Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Lagebeziehungen allgemein

Einleitung

Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ identifizieren mit Ortsvektoren $\vec{OP}$ (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$, g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$, g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ und Ebenen E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$, E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1$, E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (Parameterform), E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Normalenform), E: $\vec{n}^0\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Hesse'sche Normalenform), E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) (unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gelten dann die Lagebeziehungen hinsichtlich: der Schnittmengen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (leer, Schnittpunkt, Schnittgerade), des Schnittwinkels zwischen Geraden und Ebenen, des Abstands zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Lagebeziehungen

Punkte: P, Q **verschieden**

Abstand:

$$\overline{PQ} = \left|\vec{PQ}\right| = d(P,Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

$P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$

Lagebeziehung zwischen zwei Punkten

$\{P\}\cap g$

Punktprobe (Gleichsetzen):

$\vec{OP} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

LGS

<u>keine</u> Lösung:
Punkt **liegt nicht auf** der Geraden.

$P \notin g$

<u>Abstand</u>:

Lotpunkt $P_L \in g$ mit:

$\vec{P_L P} \cdot \vec{u} = 0$

d(P, g) = d(P, P_L)

<u>eine</u> Lösung:
Punkt **liegt auf** der Geraden.

$P \in g$

(<u>Abstand</u>:

d(P, g) = 0)

P(p_1|p_2|p_3), g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

Lagebeziehungen zwischen Punkt und Gerade

$\{P\}\cap E$

Punktprobe (Gleichsetzen, Einsetzen):

$\vec{OP} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ oder $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$

LGS oder Gleichung

<u>keine</u> Lösung:
Punkt **liegt nicht auf** der Ebene.

$P \notin E$

<u>Abstand</u>:

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, $d = \vec{n}\,\vec{b}$

$d(P,E) = \left|\vec{n} \cdot \vec{OP} - d\right| / \left|\vec{n}\right|$

<u>eine</u> Lösung:
Punkt **liegt auf** der Ebene.

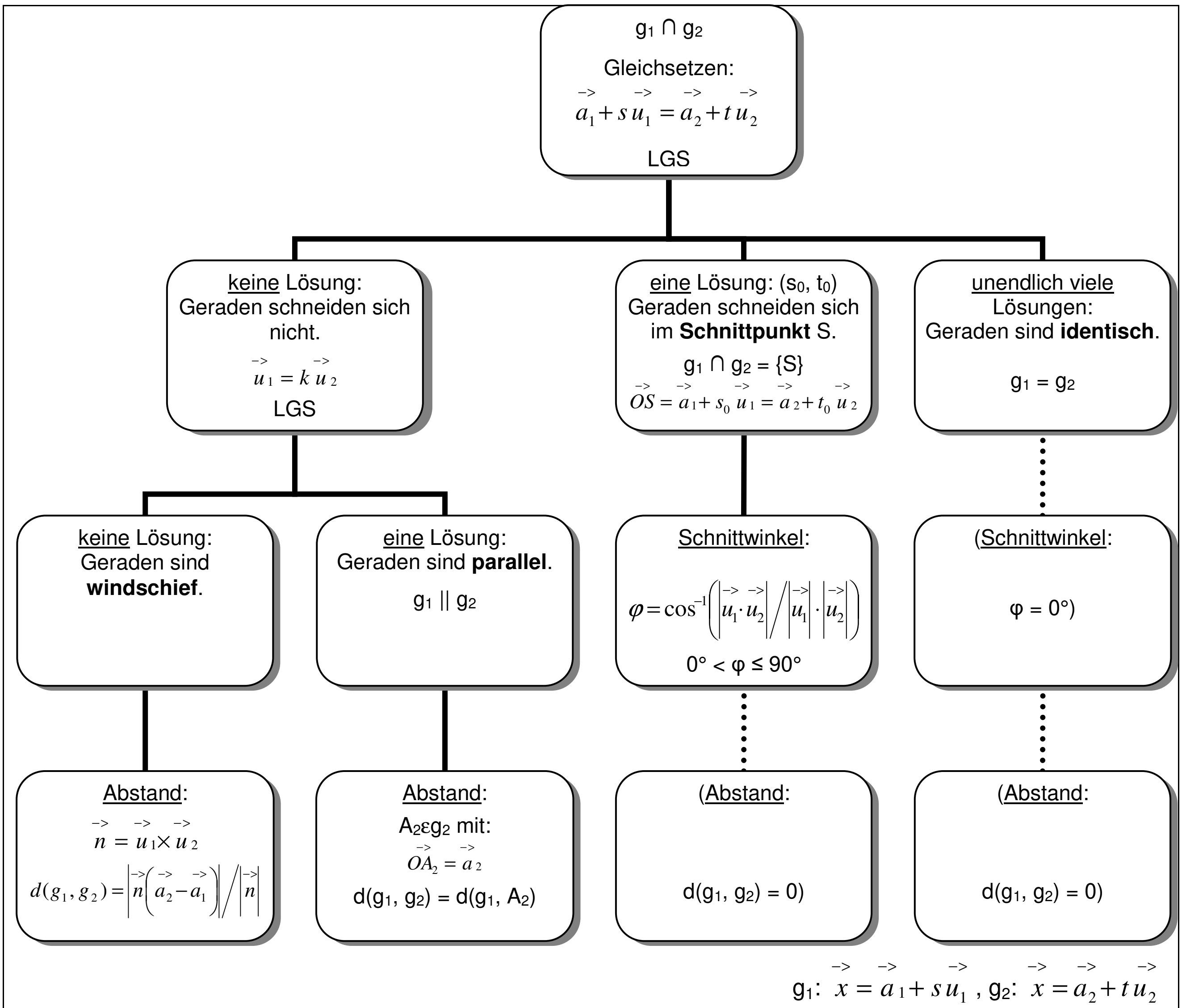
$P \in E$

(<u>Abstand</u>:

d(P, E) = 0)

P(p_1|p_2|p_3), E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ oder E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Lagebeziehungen zwischen Punkt und Ebene



Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

g∩E

Gleichsetzen, Einsetzen:

$\vec{a}+t\,\vec{u}=\vec{b}+r\,\vec{v}+s\,\vec{w}$ oder

$a(a_1+tu_1)+b(a_2+tu_2)+c(a_3+tu_3)=d$

LGS oder Gleichung

<u>keine</u> Lösung:
Gerade und Ebene sind **parallel**.

g || E

<u>Abstand</u>:

$\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$, $d=\vec{n}\,\vec{b}$

$d(g,E)=\left|\vec{n}\cdot\vec{a}-d\right| \big/ \left|\vec{n}\right|$

<u>eine</u> Lösung: t_0
Gerade und Ebene schneiden sich im **Schnittpunkt** S.

g ∩ E = {S}

$\vec{OS}=\vec{a}+t_0\,\vec{u}$

<u>Schnittwinkel</u>:

$\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$

$\varphi=\sin^{-1}\left(\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right| \big/ \left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\right)$

0° < φ ≤ 90°

(<u>Abstand</u>:

d(g, E) = 0)

<u>unendlich viele</u> Lösungen:
Gerade **liegt auf** der Ebene.

g ⊂ E

(<u>Schnittwinkel</u>:

φ = 0°)

(<u>Abstand</u>:

d(g, E) = 0)

g: $\vec{x}=\vec{a}+t\,\vec{u}$, E: $\vec{x}=\vec{b}+r\,\vec{v}+s\,\vec{w}$ oder E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$

Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

$E_1 \cap E_2$

Gleichsetzen, Einsetzen:

$$\vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$$ oder

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$$ oder

$$a(b_{21} + tv_{21} + uw_{21}) + b(b_{22} + tv_{22} + uw_{22}) + c(b_{23} + tv_{23} + uw_{23}) = d_1$$

LGS oder Gleichung

<u>keine</u> Lösung:
Ebenen sind **parallel**.

$E_1 \parallel E_2$

<u>unendlich viele</u> Lösungen:
1 Parameter t
Ebene schneiden sich in einer **Schnittgeraden** g.

$E_1 \cap E_2 = g$

g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

<u>unendlich viele</u> Lösungen:
2 Parameter t, u
Ebenen sind **identisch**.

$E_1 = E_2$

<u>Abstand</u>:

$\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $d_1 = \vec{n}_1 \vec{b}_1$

$$d(E_1, E_2) = \left| \vec{n}_1 \cdot \vec{b}_2 - d_1 \right| \Big/ \left| \vec{n}_1 \right|$$

<u>Schnittwinkel</u>:

$\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\left| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right| \Big/ \left| \vec{n}_1 \right| \cdot \left| \vec{n}_2 \right| \right)$$

0° < φ ≤ 90°

(<u>Schnittwinkel</u>:

φ = 0°)

(<u>Abstand</u>:

$d(E_1, E_2) = 0$)

(<u>Abstand</u>:

$d(E_1, E_2) = 0$)

E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1$ oder E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$,

E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$ oder E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$

Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen