Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Kreuzprodukt

Einleitung

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gelten im dreidimensionalen reellen Vektorraum neben der Addition (Vektoraddition) und der Multiplikation mit einer reellen Zahl (skalare Multiplikation) auch multiplikative Verknüpfungen:

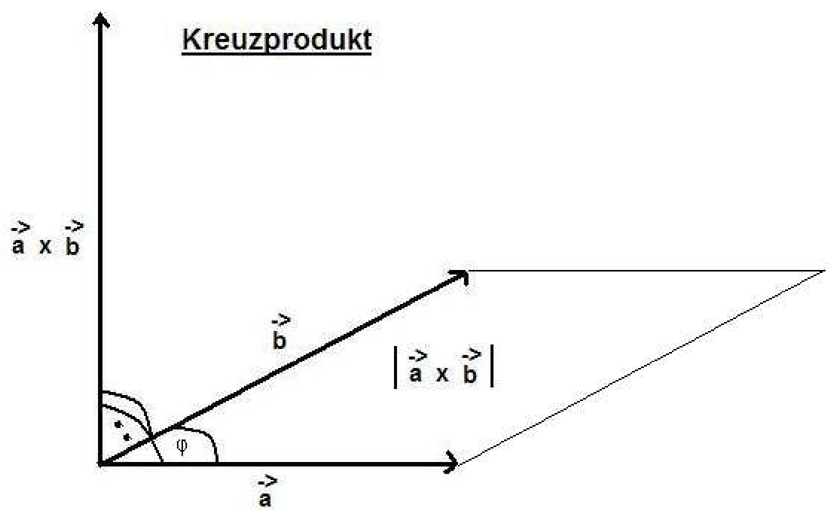
a) inneres Produkt, Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$;

b) äußeres Produkt, Vektorprodukt oder Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ mit der Beziehung: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$ und dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$;

c) Spatprodukt: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$ mit einem dritten Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ und der Kombination aus Kreuz- und Skalarprodukt.

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt erzeugt aus zwei Vektoren einen dritten Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, der (als Normalenvektor) senkrecht auf den erzeugenden Vektoren steht.



Das Kreuzprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

a) Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, d.h.: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$.

b) Die Länge des Kreuzproduktvektors ist gleich dem Flächeninhalts des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, d.h.:

$$A_{Parallelogramm}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi .$$

c) Das Kreuzprodukt ist antikommutativ, distributiv und gemischt assoziativ, d.h.:

$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\left(r\,\vec{b}+s\,\vec{c}\right)=r\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+s\left(\vec{a}\times\vec{c}\right),\ \left(r\,\vec{a}+s\,\vec{b}\right)\times\vec{c}=r\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+s\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$ (Graßmann-Identität)

d) Das Kreuzprodukt von zwei parallelen Vektoren ist der Nullvektor, d.h.:

$$\vec{a}\times r\,\vec{a}=\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

e) Es gelten die Identitäten:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{o}$$ (Jacobi-Identität)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)$$ (Lagrange-Identität).

Kreuzprodukt und Vektorrechnung

Es seien nachfolgend einige Beispiele und Formeln zur Verwendung des Kreuzprodukts in der analytischen Geometrie/Vektorrechnung angeführt. Die Beispiele betreffen: Ermittlung des Kreuzprodukts, Winkelberechnung, Umwandlung einer Ebenengleichung von der Parameter- in die Koordinatenform, Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, Berechnung des Abstands zwischen Punkt und Gerade, Ermittlung einer Schnittgeraden.

1) Für die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich als Kreuzprodukt:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1-0\cdot(-1)\\0\cdot0-1\cdot1\\1\cdot(-1)-(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}1 & 0\\-1 & -1\end{matrix}$$ (◀ Wiederholung der ersten Zeilen der beiden Vektoren zur besseren Rechnung)

In der Tat gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=-1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot0=-1+1=0$$

sowie:

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=-1\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=1-1=0\,.$$

Das Kreuzprodukt steht also senkrecht auf den beiden Vektoren $\overset{->}{a}$ und $\overset{->}{b}$.

2) <u>Winkelberechnung</u>: Aus der weiter oben angeführten Formel $\left|\overset{->}{a}\times\overset{->}{b}\right|=\left|\overset{->}{a}\right|\cdot\left|\overset{->}{b}\right|\cdot\sin\varphi$ folgt sofort eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\overset{->}{a}$ und $\overset{->}{b}$:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overset{->}{a}\times\overset{->}{b}\right|}{\left|\overset{->}{a}\right|\cdot\left|\overset{->}{b}\right|}\,.$$

3) <u>Umwandlung einer Ebene von Parameter- in Koordinatenform</u>: Gegeben ist die Ebene in Parameterform E: $\overset{->}{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. Wir bestimmen den Normalenvektor zu E als nachstehendes Kreuzprodukt:

$$\overset{->}{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1-(-3)\cdot(-2)\\-3\cdot 1-2\cdot 1\\2\cdot(-2)-0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-5\\-4\end{pmatrix}.$$

Die Ebenengleichung lautet somit in Normalenform:

E: $\begin{pmatrix}-6\\-5\\-4\end{pmatrix}\left[\overset{->}{x}-\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\right]=0$

und weiter in Koordinatenform:

E: $\begin{pmatrix}-6\\-5\\-4\end{pmatrix}\overset{->}{x}=\begin{pmatrix}-6\\-5\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$, also: E: $\begin{pmatrix}-6\\-5\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-12+15-16$, also:

E: $-6x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -13$ oder: E: $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 13$.

4) Das durch die Ecken A(4|-2|1), B(2|1|6) und C(4|-4|8) gegebene Dreieck ΔABC hat wegen $\overset{->}{AB}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ und $\overset{->}{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}$ sowie wegen dem Kreuzprodukt:

$$\overset{->}{AB}\times\overset{->}{AC}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\14\\4\end{pmatrix}$$

den <u>Flächeninhalt</u>:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 31 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + 14^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1173} \approx 17{,}125$$ FE.

5) <u>Flächenberechnung eines beliebigen Dreiecks</u>: Allgemein gilt, dass ein durch die Ecken A, B, C gegebenes Dreieck ΔABC die Fläche:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{AC} \times \vec{BC}\right|$$

hat.

6) Den <u>Abstand des Punktes</u> P(-4|3|-5) <u>von der Geraden</u> g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ bestimmen wir

vermöge der Formel: d(P,g) = $\frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$ mit $\vec{u}$ als Richtungs- und $\vec{a} = \vec{OA}$

als Stützvektor der Geraden. Wir bilden zunächst den Differenzvektor: $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$ und

dann das Kreuzprodukt:

$$\vec{u} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich:

d(P,g) = $\frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{(-50)^2 + 0^2 + 0^2}}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{50}{10} = 5$ LE (Längeneinheiten)

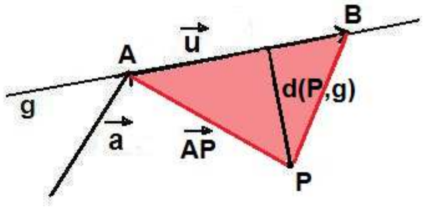
als Abstand zwischen Punkt und Geraden.

7) <u>Abstand zwischen Punkt und Gerade</u>: Für den Abstand zwischen einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt P gilt – siehe oben – die Abstandsformel:

$$\text{d(P,g)} = \frac{\left|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Beweis: I. Wir betrachten das Kreuzprodukt des Differenzvektors $\vec{AP}$ von Punkt P und Stützvektor A der Geraden g und des Richtungsvektors der Geraden g, also: $\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)$.

Der Betrag des Kreuzprodukts ist dann: $\left|\vec{u}\times\left(\vec{OP}-\vec{a}\right)\right| = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{OP}-\vec{a}\right|\cdot\sin\varphi$ mit dem Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{OP}-\vec{a}$. Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht damit der Fläche A_P des durch $\vec{u}$ und $\vec{OP}-\vec{a}$ aufgespannten Parallelogramms.



II. Die Höhe dieses Parallelogramms ist der Abstand des Punktes P von der Geraden g, also: d(P,g).

III. Es folgt mit: $A_P = \left|\vec{u}\times\left(\vec{OP}-\vec{a}\right)\right|$ und $A_P = \left|\vec{u}\right|\cdot d(P,g)$ durch Gleichsetzen und Umformen:

$$\left|\vec{u}\times\left(\vec{OP}-\vec{a}\right)\right| = \left|\vec{u}\right|\cdot d(P,g) \Leftrightarrow$$

$$d(P,g) = \frac{\left|\vec{u}\times\left(\vec{OP}-\vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u}\times\vec{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

die allgemeine Formel für die Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Geraden.

8) <u>Schnittgerade von zwei Ebenen</u>: Für zwei nichtparallele Ebenen E und F in Koordinatenform (KF) mit:

$$E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$$
$$F: ex_1+fx_2+gx_3 = h$$

ergibt sich vermöge der Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{n}_E \neq k\cdot\vec{n}_F$$

der Richtungsvektor $\vec{u}$ der <u>Schnittgeraden</u> g: $\vec{x} = \vec{a}+t\,\vec{u}$ als:

$$\vec{u} = \vec{n}_E\times\vec{n}_F$$

, der Stützvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden als eine Lösung des linearen 2x3-Gleichungssystems (*):

$$ax_1+bx_2+cx_3 = d$$
$$ex_1+fx_2+gx_3 = h$$

, wobei durch Nullsetzen von x_1 oder x_2 oder x_3 ein lineares 2x2-Gleichungssystem von der Form (**):

$$bx_2+cx_3 = d$$
$$fx_2+gx_3 = h$$

bzw.

$$ax_1+cx_3 = d$$
$$ex_1+gx_3 = h$$

bzw.

$$ax_1+bx_2 = d$$
$$ex_1+fx_2 = h$$

entsteht, mit einer eindeutigen Lösung für die übrigen Variablen (als Komponenten des Stützvektors). Sind die Ebenen E und F parallel, so gilt im Übrigen:

$$\vec{n_E} \times \vec{n_F} = \vec{o}\,.$$

9) Für die nichtparallelen und sich damit schneidenden Ebenen

$$E: x_1+x_2+2x_3 = 4$$
$$F: 3x_2+2x_3 = 6$$

ergibt sich als Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$x_1+x_2+2x_3 = 4$$
$$3x_2+2x_3 = 6$$

ergibt sich mit x_3=0 das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$$x_1+x_2 = 4$$
$$3x_2 = 6$$

mit den Lösungen x_2 = 2 und x_1 = 2. Der Stützvektor der Schnittgeraden ist somit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.