

Einleitung

Für zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gelten im dreidimensionalen reellen Vektorraum

neben der Addition (Vektoraddition) und der Multiplikation mit einer reellen Zahl (skalare Multiplikation) auch multiplikative Verknüpfungen:

a) inneres Produkt, Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  mit dem Winkel  $\varphi$  als eingeschlossenen Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ;

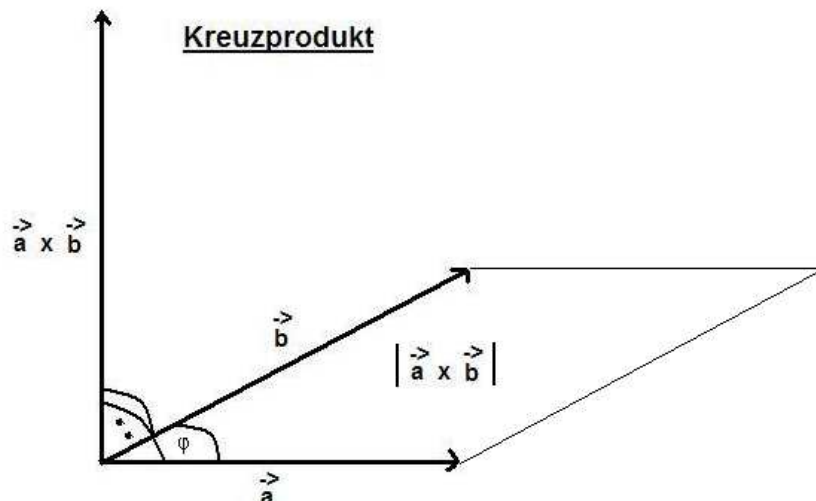
b) äußeres Produkt, Vektorprodukt oder Kreuzprodukt:  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$  mit der Be-

ziehung:  $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi$  und dem Winkel  $\varphi$  als eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ;

c) Spatprodukt:  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$  mit einem dritten Vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  und der Kombination aus Kreuz- und Skalarprodukt.

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt erzeugt aus zwei Vektoren einen dritten Vektor  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ , der (als Normalenvektor) senkrecht auf den erzeugenden Vektoren steht.



Das Kreuzprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

a) Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , d.h.:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ ,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ .

b) Die Länge des Kreuzproduktvektors ist gleich dem Flächeninhalts des durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms, d.h.:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi.$$

c) Das Kreuzprodukt ist antikommutativ, distributiv und gemischt assoziativ, d.h.:

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= -\vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{a} \times (r\vec{b} + s\vec{c}) &= r(\vec{a} \times \vec{b}) + s(\vec{a} \times \vec{c}), \quad (r\vec{a} + s\vec{b}) \times \vec{c} = r(\vec{a} \times \vec{c}) + s(\vec{b} \times \vec{c}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (\text{Graßmann-Identität}) \end{aligned}$$

d) Das Kreuzprodukt von zwei parallelen Vektoren ist der Nullvektor, d.h.:

$$\vec{a} \times r\vec{a} = \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Es gelten die Identitäten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{o} \quad (\text{Jacobi-Identität}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) \quad (\text{Langrange-Identität}). \end{aligned}$$

### Kreuzprodukt und Vektorrechnung

Es seien nachfolgend einige Beispiele und Formeln zur Verwendung des Kreuzprodukts in der analytischen Geometrie/Vektorrechnung angeführt. Die Beispiele betreffen: Ermittlung des Kreuzprodukts, Winkelberechnung, Umwandlung einer Ebenengleichung von der Parameter- in die Koordinatenform, Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, Berechnung des Abstands zwischen Punkt und Gerade, Ermittlung einer Schnittgeraden.

1) Für die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt sich als Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{matrix} \quad (\blacktriangleleft \text{Wiederholung der ersten Zeilen der beiden Vektoren zur besseren Rechnung})$$

In der Tat gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = -1 + 1 = 0$$

sowie:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0.$$

Das Kreuzprodukt steht also senkrecht auf den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

2) Winkelberechnung: Aus der weiter oben angeführten Formel  $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi$  folgt

sofort eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\sin \varphi = \frac{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|}.$$

3) Umwandlung einer Ebene von Parameter- in Koordinatenform: Gegeben ist die Ebene

in Parameterform E:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir bestimmen den Normalenvektor zu E

als nachstehendes Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - (-3) \cdot (-2) \\ -3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Ebenengleichung lautet somit in Normalenform:

$$E: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

und weiter in Koordinatenform:

$$E: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also: } E: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -12 + 15 - 16, \text{ also:}$$

$$E: -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -13 \text{ oder: } E: 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 13.$$

4) Das durch die Ecken A(4|-2|1), B(2|1|6) und C(4|-4|8) gegebene Dreieck  $\Delta ABC$  hat we-

gen  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$  sowie wegen dem Kreuzprodukt:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

den Flächeninhalt:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 31 \\ 14 \\ 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{31^2 + 14^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1173} \approx 17,125 \text{ FE.}$$

5) Flächenberechnung eines beliebigen Dreiecks: Allgemein gilt, dass ein durch die Ecken A, B, C gegebenes Dreieck  $\Delta ABC$  die Fläche:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{BC} \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{AC} \times \vec{BC} \right|$$

hat.

6) Den Abstand des Punktes  $P(-4|3|-5)$  von der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  bestimmen wir

vermöge der Formel:  $d(P,g) = \frac{\left| \vec{u} \times \left( \vec{OP} - \vec{a} \right) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{AP} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$  mit  $\vec{u}$  als Richtungs- und  $\vec{a} = \vec{OA}$

als Stützvektor der Geraden. Wir bilden zunächst den Differenzvektor:  $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$  und dann

das Kreuzprodukt:

$$\vec{u} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich:

$$d(P,g) = \frac{\frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}}{\frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}} = \frac{\frac{\left| \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2}}}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{50}{10} = 5$$

als Abstand zwischen Punkt und Geraden.

7) Abstand zwischen Punkt und Gerade: Für den Abstand zwischen einer Geraden

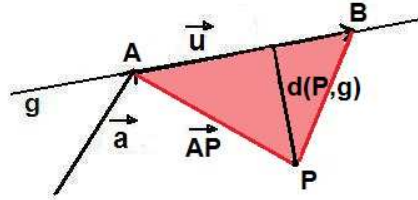
$g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$  und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt P gilt – siehe oben – die Abstandsformel:

$$d(P,g) = \frac{\left| \vec{u} \times \left( \vec{OP} - \vec{a} \right) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{AP} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$$

*Beweis*: I. Wir betrachten das Kreuzprodukt des Differenzvektors  $\vec{AP}$  von Punkt P und Stützvektor A der Geraden g und des Richtungsvektors der Geraden g, also:  $\vec{u} \times \left( \vec{OP} - \vec{a} \right)$ .

Der Betrag des Kreuzprodukts ist dann:  $\left| \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot \left| \vec{OP} - \vec{a} \right| \cdot \sin \varphi$  mit dem Winkel  $\varphi$

zwischen den Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{OP} - \vec{a}$ . Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht damit der Fläche  $A_P$  des durch  $\vec{u}$  und  $\vec{OP} - \vec{a}$  aufgespannten Parallelogramms.



II. Die Höhe dieses Parallelogramms ist der Abstand des Punktes P von der Geraden g, also:  $d(P,g)$ .

III. Es folgt mit:  $A_P = \left| \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right|$  und  $A_P = \left| \vec{u} \right| \cdot d(P,g)$  durch Gleichsetzen und Umformen:

$$\left| \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot d(P,g) \Leftrightarrow$$

$$d(P,g) = \frac{\left| \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{AP} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$$

die allgemeine Formel für die Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Geraden.

8) Schnittgerade von zwei Ebenen: Für zwei nichtparallele Ebenen E und F in Koordinatenform (KF) mit:

$$\begin{aligned} E: ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d \\ F: ex_1 + fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

ergibt sich vermöge der Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F$$

der Richtungsvektor  $\vec{u}$  der Schnittgeraden g:  $x = a + t \vec{u}$  als:

$$\vec{u} = \vec{n}_E \times \vec{n}_F$$

, der Stützvektor  $\vec{a}$  der Schnittgeraden als eine Lösung des linearen 2x3-Gleichungssystems (\*):

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

, wobei durch Nullsetzen von  $x_1$  oder  $x_2$  oder  $x_3$  ein lineares 2x2-Gleichungssystem von der Form (\*\*):

$$\begin{aligned} bx_2 + cx_3 &= d \\ fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ax_1 + cx_3 &= d \\ ex_1 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= d \\ ex_1 + fx_2 &= h \end{aligned}$$

entsteht, mit einer eindeutigen Lösung für die übrigen Variablen (als Komponenten des Stützvektors). Sind die Ebenen E und F parallel, so gilt im Übrigen:

$$\vec{n}_E \times \vec{n}_F = \vec{0}.$$

9) Für die nichtparallelen und sich damit schneidenden Ebenen

$$\begin{aligned} E: x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ F: 3x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ergibt sich als Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ergibt sich mit  $x_3=0$  das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

mit den Lösungen  $x_2 = 2$  und  $x_1 = 2$ . Der Stützvektor der Schnittgeraden ist somit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$