ortsvektor $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die <u>Geradengleichung</u>:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Mit den Punkten A(2|-1|2) und B(4|3|1) folgt für die <u>Gerade</u> g, auf der die Punkte liegen:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.



c) Auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt der P(5|2|-3), denn die <u>Punktprobe</u> ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5 = 2 + s \\ 2 = -1 + s \\ -3 = 3 - 2s \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3 = s \\ 3 = s \\ -6 = -2s \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3 = s \\ 3 = s \\ 3 = s \end{Bmatrix},$$

also eine eindeutige Lösung ohne Widerspruch: P$\in$ g. Hingegen liegt der Punkt Q(0|0|7) nicht auf der Geraden g wegen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 2 + s \\ 0 = -1 + s \\ 7 = 3 - 2s \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 = s \\ 1 = s \\ 4 = -2s \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 = s \\ 1 = s \\ -2 = s \end{Bmatrix} \lightning$$

und des Widerspruchs bei den errechneten Werten für den Parameter s: Q$\notin$ g.

d) Zur Geraden g mit: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sollen die <u>Spurpunkte</u> bestimmt werden. Wir zerlegen die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die einzelnen Komponenten:

$x_1 = 5$
$x_2 = -2 + 4t$
$x_3 = 4 + t$

und bestimmen die Spurpunkte wie folgt:

Spurpunkt S_{23}: Nullsetzen der x_1-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung:

$x_1 = 5 = 0$,

die keine Lösung hat, weil der Richtungsvektor der Geraden in seiner 1. Koordinate 0 ist. Smotz gibt es keinen Geradenspurpunkt auf der x_2-x_3-Ebene.

Spurpunkt S_{13}: Nullsetzen der x_2-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_2 = -2 + 4t = 0 \Leftrightarrow -2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t = 2 \Leftrightarrow t = 0,5$.

Einsetzen des gefundenen Parameters t=0,5 in die Geradengleichung von g ergibt:

$$g \to \overrightarrow{OS_{13}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \to S_{13}(5|0|4,5).$$

Spurpunkt S_{12}: Nullsetzen der x_3-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_3 = 4 + t = 0 \Leftrightarrow 4 + t = 0 \Leftrightarrow t = -4$.

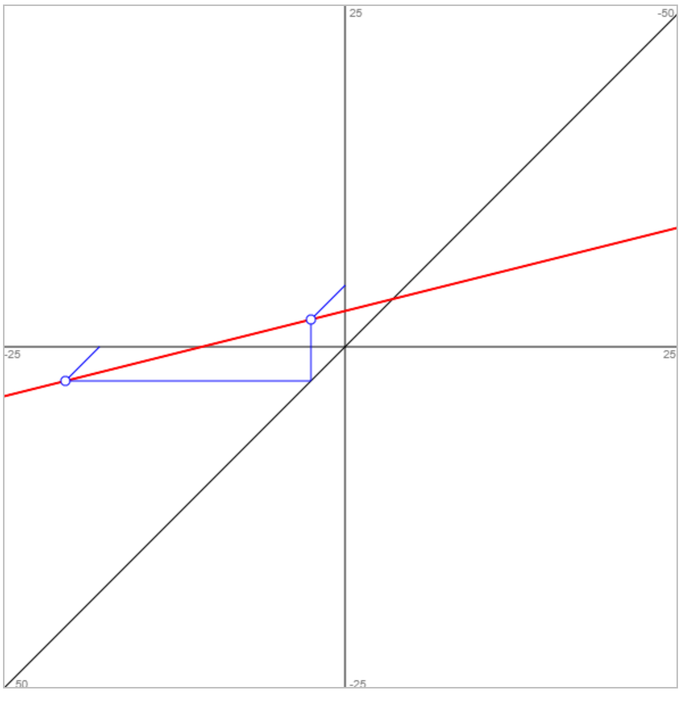
Einsetzen des gefundenen Parameters t=-4 in die Geradengleichung von g ergibt:

$$g \to \overrightarrow{OS_{12}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \to S_{12}(5|-18|0).$$

Die Spurpunkte der Geraden g als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems lauten also:

Spurpunkt auf der x_2-x_3-Grundebene: kein Spurpunkt S_{23}
Spurpunkt auf der x_1-x_3-Grundebene: $S_{13}(5|0|4,5)$
Spurpunkt auf der x_1-x_2-Grundebene: $S_{12}(5|-18|0)$.

Damit gilt grafisch der folgende Sachverhalt:



Lagebeziehungen

Im Folgenden werden zwei Geraden g und h betrachtet. Dann gilt hinsichtlich der Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden g: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{r}_1$ und h: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{r}_2$:

a) Geraden sind identisch.
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S.
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel.
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief.

Es ergeben sich folgende zwei Vorgehensweisen:

Vorgehensweise 1:

I. Schnittpunktberechnung ($g \cap h$): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g_1 und g_2 führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten (s, t). Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar: Die Geraden sind identisch (g=h).
b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit den Lösungen $s=s_0$, $t=t_0$: Die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S mit $\overrightarrow{OS} = \vec{a}_1 + s_0\,\vec{r}_1 = \vec{a}_2 + t_0\,\vec{r}_2$.
c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar: Die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit II.

II. Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität muss gelten: $\vec{r}_1 = k\,\vec{r}_2$ oder $\vec{r}_2 = k\,\vec{r}_1$ für ein gewisses reelles k. Es ist also ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und einer Unbekannten (k) zu lösen. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung $k=k_0$: Die Geraden sind parallel (g||h).
b) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar: Die Geraden sind windschief.

Vorgehensweise 2:

I. Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität muss gelten: $\vec{r}_1 = k\,\vec{r}_2$ oder $\vec{r}_2 = k\,\vec{r}_1$ für ein gewisses reelles k. Es ist also ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und einer Unbekannten (k) zu lösen. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung $k=k_0$: Die Geraden sind parallel (g||h); weiter mit II.
b) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar: Die Geraden sind nicht parallel; weiter mit III.

II. Für einen Punkt Q auf der Geraden h etwa mit $\overrightarrow{OQ} = \vec{a}_2$ wird eine Punktprobe hinsichtlich der Geraden g durchgeführt. Es gilt:
a) Der Punkt Q liegt auch auf der Geraden g ($Q \in g$): Die Geraden sind identisch (g=h).
b) Der Punkt Q liegt nicht auf der Geraden g ($Q \notin g$): Die Geraden sind („echt") parallel, aber nicht identisch (g||h, $g \neq h$).

III. Schnittpunktberechnung ($g \cap h$): Gleichsetzen der Gleichungen der zueinander nicht parallelen Geraden g_1 und g_2 führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten (s, t). Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit den Lösungen $s=s_0$, $t=t_0$: Die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S mit $\overrightarrow{OS} = \vec{a}_1 + s_0\,\vec{r}_1 = \vec{a}_2 + t_0\,\vec{r}_2$.
b) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar: Die Geraden schneiden sich nicht und sind damit zueinander windschief.

Die eben dargestellten Vorgehensweisen gelten für die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden, die weiter oben angesprochen Punktprobe ermittelt die Lage zwischen einem Punkt und einer Geraden.

Beispiele

a) Zu der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ lässt eine zu g parallele Gerade h durch den Punkt Q(-1|-1|7) konstruieren (Parallelenkonstruktion), indem einfach der Stützvektor der Geraden g durch den zum Punkt Q gehörenden Ortsvektor ersetzt wird. Es ist damit:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wir untersuchen die Lage der zwei Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zueinander:

I. Untersuchung auf Schnittpunkt ($g \cap h$): Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt:

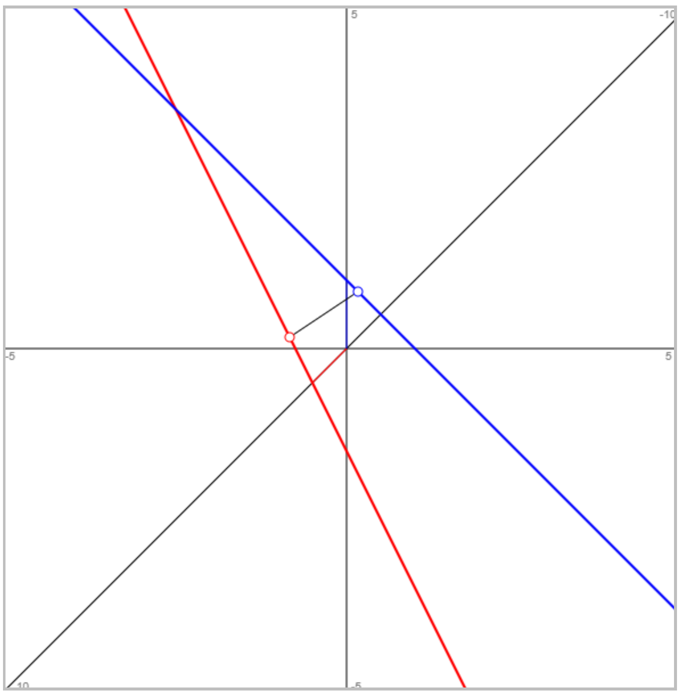
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ -t=-1, -s-t=0, 2s=1 ⇔ t=1, s=0,5, -1,5=0 ↯

Die Geraden schneiden sich wegen des Widerspruchs nicht.

II. Untersuchung auf Parallelität (g||h): Für die Richtungsverktoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ k=0, k=-1, 0=2 ↯

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel und windschief zueinander.

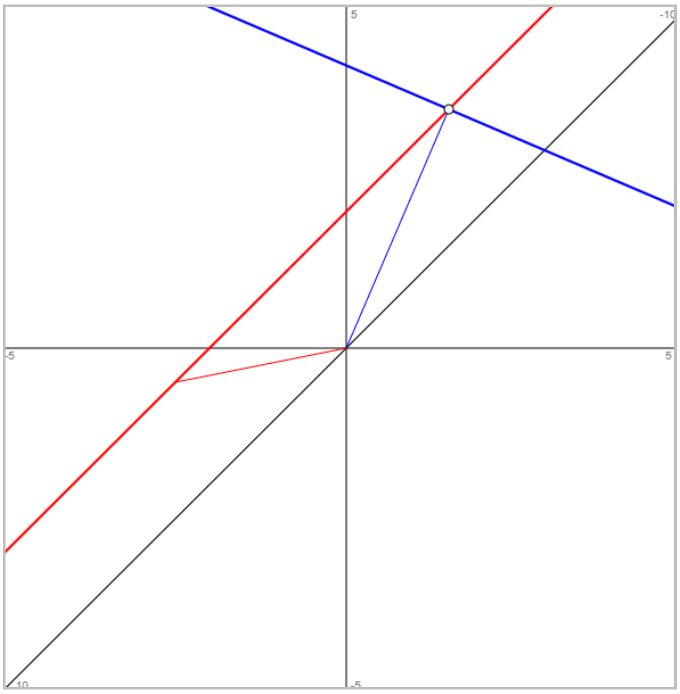


c) Für die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und deren Lagebeziehung zueinander ergibt sich durch das Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ ⇔ -2s-t = -4, s+3t = 2, s-2t = 2 ⇔
-2s-t = -4, s = 2-3t, (2-3t)-2t = 2 ⇔ -2s-t = -4, s = 2-3t, -5t = 0 ⇔ -2s-t = -4, s = 2-3t, t=0 ⇔
-2s=-4, s=2, t=0 ⇔ s=2, t=0

Die Geraden schneiden sich also, der Schnittpunkt S errechnet sich entweder durch Einsetzen von s in g oder von t in h z.B. als:

$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, also S(-3|0|2).



d) Wir untersuchen die <u>Lage</u> der zwei Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ zueinander. Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt:

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix}\Leftrightarrow s\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ ⇔ 2s+3t = 2, 2s+3t = 2, 4s+6t = 4 ⇔ 2s+3t = 2

Das lineare Gleichungssystem ist offensichtlich mehrdeutig lösbar, die Geraden g und h sind somit identisch (g=h).