Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Kreise (Parameterform)

Einleitung

Im dreidimensionalen reellen Vektorraum können neben Geraden und Ebenen auch Kreise mit Hilfe von Parameterformen dargestellt werden. Gegeben sei im Folgenden ein Kreis k mit Kreismittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ und Kreisradius r, r > 0. Sind $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ zwei Einheitsvektoren, die rechtwinklig zueinanderstehen und mit dem Mittelpunkt M als Stützvektor die Ebene aufspannen, in der der Kreis k liegt, so gilt mit dem Parameter φ (reell, 0≤φ≤2π) die Darstellung:

$$k: \vec{x} = \vec{OM} + r\cos\varphi \cdot \vec{e_1} + r\sin\varphi \cdot \vec{e_2} \quad (*).$$

Als im Grunde zweidimensionale Figur muss der Kreis auf einer Ebene liegen, so dass sich der Kreis auch als Schnittmenge einer Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r und einer Ebene E ergibt. Es gelten damit die (Kugel- und Ebenen-) Gleichungen:

$$K: \left(\vec{x} - \vec{OM}\right)^2 = r^2,\ E: \left(\vec{x} - \vec{OM}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (**),$$

die den Kreis k definieren, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Ebene und damit auch der senkrecht auf der Kreisfläche stehende „Richtungsvektor“ des Kreises ist.

Herleitung

Kugel- und Ebenengleichung der Beziehungen (**) bieten den Ausgangspunkt für die Herleitung der Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ aus der Parameterform (*). Die Ebene E, in Normalenform als: E: $\left(\vec{x} - \vec{OM}\right) \cdot \vec{n} = 0$, lässt sich durch Ausmultiplikation des Skalarproduktes umformen in eine Ebene in Koordinatenform: E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (***). Wir unterscheiden nun, um allen Eventualitäten bei der Lage der Ebene E und damit des Kreises k auf der Ebene E zu begegnen drei Fälle, von denen die Ebene mindestens einen erfüllt:

Fall 1 (a≠0): Aus der Gleichung (***) folgt durch umstellen: $x_1 = (d-bx_2-cx_3)/a$, woraus sich die Ebene E in Parameterform ergibt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (mit reellen Parametern r, s).}$$

Wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gilt: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, so dass:

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-b/a)^2}}\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2/a^2}}\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_1}$$

der erste Einheitsvektor $\vec{e}_1$ der gesuchten zwei ist. Der zweite Einheitsvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht zum Normalenvektor (als Teil der Ebene) und senkrecht zum Einheitsvektor $\vec{e}_1$ und ergibt sich von daher aus dem Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -bc/a \\ a + b^2/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -bc/a \\ (a^2+b^2)/a \end{pmatrix}$$

nach Normierung als:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-c)^2 + (-bc/a)^2 + \left((a^2+b^2)/a\right)^2}} \begin{pmatrix} -c \\ -bc/a \\ (a^2+b^2)/a \end{pmatrix} = \frac{a}{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + (a^2+b^2)^2}} \begin{pmatrix} -c \\ -bc/a \\ (a^2+b^2)/a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Eine Parameterdarstellung des Kreises lautet somit:

$$\text{k: } \vec{x} = \vec{OM} + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Fall 2</u> ($b\neq 0$): Aus der Gleichung (***) folgt durch umstellen: $x_2 = (d - ax_1 - cx_3)/b$, woraus sich die Ebene E in Parameterform ergibt:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (mit reellen Parametern r, s).}$$

Wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gilt: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, so dass:

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-a/b)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/b^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

der erste Einheitsvektor $\vec{e}_1$ der gesuchten zwei ist. Der zweite Einheitsvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht zum Normalenvektor (als Teil der Ebene) und senkrecht zum Einheitsvektor $\vec{e}_1$ und ergibt sich von daher aus dem Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac/b \\ c \\ -a^2/b - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac/b \\ c \\ -(a^2+b^2)/b \end{pmatrix}$$

nach Normierung als:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-ac/b)^2 + c^2 + \left(-(a^2+b^2)/b\right)^2}} \begin{pmatrix} ac/b \\ c \\ -(a^2+b^2)/b \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + (a^2+b^2)^2}} \begin{pmatrix} ac/b \\ c \\ -(a^2+b^2)/b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -(a^2+c^2) \end{pmatrix}$$

Eine Parameterdarstellung des Kreises lautet somit:

$$\text{k: } \vec{x} = \overrightarrow{OM} + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -(a^2+c^2) \end{pmatrix}.$$

<u>Fall 3</u> ($c \neq 0$): Aus der Gleichung (***) folgt durch umstellen: $x_3 = (d - ax_1 - bx_2)/c$, woraus sich die Ebene E in Parameterform ergibt:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix} \text{ (mit reellen Parametern r, s).}$$

Wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gilt: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = 0$, so dass:

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-a/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

der erste Einheitsvektor $\vec{e}_1$ der gesuchten zwei ist. Der zweite Einheitsvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht zum Normalenvektor (als Teil der Ebene) und senkrecht zum Einheitsvektor $\vec{e}_1$ und ergibt sich von daher aus dem Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab/c \\ c + a^2/c \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab/c \\ (a^2+c^2)/c \\ -b \end{pmatrix}$$

nach Normierung als:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-ab/c)^2 + \left((a^2+c^2)/c\right)^2 + (-b)^2}} \begin{pmatrix} -ab/c \\ (a^2+c^2)/c \\ -b \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{a^2b^2 + (a^2+c^2)^2 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} -ab/c \\ (a^2+c^2)/c \\ -b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + c^4}} \begin{pmatrix} -ab \\ a^2+c^2 \\ -bc \end{pmatrix}$$

Eine Parameterdarstellung des Kreises lautet somit:

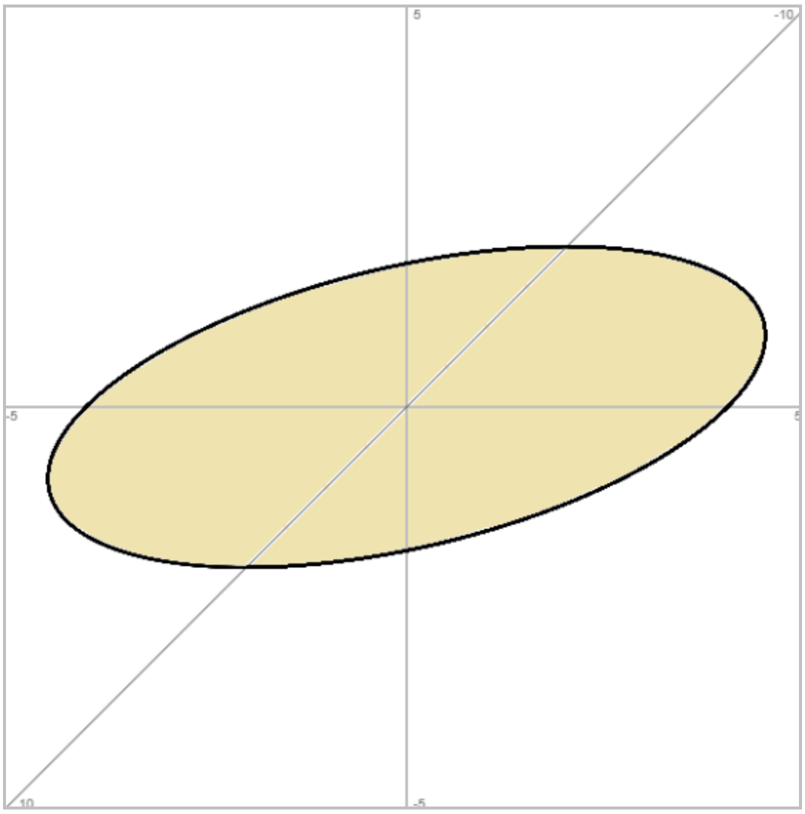
$$\text{k: } \vec{x} = \vec{OM} + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}}\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^4+a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2+c^4}}\begin{pmatrix} -ab \\ a^2+c^2 \\ -bc \end{pmatrix}.$$

<u>Beispiele</u>:

a) In der x_1-x_2-Grundebene des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems liegt um den Koordinatenur-sprung als Mittelpunkt ein Kreis k mit Radius r = 4 (Längeneinheiten). Die Kreisgleichung in Parameter-form ergibt sich, wenn wir die Grundebene als: E: $x_3 = 0$ in Koordinatenform darstellen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wenn wir als Einheitsvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen. Dann lautet die gesuchte Parameterdarstellung:

$$\text{k: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\cos\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\cos\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

was das folgende Aussehen des Kreises im Koordinatensystem ergibt:



b) Ein Kreis k besitzt den Mittelpunkt M(0|0|4) und den Radius r = 2 (Längeneinheiten). Der Kreis liegt auf einer zur Ebene E* $2x_2 + x_3 = 0$ parallelen Ebene. Diese (im Übrigen zur x_1-Achse paralle-le) Ebene lautet: E: $2x_2 + x_3 = 4$ (Einsetzen der Mittelpunktkoordinaten in den Term $2x_2+x_3$). Der Normalenvektor der Ebene E beträgt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Ebene E lautet in der Parameterform:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(r, s reell)},$$

so dass als erster Einheitsvektor der Kreisgleichung $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gewählt werden kann. Der zweite Einheitsvektor ergibt sich wie folgt:

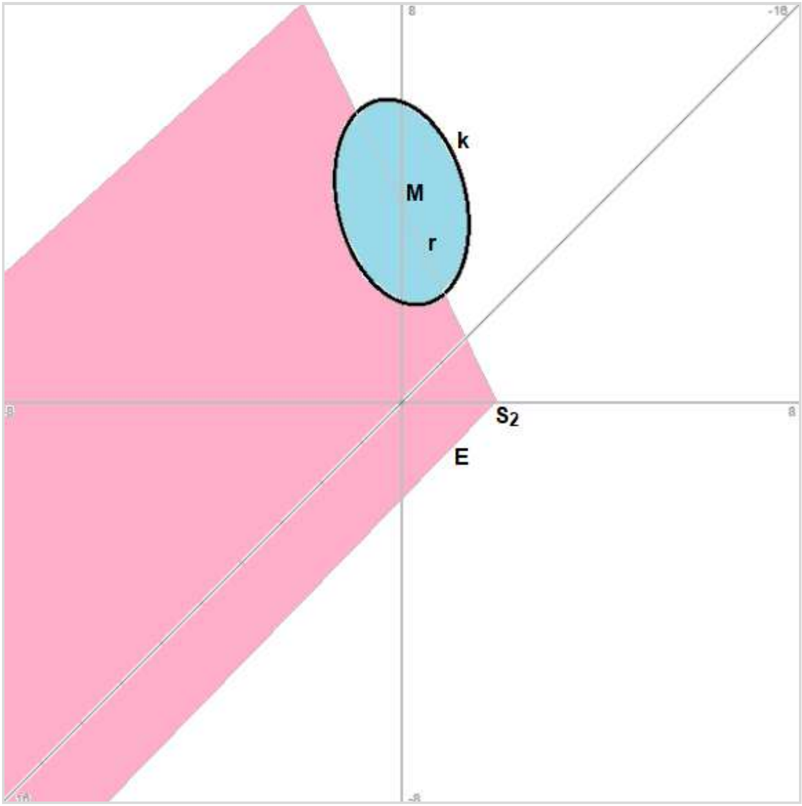
Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ->

Einheitsvektor: $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Als Kreisgleichung folgt:

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\cos\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(0≤φ≤2π).



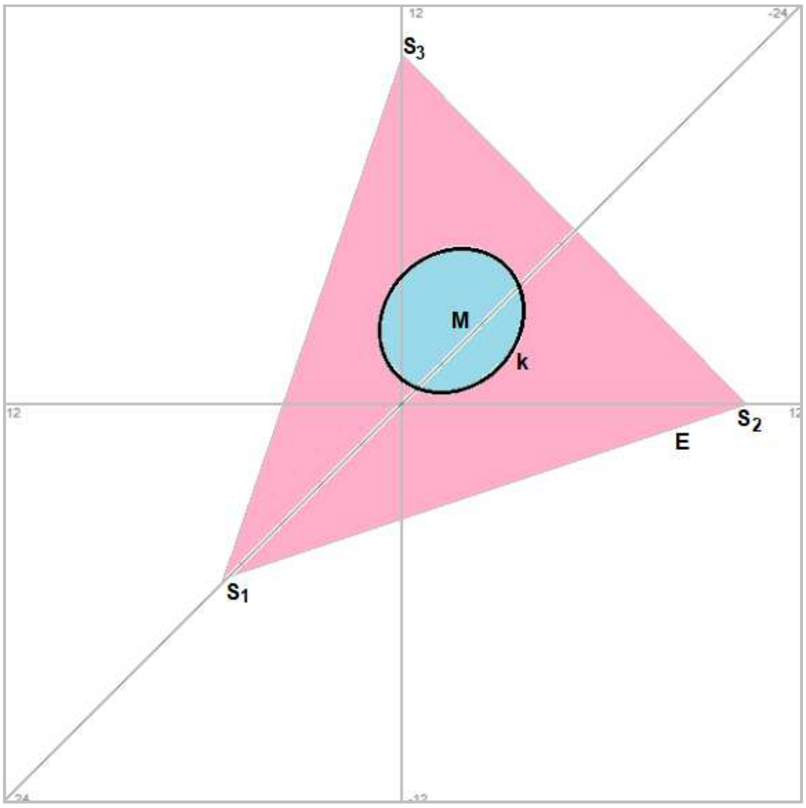
c) Gegeben ist die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Mittelpunkt M(3|3|4) des Kreises k liegt auf der Ebene, wie leicht durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die Ebenengleichung festgestellt werden kann. Der Kreis k hat den Radius r = 2 (Längeneinheiten). Nach Herleitung, Fall 1 ergibt sich die Parameterform des Kreises als:

k: $\vec{x} = \vec{OM} + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2}} \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -(a^2 + c^2) \end{pmatrix}$,

d.h. mit a=1, b=1, c=1 als:

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \sin\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (0≤φ≤2π).

Ebene E und Kreis k lassen sich wie folgt darstellen:



d) Die Fläche des Kreises k mit Kreismittelpunkt M(3|4|2) und Radius r = 5 (Längeneinheiten) schneidet die x_1-Achse des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems senkrecht. Der Kreis liegt mithin auf der zur x_2-x_3-Grundebene parallelen Ebene E: $x_1 = 3$. Es ergibt sich die Kreisgleichung:

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 5\cos\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

und damit: